Résolution explicite

EXERCICE 1. (**Ordre et linéarité**)
Donner l'ordre de chacune des équations différentielles suivantes et établir si elles sont linéaires ou non-linéaires, et autonomes ou non-autonomes.

a) $x^2y'' - 4xy' + y = \sin(x)$ **b**) $(y^3 + y - 1) - xy' = 0$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ **d**) $y^{(3)} - \left(1 + y + \frac{(y')^2}{3}\right) y' + 5y = 0$

EXERCICE 2. (**Se ramener au premier ordre**)
On considère le système d'équations différentielles de second ordre suivant :

$$\begin{cases} y''(t) = y'(t) + z'(t) + 2(y(t) - z(t)) \\ z''(t) = y'(t) - z'(t) + 2(y(t) + z(t)) \end{cases}$$

Faire un changement de fonctions inconnues permettant de ramener ce système à un système de 4 équations différentielles de premier ordre.

EXERCICE 3. (**Séparation des variables**)
Résoudre les équations différentielles ci-dessous. Donner les solutions maximales et indiquer si elles sont globales.

a) $y(t)y'(t) = -t, \quad t \in \mathbb{R}$ **b**) $y' = \frac{1}{t^2}\, y(y-1), \quad t > 0$

c) $(t^2+1)y' - (t^3+2)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}$ **d**) $y' = (y+3t)^3 - 3,\ t \in \mathbb{R}$

Pour les équations **b)** et **d)** trouver la (les) solution(s) maximale(s) satisfaisant l'égalité supplémentaire: $y(1) = 3$.

EXERCICE 4. (**Equations de Bernouilli**)
Résoudre les équations de Bernouilli suivantes :

a) $$x\,\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$$

b) $$\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$$

EXERCICE 5. (**Equation de Ricatti**)
L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

(où P, Q et R sont des fonctions données) est connue sous le nom d'équation de Ricatti.
a) Une équation de Ricatti peut être résolue par une succession de deux substitutions pourvu que nous connaissions une solution particulière y_1 de l'équation. Indiquer comment résoudre cette équation en utilisant le changement d'inconnue $y = y_1 + u$.
b) **Application :** trouver les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2.$$

EXERCICE 6. (**Equations linéaires**)
i) Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $(1-t^2)y' + ty = 3t$
b) $\sin(t)y' + \cos(t)y = 1$
ii) Montrer que pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ l'équation **b)** admet une unique solution maximale z_k définie sur $](k-1)\pi,\ (k+1)\pi[$. Montrer que z_k est de classe C^∞ sur $](k-1)\pi,\ (k+1)\pi[$.

EXERCICE 7. (**Equations aux différentielles totales**)
Montrer que les équations différentielles suivantes peuvent s'écrire comme des équations aux différentielles totales et les résoudre :
a) $(x^2-1)y'(x) + 2xy = 0$
b) $y(1-x^2)y'(x) = xy^2 - \sin(x)\cos(x)$

EXERCICE 8. (**Facteurs intégrants**)
a) Trouver la valeur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour laquelle l'équation différentielle suivante est aux différentielles totales :

$$(y^3 + \alpha x y^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0.$$

Résoudre ensuite cette équation.
b) Résoudre l'équation différentielle suivante en trouvant un facteur intégrant approprié :

$$(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0.$$

EXERCICE 9. (**Solution maximale, globale**)
On se donne deux fonctions continues et strictement positives $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$x' = \varphi(x)\psi(t) \tag{1}$$

a) On suppose dans cette partie qu'on a

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\varphi(y)}\,dy = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(y)}\,dy = +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\,dy < +\infty.$$

Montrer que toute solution maximale est globale et possède deux asymptotes horizontales distinctes.
b) On suppose ici que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(y)}\,dy < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\,dy < +\infty$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(y)}\,dy > \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\,dy.$$

Montrer que l'équation différentielle (1) possède une infinité de solutions globales ainsi qu'une infinité de solutions maximales non globales.

c) Exemple concret:

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$x' = \left(\frac{x^2+1}{t^4+1}\right)^{1/3}.$$

Que peut-on dire des solutions de cette équation?

EXERCICE 10. (**Equation présentant une homogénéité**)

On considère une équation différentielle générale de la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

avec $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Indiquer comment résoudre ce problème en utilisant le changement d'inconnue $y(t) = tu(t)$.

Exemple concret: Résoudre l'équation différentielle

$$y' = \frac{y^2+ty-t^2}{t^2}.$$

TD1.

1) Resultat general

$y' = a(t)\, y$

alors $\quad y = \lambda e^{A(t)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad$ avec $A = \int a$ = primitive de a

(car $\frac{y'}{y}$ si $y \neq 0$ $\quad \frac{y'}{y} = a \quad \Rightarrow \log(|y|) = A(t) + c \Rightarrow |y| = e^{A(t)} e^{c}$

$y = \underbrace{\pm e^{c}}_{=\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}} e^{A(t)}$ $\quad$ aussi $\lambda = 0$ ok!)

2) Resultat general

$y' = a(t) y + b(t)$

alors $\quad y = \lambda e^{A(t)} + \alpha(t) e^{A(t)}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

avec $\alpha(t) = \int e^{-A(t)} b(t)\, dt$ = une primitive de $e^{-A(t)} b(t)$

(car on cherche une solut. particulière comme

$y_1(t) = \alpha(t) e^{A(t)} \quad \Rightarrow y_1' = \alpha' e^{A(t)} + \cancel{\alpha a e^{A}}$

$a(t) y_1 + b(t) = \cancel{a \alpha e^{A}} + b$

$\Rightarrow \alpha' = e^{-A} b$ ~~$e^{-A} b$~~ $e^{-A(t)} b(t)$

Alors $y - y_1 \equiv z$ satisfait $\quad z' = a(t) z. \quad \Rightarrow z = \lambda e^{A(t)}$ ok)

Corrigé TD 1 (2013-2014)

Exo 1.

a) ordre 2, ~~et~~ linéaire, non-autonome
b) ordre 1 ~~et~~ non-linéaire, non-autonome
c) ordre 2 ~~et~~ non-linéaire, autonome
d) ordre 3 ~~et~~ non-linéaire, autonome

Exo 2.

On peut mettre : $x_1 = y$; $x_2 = y'$; $x_3 = z$; $x_4 = z'$
Alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_2 + x_4 + 2x_1 - 2x_3 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = x_2 - x_4 + 2x_1 + 2x_3 \end{cases}$$

Exo 3.

a) En intégrant on déduit : $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}t^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$
$y^2 + t^2 = 2c$ ~~avec $c \in \mathbb{R}$~~
C'est l'équation du cercle ; prendre $c > 0$
Pour tout $c > 0$ fixé il y a 2 solutions maximales
$y = \sqrt{2c - t^2}$ ou $y = -\sqrt{2c - t^2}$
les deux définies sur l'intervalle $I =]-\sqrt{2c}, \sqrt{2c}[$ car
(impossible de prolonger à un intervalle contenant $\pm\sqrt{2c}$ car la dérivée de y est $\pm\infty$ dans un tel point). | On peut dire que les solut. sont $(\sqrt{2c - t^2}, I)$ et $(-\sqrt{2c - t^2}, I)$
Ces solutions ne sont pas globales

b) En intégrant on déduit
$\sin y = t + c$. $c \in \mathbb{R}$
Pour tout $c \in \mathbb{R}$ prendre t tel que $-1 \le t + c \le 1$ $\Leftrightarrow$ $t \in [-1-c, 1-c]$. ~~Alors y =~~ Notons $J = [-1-c, 1-c]$
Mais la fonction $s \in [-1, 1] \to \arcsin(s) \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $]-1, 1[$, mais pas sur $[-1, 1]$ (la dérivée en ± 1 serait $\pm\infty$). Alors l'intervalle maximal d'existence de la solution est $I =]-1-c, 1-c[$. Les solutions de b) sont toutes définies sur I et sont

| $\arcsin'(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$

$$\arcsin(t+c) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
ou
$$\pi - \arcsin(t+c) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ces solutions ne sont pas globales

changer - voir par fin

Changer. voir fin

c) On utilise la séparation des variables : on écrit

$\frac{y'}{y} = \frac{t^2-1}{t^2+1}$. On a : $\frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{t^2+1-2}{t^2+1} = 1 - \frac{2}{t^2+1}$

En intégrant on déduit $c \in R$

(*) $\log(|y|) = t - 2\,\mathrm{arctg}(t) + c$

où y doit être tel que $y \neq 0$

(pas de contraintes ici pour t)

~~On dedu~~ Nous avons aussi la solution $y = 0$

De (*) on déduit

$|y| = e^c e^{t-2\,\mathrm{arctg}(t)}$ donc

$y = \pm e^c e^{t-2\,\mathrm{arctg}(t)}$

On peut alors écrire toutes les solutions sous la forme

$y(t) = \lambda e^{t-2\,\mathrm{arctg}(t)}$ avec $\lambda \in R$

solutions définies toutes sur $I = R$

(donc $(\lambda e^{t-2\,\mathrm{arctg}(t)}, R)$ $\lambda \in R$

Ensuite $y(1) = 3 \iff \lambda(e^{1-2\frac{\pi}{4}}) = 3$

Ce sont des solutions globales

$\Rightarrow \lambda = 3e^{\frac{\pi}{2}-1} \Rightarrow y(t) = 3e^{t-1+\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(t)}$

d) Il est convenable ici de faire le changement d'inconnue

$x(t) = y(t) + 3t$ (x nouvelle inconnue)

Alors $y = x - 3t$. En remplaçant dans l'équation d) on obtient

$x' + 3 = x^3 + 3 \iff x' = x^3$

On observe que $x = 0$ (donc $y = -3t$) en est une solution. Pour $x \neq 0$ on peut écrire

$\frac{x'}{x^3} = 1$. En intégrant $\Rightarrow$

$-\frac{1}{2x^2} = t + c$ avec $c \in R$, donc $x^2 = -\frac{1}{2(t+c)}$

Alors les solutions maximales $y(t)$ sont

$(-3t, R)$ → globale

Non $\left(-3t \pm \sqrt{\frac{-1}{(t+c)2}},\ ]-\infty, -c[\right)$ 2 solutions non globales

Non $\left(-3t - \frac{1}{t+c},\ ]-c, +\infty[\right)$ non globale.

Ensuite la première solution $y(t)$ ne peut pas satisfaire $y(1) = 3$

Prendre $c \neq -1$, résoudre $-3 \cdot 1 \pm \sqrt{\frac{-1}{(1+c)2}} = 3 \iff c = -1 - \frac{1}{72}$

avec "+"

Alors l'unique solution satisfaisant $y(1)=3$ est

~~$y(t) = -2t - \frac{1}{t-2}$ définie sur $]-\infty, 2[$~~ $y(t) = -3t + \sqrt{-\frac{1}{2(t-\frac{73}{72})}}$ définie sur $]-\infty, \frac{73}{72}[$

donc ~~$\left(2t - \frac{1}{t-2},]-\infty, 2[\right)$~~ $\left(-3t + \sqrt{\frac{1}{\frac{73}{36}-2t}},]-\infty, \frac{73}{72}[\right)$

Exo 4.

(ici $r=-2$)

a) On utilise le changement d'inconnue

$u = y^3 \iff y = u^{1/3}$, $y \neq 0 \iff u \neq 0$

Alors $y' = \frac{1}{3} u^{-2/3} u'$. En remplaçant on trouve

Autrement : on multiplie par y^2 : $\underbrace{x y^2 y'}_{=\frac{x}{3}u'} + \underbrace{y^3}_{=u} = 1$

Ceci donne

$\frac{x}{3} u^{-2/3} u' + u^{1/3} = u^{-2/3}$

$u' = -\frac{3}{x} u + \frac{3}{x}$ (*)

si $u' = bu + d$
$u = c\, e^{B(t)} + \hat{u}$ avec $B(t)$ primitive de b
$\hat{u}$ une solut. particulière
$\hat{u} = e^{B(t)} \int e^{-B} d$

$\iff \frac{x}{3} u' + u = 1 \iff$ ~~$u' + \frac{3}{x} u = \frac{3}{x}$~~

Une primitive de $-\frac{3}{x}$ est $-3\log(|x|)$

Alors la solution générale de (*) est

$u(x) = e^{-3\log(|x|)} c + e^{-3\log(|x|)} \int e^{+3\log(|x|)} \frac{3}{x} dx$

$= \frac{c}{|x|^3} + \frac{3}{|x|^3} \int \frac{|x|^3}{x} dx$ sur un intervalle $\subset \mathbb{R}_+^*$ ou $\subset \mathbb{R}_-^*$.

On trouve alors

$u(x) = \frac{c}{|x|^3} + 1 = \begin{cases} \frac{c}{x^3}+1 & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \\ -\frac{c}{x^3}+1 & \text{sur } \mathbb{R}_- \end{cases}$

Méthode plus simple : observer que 1 est une solution particulière de (*)

En changeant éventuellement c on peut dire

$u(x) = \frac{c}{x^3} + 1$ ce qui donne $y = \frac{\sqrt[3]{c+x^3}}{x}$

On a les solutions maximales pour y :

$(1, \mathbb{R}) \to$ c'est global (ceci corresp à $c=0$)

pour $c>0$: $\left(\frac{\sqrt[3]{c+x^3}}{x},]0, \infty[\right)$, $\left(\frac{\sqrt[3]{c+x^3}}{x},]-\infty, -\sqrt[3]{c}[\right)$, $\left(\frac{\sqrt[3]{c+x^3}}{x},]-\sqrt[3]{c}, 0[\right)$

$-\sqrt[3]{c}$ 0 $c>0$

pour $c<0$: $\left(\frac{\sqrt[3]{c+x^3}}{x},]-\infty, 0[\right)$, $\left(\frac{\sqrt[3]{c+x^3}}{x},]0, -\sqrt[3]{c}[\right)$, $\left(\frac{\sqrt[3]{c+x^3}}{x},]-\sqrt[3]{c}, +\infty[\right)$

(car la dérivée de y en $-\sqrt[3]{c}$ est $\pm\infty$ si $c \neq 0$)

0 $-\sqrt[3]{c}$ $c<0$

b) On fait le changement d'inconnue $u = y^{-3}$ (donc $u \neq 0$) $\iff y = u^{-\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow$

$y' = -\frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} u'$. Donc

$-\frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} u' = x u^{-\frac{4}{3}} - u^{-\frac{1}{3}}$. donc

$-\frac{1}{3} u' = x - u \iff u' = 3u - 3x$

Les solutions sont données par

$$u(x) = ce^{3x} + e^{3x} \underbrace{\int_0^x e^{-3t}(-3t)\,dt}_{=(e^{-3t})'t} = ce^{+3x} + e^{3x}\Big[\underbrace{\big[te^{-3t}\big]_0^x}_{=xe^{-3x}} - \underbrace{\int_0^x e^{-3t}dt}_{=\left[\frac{e^{-3t}}{-3}\right]_0^x}\Big] = ce^{3x} + x + \frac{1}{3}e^{3x}(e^{-3x}-1)$$

$$= ce^{3x} + x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{3x}$$

Donc $u(x) = ce^{3x} + x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{3x}$

Alors $y = \left[c'e^{3x} + x + \frac{1}{3}\right]^{-\frac{1}{3}}$

(on a remplacé $c - \frac{1}{3}$ par une nouvelle constante c') les solutions maximales sont définis sur les plus grandes intervalles ouverts qui ne contient pas des racines de la fonction $x \to c'e^{3x} + x + \frac{1}{3}$

(on pourrait faire une étude ! $\to$ c'est trop long !)

Exo 5

a) On remplace $y = y_1 + u$ dans l'équation de Ricatti $\Rightarrow$

$\cancel{y_1'} + u' = \cancel{P(x)} + Q(x)(\cancel{y_1} + u) + R(x)(\cancel{y_1^2} + 2y_1u + u^2)$ alors u satisfait

Comme $y_1' = P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2$

$u' = Q(x)u + 2R(x)y_1u + R(x)u^2$

qui est du type Bernouilli avec $r = 2$

Faire ensuite le changement d'inconnue $v = u^{-1}$

$\iff u = v^{-1} \Rightarrow u' = -\frac{1}{v^2}v'$, ce qui donne pour $u, v \neq 0$

$$-\frac{1}{v^2} v' = \left[Q(x) + 2y_1(x)R(x)\right]\frac{1}{v} + \frac{R(x)}{v^2} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$-v' = (Q + 2Ry_1)v + R \qquad \text{equation linéaire d'ordre 1}$$

Application : ici $P(x) = -\frac{4}{x^2}$; $Q(x) = -\frac{1}{x}$, $R(x) = 1$

On pense qu'une expression du type $\frac{\alpha}{x}$ peut être solution de l'équation ; alors :

$$-\frac{\alpha}{x^2} = -\frac{4}{x^2} - \cancel{\frac{\alpha}{x^2}} + \frac{\alpha^2}{x^2}$$ ok si $\alpha = 2$ ou $\alpha = -2$

donc ici $y_1(x) = \frac{2}{x}$; alors $y = \frac{2}{x} + u$, u satisfait

$u' = \frac{3}{x} u + u^2$. Ensuite $v = u^{-1}$ satisfait

$v' = -\frac{3}{x} v - 1$. Une solut. particulière est $v_1(x) = -\frac{1}{4}x$

Alors $v(x) = \frac{c}{|x|^3} - \frac{1}{4}x$, qu'on peut écrire (en changeant c)

comme $v(x) = \frac{c}{x^3} - \frac{x}{4}$ sur $x > 0$ ou $x < 0$

(Attention ! exclure les points (dépend de c) tels que $\frac{c}{x^3} = \frac{x}{4}$ ... calculer ! ---)

Exo 6.

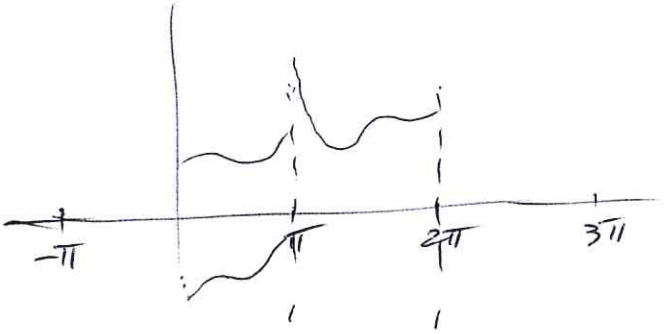
Remarquons qu'on a :

$\sin(t)y' + \cos(t)y = (\sin(t)y)'$ donc en intégrant $\Rightarrow$

$\sin(t)y(t) = t + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

$\sin(t) = 0$ ssi $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Alors a priori on aurait une infinité de solutions $y(t) = \frac{t+c}{\sin t}$, $c \in \mathbb{R}$ sur chaque intervalle $](k-1)\pi, k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$



peut-on prolonger ~~des~~ de telles solutions au-delà de $](k-1)\pi, k\pi[$?

Soit y_1 une solution general sur $](k-1)\pi, k\pi[$, $y_1(t) = \frac{t+c_1}{\sin t}$

y_2 une solution general sur $]k\pi, (k+1)\pi[$; $y_2(t) = \frac{t+c_2}{\sin t}$.

Pour pouvoir prolonger ~~cette~~ ces solutions en $k\pi$ et obtenir une solution sur $](k-1)\pi, k\pi[$, il faudrait

$$\lim_{\substack{t\to k\pi \\ t<k\pi}} y_1(t) = \lim_{\substack{t\to k\pi \\ t>k\pi}} y_2(t) \in \mathbb{R}$$

et aussi

$$\lim_{\substack{t\to k\pi \\ t<k\pi}} y_1'(t) = \lim_{\substack{t\to k\pi \\ t>k\pi}} y_2'(t) \in \mathbb{R}$$

Comme $\sin(k\pi)=0$ il faut $c_1 = c_2 = -k\pi$

$$\lim_{t\to k\pi} \frac{t-k\pi}{\sin t} = (\text{ch. variable } t = k\pi + s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{\sin(k\pi+s)} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s}{(-1)^{k}\sin s} = (-1)^{k} \quad \text{OK!}$$

D'autre part, $\left(\frac{t-k\pi}{\sin t}\right)' = \frac{\sin t - (t-k\pi)\cos t}{\sin^2 t} \underset{t=k\pi+s}{=}$

$$= \frac{(-1)^k \sin s - s(-1)^k \cos s}{\sin^2 s} = (-1)^k \frac{s - s + O(s^3)}{s^2 + O(s^3)} \xrightarrow{s\to 0} 0 \quad \text{OK!}$$

Donc on a une solution $y(t) = \begin{cases} \frac{t-k\pi}{\sin t} & \text{si } t \neq k\pi \\ (-1)^k & \text{si } t = k\pi \end{cases}$ ~~définie sur~~ définie sur

$I_k =](k-1)\pi, (k+1)\pi[$. Comme $\lim_{\substack{t\to(k+1)\pi \\ t<(k+1)\pi}} y(t) = +\infty$ ou $-\infty$

et $\lim_{\substack{t\to(k-1)\pi \\ t>(k-1)\pi}} y(t) = +\infty$ ou $-\infty$

il est impossible de la prolonger au-delà de I. Donc I est maximal ~~On a~~.

L'unicité résulte de l'unicité de $c_1, c_2 = -k\pi$.

Exo 7 :

a) On peut ecrire cette equation comme

(*) $\underbrace{(x^2-1)}_{=a(x,y)}dy + \underbrace{2xy}_{=b(x,y)}dx = 0$

Comme $\frac{\partial a}{\partial x} = 2x = \frac{\partial b}{\partial y}$, alors c'est aux ~~diff~~ différentielles totales, donc $\exists\, w(x,y)$ t.q $dw = (x^2-1)dy + 2xy\,dx$

$(\Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = x^2-1$ et $\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy$) ! En fait : $\exists\, w(x,y)$ t.q $dw = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} w(x, y(x)) = 0$, $w(x,y(x)) =$

$x^2-1 = \frac{\partial w}{\partial x}$ et $2xy = \frac{\partial w}{\partial x}$? Alors si y solut $\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} y' + \frac{\partial w}{\partial x}$

$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2-1 \Rightarrow w = (x^2-1)y + c(x) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 2xy + c'$

(prendre $c(x) = 0$)

Donc $w(x,y) = (x^2-1)y$

Alors les solutions de (*) sont $(x^2-1)y = c$, $c \in \mathbb{R}$ les solutions maximales sont

Pour $c \neq 0$

$$y = \frac{c}{x^2-1}$$

definies sur ~~des inte~~ $]-\infty, -1[$ ou $]-1, 1[$ ou $]1, \infty[$

Pour $c = 0$ la solution est $y = 0$, elle est globale

b) L'equation s'ecrit comme

$$\underbrace{y(1-x^2)}_{a}dy + (\underbrace{\sin x \cos x - xy^2}_{b})dx = 0$$

$\frac{\partial a}{\partial x} = -2xy = \frac{\partial b}{\partial y}$. donc OK!

On veut $w(x,y)$ tel que $\frac{\partial w}{\partial y} = a$, $\frac{\partial w}{\partial x} = b$ $\Leftrightarrow$

$\frac{\partial w}{\partial y} = y(1-x^2) \Rightarrow w = \frac{1}{2}y^2(1-x^2) + c(x)$

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = -xy^2 + c'(x) = \underbrace{\sin x \cos x}_{=\frac{1}{2}\sin(2x)} - xy^2$

Prends $c(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x)$

Donc $w(x,y) = \frac{1}{2}y^2(1-x^2) - \frac{1}{4}\cos(2x)$

les solutions de EDO sont

$$y^2(1-x^2) - \frac{1}{2}\cos(2x) = 2C \equiv C_1$$

On peut dire que ~~la~~ y est donnée implicitement

comme solution de
$y^2(1-x^2) - \frac{1}{2}\cos(2x) = c_1$

Exo 8.

a) $a(x,y) = y^3 + \alpha x y^4 - 2x$; $b(x,y) = 3x y^2 + 20 x^2 y^3$

$\frac{\partial a}{\partial y} = 3y^2 + 4\alpha x y^3$ et $\frac{\partial b}{\partial x} = 3y^2 + 40 x y^3$

On a $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \iff \alpha = 10$

On cherche w tel que $\frac{\partial w}{\partial x} = y^3 + 10 x y^4 - 2x$ et

$\frac{\partial w}{\partial y} = 3x y^2 + 20 x^2 y^3$

$\Rightarrow w = x y^3 + 5x^2 y^4 - x^2 + c(y) \Rightarrow$

$\frac{\partial w}{\partial y} = 3x y^2 + 20 x^2 y^3 + c'(y)$. Prendre $c(y) = 0$

Donc les solutions sont données par l'equation implicite

$x y^3 + 5x^2 y^4 - x^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$

b) L'equation donnée est equivalente (là ou $\mu \neq 0$) à l'equation

$\underbrace{\mu(x,y)(2y^2+3x)}_{= a(x,y)} dx + \underbrace{2xy\mu(x,y)}_{= b(x,y)} dy = 0$

On veut $\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(2y^2+3x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\mu\right) \iff$

$\frac{\partial \mu}{\partial y}(2y^2+3x) + 4y\mu = 2y\mu + 2xy\frac{\partial \mu}{\partial x} \iff$

$(2y^2+3x)\frac{\partial \mu}{\partial y} - 2xy\frac{\partial \mu}{\partial x} + 2y\mu = 0$

Il suffit d'observer que $\mu(x) = x$ convient

$0 - 2xy + 2yx = 0$ OK!

Alors on cherche $W(x,y)$ tel que

$$\frac{\partial W}{\partial x} = x(2y^2+3x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 2x^2y.$$

De la 2-ème égalité on déduit :

$$W = x^2y^2 + c(x) \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial x} = 2xy^2 + c'(x) = 2xy^2+3x^2.$$

Alors $c' = 3x^2 \Rightarrow c = x^3$

Donc $W(x,y) = x^2y^2 + x^3$

L'equation implicite est

$$x^2y^2 + x^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exo 9.

(a) L'equation s'écrit sous la forme

$$(*) \quad \frac{x'}{\varphi(x)} = \psi(t)$$

On introduit les fonctions

~~$f:\mathbb{R}$~~ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^x \frac{ds}{\varphi(s)} \quad \text{et} \quad g(t) = \int_0^t \psi(s)\,ds$$

En integrant $(*)$ on obtient

$$(**) \quad f(x) = g(t) + C.$$

Nous savons que f est strictement croissante, et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, donc f est bijective avec f^{-1} sa reciproque qui $\in C^1$ (car $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \varphi(f^{-1}(x))$ ~~et en plus~~ f^{-1} continue)

Alors $(**)$ est équivalente à

$$(***) \quad x(t) = f^{-1}(g(t)+C) \quad \text{solution globale}$$

En plus $\lim_{t\to\pm\infty} g(t)$ ~~est~~ sont finies et differentes (On peut noter $g_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} g(t) \in \mathbb{R}$)

~~lim~~

$g_- < g_+$

Ceci donne

$$\lim_{x \to \pm\infty} x(t) = f^{-1}(g_\pm + c)$$

b) On pose $f_+ = \int_0^\infty \frac{dy}{\varphi(y)} = \lim_{x\to\infty} f(x)$ et $f_- = -\int_{-\infty}^0 \frac{dy}{\varphi(y)} = \lim_{x \to -\infty} f(x)$

Ici on a que f est bijective de $\mathbb{R}$ en $]f_-, f_+[$

On a aussi : $f_+ - f_- \geq g_+ - g_-$

b1) Si on prends une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$]g_- + c, g_+ + c[\subset]f_-, f_+[$

alors la solution donnée par (...) est globale

$\Leftrightarrow$ $c + g_- \geq f_-$ et $c + g_+ \leq f_+$

(il suffit de prendre $f_- - g_- \leq c \leq f_+ - g_+$: possible car $f_- - g_- < f_+ - g_+$)

On a une infinité de possibilités pour c.

b2) On peut prendre c telle que (par exemple)

$$\begin{cases} g_+ + c > f_+ \\ \text{et} \\ g_- + c > f_- \end{cases}$$

donc prendre $c > \max\{f_+ - g_+, f_- - g_-\}$ (il y a une infinité de possibilités)

Alors $g(t) + c \in]f_-, f_+[\Leftrightarrow$

$g(t) \in]f_- - c, f_+ - c[\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} g(t) > f_- - c \quad \text{vrai } \forall t \in \mathbb{R} \text{ car } f_- - c < g_- \\ \text{et} \\ g(t) < f_+ - c \quad \text{vrai } \forall t \in]-\infty, T[\end{cases}$$

avec $g(T) = f_+ - c$

Donc ici $I =]-\infty, T[$

avec T l'unique solution de $g(T) = f_+ - c$

c) Ici on est dans le cas a) : solutions globales possédant 2 asympt. horizontales distinctes

$\varphi(x) = (x^2+1)^{1/3}$; $\psi(t) = \frac{1}{(t^4+1)^{1/3}}$

Complément

Équation avec homogénéité

$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$ On pose ~~$y = tu$~~ $y(t) = t\,u(t)$

$y' = u + t u'$

donc

$u + t u' = f(u) \iff t u' = f(u) - u \iff$ variables séparées

$\cancel{u' = f} \quad \frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{t}$

Exemple : $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$ avec $f(u) = u^2 + u - 1$

Alors $\begin{cases} y' = \left(\frac{y}{t}\right)^2 + \frac{y}{t} - 1 \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff$

$t u' = u^2 + u - 1 - u$ $\boxed{u \equiv \pm 1 \text{ sont des solutions}}$

$t u' = u^2 - 1 \iff$

$\frac{1}{u^2-1} = \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\frac{1}{2}$

$\frac{u'}{u^2-1} = \frac{1}{t}$.

$\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) u' = \frac{2}{t} \iff$

$\log|u-1| - \log|u+1| = 2\log|t| + c \implies$

$\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = c + 2\log|t|$

$\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = e^c t^2 = k t^2$ avec $k = e^c > 0$

~~si $u \in]-1,1[$; $]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$~~

Ceci donne

si $u \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$:

$\frac{u-1}{u+1} = k t^2$

$u - 1 = (u+1) k t^2$

$u(1 - k t^2) = 1 + k t^2$

$u = \frac{1 + k t^2}{1 - k t^2}$

faire $u(1) = 0$

$\frac{0-1}{0+1} = k \implies k = -1$

$\frac{u-1}{u+1} = -t^2$

$u - 1 = -t^2 u - t^2$

$u(1 + t^2) = 1 - t^2$

$u = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

faire l'étude : ~~si $k < 0$~~ $k > 0$ il faut prendre l'intervalle pour t t.q. $\frac{1 + k t^2}{1 - k t^2} \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$ (en fonction aussi de k)

si $u \in]-1,1[$: $\frac{1-u}{u+1} = k t^2 \iff$

$1 - u = (u+1) k t^2$

$u(1 + k t^2) = 1 - k t^2$

$u = \frac{1 - k t^2}{1 + k t^2}$

prendre l'intervalle pour t t.q. $\frac{1 - k t^2}{1 + k t^2} \in]-1,1[$ (en fonct de k)

donc

1) $\frac{u-1}{u+1} = kt^2$ ou 2) $\frac{u-1}{u+1} = -kt^2$

La solution 1) donne

$u-1 = kt^2(u+1) \iff u(1-kt^2) = 1+kt^2$ donc

$u(t) = \frac{1+kt^2}{1-kt^2}$ ~~définie sur~~

Ceci donne

$$\boxed{y(t) = \frac{t(1+kt^2)}{1-kt^2}}$$ avec $k>0$ définie sur $]-\infty, -\sqrt{\tfrac{1}{k}}[$ $\cup$ $]-\sqrt{\tfrac{1}{k}}, \sqrt{\tfrac{1}{k}}[$ ou $]\sqrt{\tfrac{1}{k}}, +\infty[$

non globales

La solution 2) donne

$u-1 = -kt^2(u+1) \iff u(1+kt^2) = 1-kt^2$ donc

$u(t) = \frac{1-kt^2}{1+kt^2}$

Ceci donne

$$y(t) = \frac{t(1-kt^2)}{1+kt^2}$$ avec $k>0$ définie sur $\mathbb{R}$ (solution globale)

Il y a aussi les solutions globales $u=1$ donc $y(t)=t$, $u=-1$ donc $y(t)=-t$

Exo 3 b)

$y \equiv 0$ ou $y=1$ sont 2 solutions évidentes globales

si $y \neq 0$ ~~et~~ $y \neq 1$

$$(*1) \quad \frac{y'}{y(y-1)} = \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

Calculer $\int \frac{dx}{x(x-1)}$

donc $\int \frac{dx}{x(x-1)} = \log|x-1| - \log|x| = \log\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)$ donc

De $(*1) \Rightarrow \log\left(\left|\frac{y-1}{y}\right|\right) = -\frac{1}{t} + c$

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = \underbrace{e^c}_{=k>0} \cdot e^{-\frac{1}{t}} = k e^{-\frac{1}{t}}$$ avec $k>0$

Alors

1) $\frac{y-1}{y} = k e^{-\frac{1}{t}}$ ou 2) $\frac{y-1}{y} = -k e^{-\frac{1}{t}}$

Solution 1)

$y-1 = y k e^{-\frac{1}{t}}$ donc

$y(t) = \cancel{(1-ke^{-\frac{1}{t}})} \quad \dfrac{1}{1-ke^{-\frac{1}{t}}}$

définie sur $]-\infty, \frac{1}{\log k}[$ ou $]\frac{1}{\log k}, +\infty[$

Solution 2)

$y-1 = -y e^{-\frac{1}{k}}$ donc

$y(t) = \dfrac{1}{1+ke^{-\frac{1}{t}}}$ solution globale

Si on veut en plus $y(1)=3$

On essaie : $\dfrac{1}{1+ke^{-1}} = 3 \iff 1 = \underbrace{3+3ke^{-1}}_{>3}$ impossible

$\dfrac{1}{1-ke^{-1}} = 3 \iff 1 = 3-3ke^{-1} \Rightarrow$

$\frac{3}{e}k = 2$ donc $k = \frac{2e}{3}$

La solution satisfaisant en plus $y(1) = 3$ est

$y(t) = \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}e^{1-\frac{1}{t}}}$ définie sur $]-\infty, \frac{1}{\log(\frac{2e}{3})}[$

car $\dfrac{1}{\log(\frac{2e}{3})} > 1$

$\cancel{]\frac{1}{\log(\frac{2e}{3})}, +\infty[}$

Exo 3c)

$y = 0$ est une solution évidente

si $y \neq 0$ $\quad \dfrac{y'}{y} = \dfrac{t^3+2}{t^2+1}$; On a : $\dfrac{t^3+2}{t^2+1} = \dfrac{t^3+t-t+2}{t^2+1}$

$= t - \dfrac{t}{t^2+1} + \dfrac{2}{t^2+1}$

On intègre

$\log(|y|) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\log(t^2+1) + 2\,\mathrm{arctg}(t^2+1) + C \quad , C\in\mathbb{R}$

Alors

$|y| = \underbrace{e^C}_{=k>0} \exp\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\log(t^2+1) + 2\,\mathrm{arctg}(t^2+1)\right)$ donc

$\lambda = \pm C$, $\lambda \neq 0$ $\quad y = \lambda e^{\frac{t^2}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} e^{2\,\mathrm{arctg}(t^2+1)}$; prendre $\lambda \in \mathbb{R}$ inclure aussi $y \equiv 0$

solutions globales