INSA Lyon
Bât. Louis PASTEUR
11 Avenue Jean Capelle
69621 Villeurbanne

Bioinformatique et modélisation
3ème année
UE : Equations différentielles
et modélisation

Contrôle Final Ecrit- EDO
4 novembre 2014

Avant propos.

La durée du partiel est de 2h00. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable ne sont autorisés durant l'épreuve. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront pris en compte dans l'évaluation.

Question de cours (30 minutes)(4 points)

1. (1.5 points) On considère l'équation différentielle autonome non linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(E_1)\; x' = f(x),$$

définie pour tout $t \in I \subset \mathbb{R}$, avec f un application de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe une constante $x^* \in \mathbb{R}$ telle que $f(x^*) = 0$.

   (a) (0.5 point) Comment appelle-t-on x^* ?

   (b) (1 point) Enoncer et montrer le résultat concernant l'étude analytique de la stabilité de x^* du problème (E_1).

2. (2.5 points)

   (a) (0.5 point) Donner la définition des isoclines-k ($k \in \mathbb{R}$) pour l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$x' = g(t, x),$$

   où $t \in I \subset \mathbb{R}$ et g est une application de classe $\mathscr{C}^1(I \times \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   (b) (2 points) Application.

      i. Déterminer les isoclines-k correspondants à l'équation différentielle suivante,

$$x' = tx,$$

      où $t \in \mathbb{R}$.

      ii. Dessiner les isoclines-k pour $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

      iii. Dessiner les trajectoires correspondant aux conditions initiales $x(0) = 0$ et $x(0) = 1$.

iv. Y-a-t-il existence et unicité de ces solutions pour les deux conditions initiales précédentes (iii) ? Justifier.

v. BONUS : (1 point) Trouver analytiquement les solutions pour les conditions initiales de la question (iii).

Exercice 1 (30 minutes)(6 points)

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) \;\; x' = c + x - x^3,$$

définie pour $t \in \mathbb{R}$.

1. (0.5 point) Dire si cette équation différentielle est linéaire ou non et donner son ordre (justifier).
2. (0.5 point) Pour chaque condition initiale $x(t_0) = x_0$ donnée, où t_0 et x_0 sont dans $\mathbb{R}$, a-t-on existence et unicité des solutions ? Justifier.
3. (0.5 point) Déterminer les équilibres de (E_1) en fonction de c.
4. (1 point) Déterminer la stabilité de ces équilibres.
5. (1 point) En déduire un diagramme de bifurcation (le dessiner avec soin). Identifier le type de bifurcation. Quel phénomène peut-on observer ?
6. (0.5 point) On pose $h : x \mapsto h(x) = c + x - x^3$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Chercher une fonction $V : x \mapsto V(x)$ telle que
   $$-h(x) = \frac{dV}{dx}.$$
7. (1 point) Montrer que si x est solution de (E_1), $\dfrac{dV}{dt} = -\left(\dfrac{dV}{dx}\right)^2$.
8. BONUS (1 point) : Comment peut-on interpréter graphiquement ce résultat ?
9. (0.5 point) Dessiner le graphe de V pour $c = 0$
10. (0.5 point) Dessiner le graphe de V pour des valeurs de c significatives.

Exercice 2 (40 minutes)(6 points)

On considère le modèle d'épidémie suivant :

$$(\mathscr{S}) \;\; \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -kxy, \\ y' & = & kxy - ly, \\ z' & = & ly, \end{array} \right.$$

où $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont respectivement les populations de personnes saines, malades et décédées au temps $t \geq 0$.
On considère les paramètres k, l strictement positives. On suppose également les conditions initiales, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et $z(0) = z_0$ toutes positives ou nulles.

1. (0.5 point) Montrer que la somme des trois populations $x+y+z$ est une fonction constante que l'on notera N.
2. (1 point) Utiliser les équations en x' et y' pour montrer que
$$x(t) = x_0 \exp\{\tfrac{-kz(t)}{l}\}.$$
Quelle condition faut-il donner à z_0 pour obtenir ce résultat ?
3. (1 point) Utiliser les deux questions précédentes pour montrer que z satisfait l'équation :
$$(\mathscr{S}_z) \quad z' = l\left(N - z - x_0 \exp\{\tfrac{-kz}{l}\}\right),$$
toujours avec la même condition sur z_0 que pour la question 2.
4. On pose $u = \dfrac{k}{l}z$ et $\tau = kx_0t$.
   (a) (0.5 point) Montrer que l'équation $(\mathscr{S}_z)$ peut alors s'écrire
   $$(\mathscr{S}_u) \quad \frac{du(\tau)}{d\tau} = a - bu(\tau) - e^{-u(\tau)},$$
   avec $a = \dfrac{N}{x_0}$ et $b = \dfrac{l}{kx_0}$.
   (b) (0.5 point) Justifier le fait que $a \geq 1$ et $b > 0$.
   (c) (1 point) Chercher les équilibres de $(\mathscr{S}_z)$ et donner leur nature (stabilité).
   (d) (0.5 point) Montrer que le maximum de u' (et non pas u) apparaît au même moment t_c (s'il existe) que celui de z' et celui de de y (et non pas y').
   Bonus : quelle est l'interprétation possible de ce temps critique t_c ?
   (e) (1 point) Montrer que :
      i. si $b < 1$ alors u' est croissante au voisinage de $t_0 = 0$ puis atteint un maximum à t_c. Montrer que u' tend vers 0 quand t tend vers l'∞.
      ii. si $b > 1$, alors $t_c = t_0 = 0$.
      iii. BONUS (0.5 point) : que se passe-t-il si $b = 1$?

Exercice 3 (20 minutes) (4 points)

Considérons l'équation différentielle
$$(E_3) \;\; x' = rx - \sinh(x),$$
où r est une constante réelle.
On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

1. (0.5 point) Montrer que l'on a l'existence et l'unicité locale de la solution de ce problème avec une condition initiale $x(t_0) = x_0$ donnée.
2. (1 point) Trouver graphiquement les équilibres de cette équation en fonction du paramètre r.
3. (1 point) Donner graphiquement la stabilité de ces équilibres en fonction de r.
4. (1 point) Tracer soigneusement le diagramme de bifurcation.
5. (0.5 point) Donner le nom de la (des différentes) bifurcation(s) rencontrée(s).

Contrôle final 3BIM 4 NOVEMBRE 2014

Question de cours.

1. (a) x^* est l'équilibre de (E_1)

(b) En posant $x = x^* + x_p$ où x_p est une petite perturbation autour de x^*, on a dans (E_1)

$x_p' = f(x^* + x_p) \simeq f'(x^*) x_p$ en linéarisant autour de x^*

On obtient donc l'EDO linéarisée :

$x_p' = f'(x^*) x_p$ dont la solution est $x_p(t) = Ce^{f'(x^*)t}$

1) si $f'(x^*) > 0$ $\quad |x_p(t)| \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ $\quad x^*$ est instable

2) si " < 0 $\quad$ " $\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ $\quad x^*$ est localement asymptotiquement stable

3) si $f'(x^*) = 0$ on ne peut pas conclure.

On devra à l'ordre supérieur (cf cours)

2. a. On appelle isocline k de l'équation $x' = g(t,x)$ l'ensemble des points $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $g(t,x) = k$

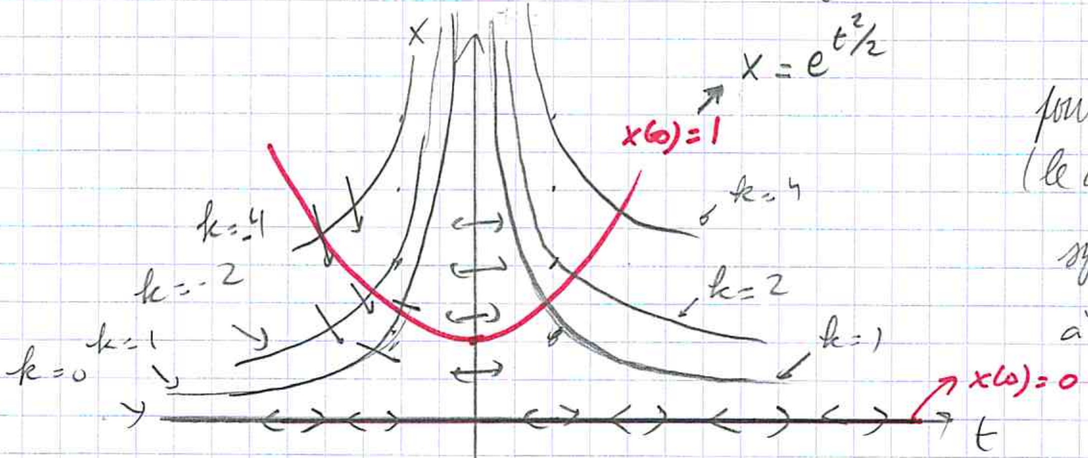
b. i) $x' = tx$ $\quad g(t,x) = tx$ $\quad g(t,x) = k \Leftrightarrow tx = k \Rightarrow k = 0$ $t = 0$ ou $x = 0$

si $t \neq 0$: $x = \frac{k}{t}$

ii) $k = 0$; $x = 0$ ou $t = 0$ $\quad k = 2$, $x = \frac{2}{t}$

$k = 1$, $x = \frac{1}{t}$ $\quad k = -2$, $x = -\frac{2}{t}$

$k = -1$, $x = -\frac{1}{t}$ $\quad k = 4$, $x = \frac{4}{t}$ $\quad k = -4$, $x = -\frac{4}{t}$



pour $x > 0$
(le cas $x \leq 0$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses)

iv) $g : (t,x) \to g(t,x) = tx$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc a fortiori $\mathcal{C}^1$ donc on a existence et unicité locale des solutions par le théorème de Cauchy-Lipschitz

v) $x(t) = Ce^{t^2/2}$ pour $x(0)=0$ on a $C=0$ et $x(t)=0$

" $x(0)=1$ " a $C=1$ " $x(t) = e^{t^2/2}$

Exercice 1:

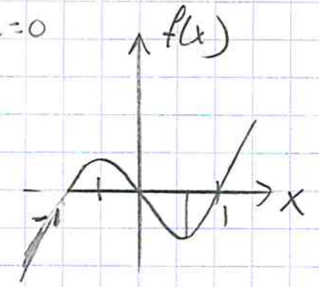
1. EDO non linéaire (terme en x^3) d'ordre 1.
2. Soit $f : x \mapsto c + x - x^3$ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ et par le théorème de Cauchy-Lipschitz on a existence et unicité du problème de Cauchy
3. Equilibres: $f(x^*) = 0 \Leftrightarrow c + x^* - x^{*3} = 0$

$\Leftrightarrow x^{*3} - x^* - c = 0$

C'est le polynôme $P : x \mapsto P(x) = x^3 - x^*$ auquel on fait une translation de $-c$

si $c=0$ on a $P(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0$

$c=0$



$\Leftrightarrow x=0$ et $x = \pm 1$ on a 3 équilibres et 0 stable ± 1 instables

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

si $c >$

si $c \in]0, 1/3[$

si $c = \frac{1}{3}$ si $c > \frac{1}{3}$

si $c \in]\frac{-1}{3}, 0[$

si $c = \frac{-1}{3}$ si $c < \frac{-1}{3}$

on a différents cas !!!

C'est la même chose qu'en cours

$x' = c + dx - x^3$ avec $d = 1$ (CUSP)

c'est juste le cas $\underline{\underline{d=1}}$: donc avec 1 seul paramètre c ici

(ci faire)

Exercice 2

1) $x'+y'+z'=0 \Rightarrow N = x+y+z = c^{te}$

2) $x' = -kxy$ ①

$y' = kxy - ly$

$z' = ly$ ②

$$\text{① et ②} \quad x' = -kx\frac{z'}{l} \Rightarrow \frac{x'}{x} = -\frac{k}{l}z'$$

$$\Rightarrow \ln|x| - \ln|x_0| = -\frac{k}{l}(z-z_0)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x_0} = e^{-k/l(z-z_0)}$$

$$\Rightarrow x = x_0 e^{-k/l(z-z_0)}$$

avec $z_0=0$ on obtient le résultat

3. $z' = ly = l[N-x-z] = l\left[N - x_0 e^{-k/l\, z} - z\right]$

4. $z' = l(N - z - x_0 e^{-k/l\, z} - z)$

on pose $u = \frac{k}{l}z \Rightarrow u' = \frac{k}{l}z' = k\left[N - \frac{l}{k}u - x_0 e^{-u}\right]$

Et on veut trouver τ t.q. $\frac{du}{d\tau} = \frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = a - bu - e^{-u}$

Autrement dit $\frac{du}{d\tau} = \left[k\left(N - \frac{l}{k}u - x_0 e^{-u}\right)\right]\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{N}{x_0} - \frac{l}{kx_0}u(\tau) - e^{-u(\tau)}$

càd que $\frac{dt}{d\tau}\cdot kN = \frac{N}{x_0} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{kx_0} \Rightarrow t = \frac{1}{kx_0}\tau \Rightarrow \tau = kx_0 t$

on a alors $\frac{du}{d\tau} = a - bu - e^{-u}$

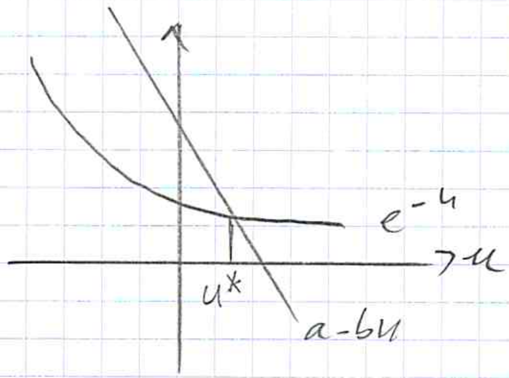
5. N = # total de personnes = constante

x_0 = # total de personnes saines sauf à $t=0$

$\frac{N}{x_0} > 1$ par construction

et $b > 0$ car l, k et $x_0 > 0$

c. $a - bu^* = e^{-u^*}$



un seul point fixe u^* pour $a>1$ et $b>0$
et ce point fixe est LAS

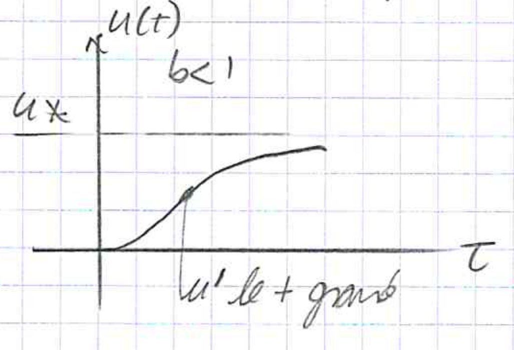
d. le maximum $u'(t)$ arrive en même temps que celui de z'
car $u = \frac{k}{e} z$
Mais $z' = ly$ et donc celui de y arrive également au même moment

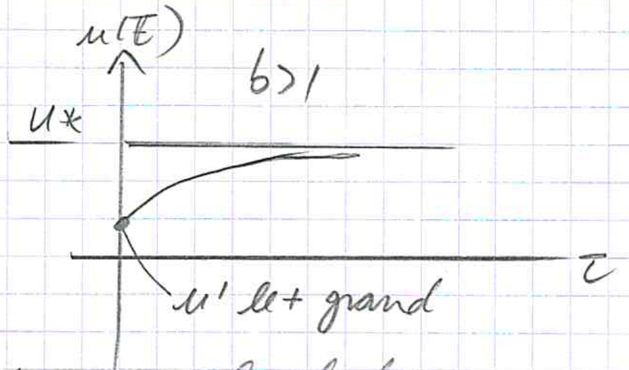
e) si $b<1$ on suppose $u(0)=0$

$$u'' = -bu' + u'e^{-u} = (-b+e^{-u})u'$$
$$= (1-b)u'$$

$\Rightarrow$ si $b<1$ on a une
croissance localement exponentielle de $u' \simeq u'(0)\, e^{(1-b)\tau} \underset{\tau\to+\infty}{\to} 0$

D'un autre côté si $b>1$ alors
$u'' = (1-b)u' \Rightarrow u' \downarrow$ à partir de $t=0$
et donc u' possède un max à $t=0$





Interprétation: $b = \frac{e}{kx_0}$ est le taux pour lequel les personnes meurent
sur le taux pour lequel elles infectent les autres
si elles meurent rapidement elles ne peuvent pas en infecter beaucoup
si " " lentement elles pourront en infecter beaucoup et ça devient pire

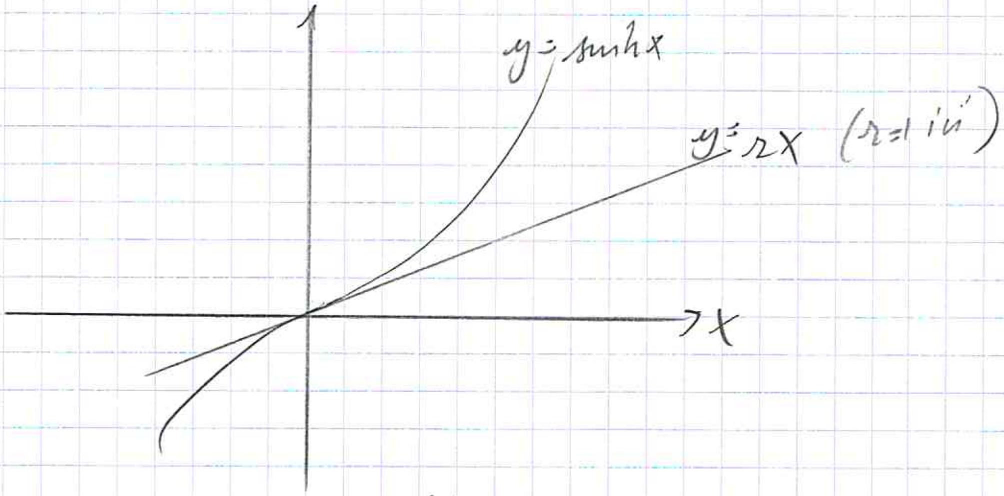
Ex3 :

1. On pose $f(x) = rx - \sinh(x)$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc de classe $\mathcal{C}^1$

et le théorème de Cauchy-Lipschitz $\Rightarrow$ existence et unicité

2.



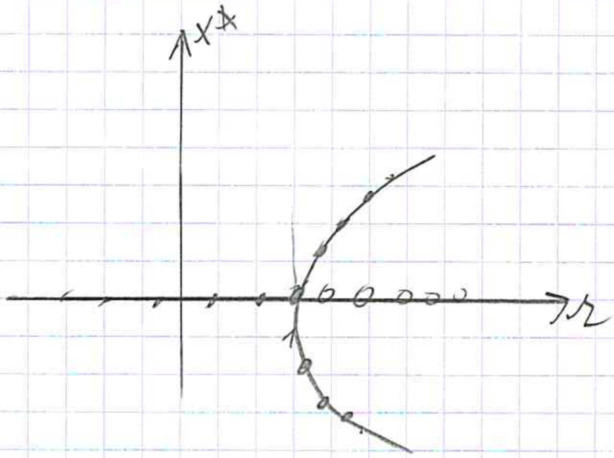
on a toujours 0 comme equilibre

puis on peut avoir 1 seul si $r \leq 1$ et 3 si $r > 1$

dans le cas $r \leq 1$: 0 est LAS

$r > 1$ 0 est instable et les 2 autres stables (LAS)

(faire le graphe)



bifurcation fourche surcritique