Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des Mathématiques I
Semestre d'automne 2019-2020

Seconde Chance (1 h)

Jeudi 16 janvier 2020

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $f(x) = 3x + 4$, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer le point fixe u de f, c'est-à-dire la solution de l'équation $f(u) = u$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_n = u_n - u$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le terme général.
3. En déduire le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution.

1. $u = f(u) = 3u + 4$ implique $2u + 4 = 0$ et $u = -2$.
2. (a) $v_0 = u_0 - u = 7 - (-2) = 9$.
   (b) $v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = (3u_n + 4) + 2 = 3(v_n - 2) + 6 = 3v_n$.
   (c) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de rapport 3. Ainsi $v_n = v_0 \cdot 3^n = 9 \cdot 3^n = 3^{n+2}$.
3. Donc $u_n = v_n + u = v_n - 2 = 3^{n+2} - 2$.

Exercice 2. Calculer $pgcd(A, B)$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$ définis par

$$A = X^3 + 2X^2 - 2X + 3 \quad \text{et} \quad B = X^5 + 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 3.$$

Solution. On applique l'alorithme d'Euclide.

$$\begin{array}{r|l}
X^5+2X^4-2X^3+2X^2-2X+3 & X^3+2X^2-2X+3 \\ \cline{2-2}
X^5+2X^4-2X^3+3X^2 & X^2 \\
-X^2 \;\; -X+3 &
\end{array}$$

Le premier reste (sous forme unitaire) est donc $X^2 + 2X - 3$.

$$\begin{array}{r|l}
X^3+2X^2-2X+3 & X^2+2X-3 \\ \cline{2-2}
X^3+2X^2-3X & X \\
X+3 &
\end{array}$$

Le deuxième reste (sous forme unitaire) est donc $X + 3$.

$$\begin{array}{r|l}
X^2+2X-3 & X+3 \\ \cline{2-2}
X^2+3X & X-1 \\
-X-3 & \\
-X-3 & \\
0 &
\end{array}$$

Puisque le troisième reste est 0, on a $\text{pgcd}(A, B) = X + 3$.

Alternative. On devine $A(-3) = 27-2\cdot 9-2^c dot 3-3 = 0$. Ainsi $X+3$ divise A. On divise :

$$X^3+2X^2-2X+3 = (X+3)(X^2-X+1).$$

Or, les racines de X^2-X+1 sont les racines primitives sixièmes de l'unité, où j est une racine primitive troisième de l'unité. Ainsi

$$B = (X+3)(X+j)(X+j^2).$$

On évalue B aux points -3 et $-j$. On a $B(-3) = -243+2\cdot 81+2\cdot 27+2\cdot 9+2\cdot 3+3 = 0$ et

$$B(j) = -j^2+2j+2+2j^2+2j+3 = j^2+4j+5 = (-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})+4(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+5 \neq 0.$$

Alors $B(j^2) = B(\bar{j}) = \overline{B(j)} \neq 0$. Ainsi le seul facteur irréductible de A qui divise B est $X+3$, et $\text{pgcd}(A,B) = X+3$.

Exercice 3. Considérons l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln\frac{1}{x}$.

1. Justifier que cette application est dérivable sur son domaine de définition, et calculer f' sur ce domaine.
2. Rappeler le théoréme des accroissements finis.
3. Fixons $x > 0$.
   (a) Utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{c}$.
   (b) En déduire que $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln\dfrac{x+1}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.
4. En déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{x+1}{x}$.

Solution.

1. Pour $r \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^r$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est derivable avec dérivée $x \mapsto rx^{r-1}$ (ici on a $r = -1$), et la fonction $x \mapsto \ln x$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable avec dérivée $x \mapsto 1/x$. Ainsi leur composition f est dérivable, avec $f'(x) = \frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}$.

   Alternative. $f(x) = \ln\frac{1}{x} = -\ln x$, donc $f'(x) = -\frac{1}{x}$.
2. Théorème des accroissements finis (TAF) : Soit $a < b =$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il y a $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
3. f est derivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc continu sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$. D'après le TAF il y a donc $c \in]x,x+1[$ tel que

$$-\frac{1}{c} = f'(c) = \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = f(x+1)-f(x) = \ln\frac{1}{x+1} - \ln\frac{1}{x} = -\ln\frac{x+1}{x}.$$

   Ainsi $\ln\frac{x+1}{x} = \frac{1}{c}$.
4. On a $x < c < x+1$, donc $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} = \ln\frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$.
5. Ainsi $\frac{x}{x+1} < x\ln\frac{x+1}{x} < 1$ puisque $x > 0$. Or,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x} = 1.$$

   D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x} = 1$.

Exercice 4. (bonus) Résoudre $z^2-(3+2i)z+(5+5i)=0$ dans $\mathbb{C}$.

Solution. Le discriminant vaut

$$\Delta=(3+2i)^2-4(5+5i)=9-4+12i-20-20i=-15-8i.$$

On pose $\Delta=\delta^2$ avec $\delta=a+ib$. Alors

$$a^2-b^2=\mathrm{Re}\Delta=-15, \qquad 2ab=\mathrm{Im}\Delta=-8, \qquad a^2+b^2=|\Delta|=\sqrt{(-15)^2+(-8)^2}=\sqrt{289}=17.$$

Ainsi $2a^2=2$ et $a=\pm 1$. Donc $b=\frac{-8}{2a}=\mp 4$, et $\delta=\pm(1-4i)$.

Les deux solutions sont alors

$$z_1=\frac{3+2i+\delta}{2}=\frac{3+2i+1-4i}{2}=2-i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{3+2i-\delta}{2}=\frac{3+2i-(1-4i)}{2}=1+3i.$$