Université Claude Bernard Lyon 1 UE Fondamentaux des mathématiques 1
Semestre d'automne 2016

Examan final (3h)
Mardi 10 janvier 2017

Exercice 1. 30 minutes

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés.

1. Montrer que
$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} e^{ip\theta} = \frac{e^{i\theta} - t^n e^{i(n+1)\theta}}{1 - te^{i\theta}}$$
2. Montrer que $(1 - te^{i\theta})(1 - te^{-i\theta}) = t^2 - 2t\cos(\theta) + 1$.
3. On pose : $S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \sin(p\theta)$. Déduire de ce qui précède que
$$S_n(t) = \frac{\sin(\theta) - t^n \sin\big((n+1)\theta\big) + t^{n+1}\sin(n\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}$$
4. Quelle est la limite de $t^n \sin(n\theta)$ quand $n \to +\infty$?
5. En déduire la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(t)$$

Correction exercice 1.

1.
$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} e^{ip\theta} = \sum_{p=0}^{n-1} t^{p} e^{i(p+1)\theta} = e^{i\theta}\sum_{p=0}^{n-1} t^{p} e^{ip\theta} = e^{i\theta}\sum_{p=0}^{n-1} \left(te^{i\theta}\right)^p$$
$$\left|te^{i\theta}\right| = t < 1$$
Donc $te^{i\theta} \neq 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1[$. Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométriques
$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} e^{ip\theta} = e^{i\theta}\sum_{p=0}^{n-1} \left(te^{i\theta}\right)^p = e^{i\theta}\frac{1 - \left(te^{i\theta}\right)^n}{1 - te^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta} - t^n e^{i(n+1)\theta}}{1 - te^{i\theta}}$$
2.
$$\begin{aligned}(1 - te^{i\theta})(1 - te^{-i\theta}) &= 1 - te^{i\theta} - te^{-i\theta} + te^{i\theta}te^{-i\theta} = 1 - t\left(te^{i\theta} + te^{-i\theta}\right) + t^2 \\ &= t^2 - 2t\cos(\theta) + 1\end{aligned}$$
Avec les formules d'Euler.
3.
$$S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\sin(p\theta) = Im\left(\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} e^{ip\theta}\right) = Im\left(\frac{e^{i\theta} - t^n e^{i(n+1)\theta}}{1 - te^{i\theta}}\right)$$
On met alors ce nombre complexe sous forme algébrique
$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta} - t^n e^{i(n+1)\theta}}{1 - te^{i\theta}} &= \frac{\left(e^{i\theta} - t^n e^{i(n+1)\theta}\right)\left(1 - te^{-i\theta}\right)}{(1 - te^{i\theta})(1 - te^{-i\theta})} = \frac{e^{i\theta} - t - t^n e^{i(n+1)\theta} + t^{n+1} e^{in\theta}}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1} \\ &= \frac{\sin(\theta) - t - t^n\big(\cos\big((n+1)\theta\big) + i\sin\big((n+1)\theta\big)\big) + t^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}\end{aligned}$$
Donc
$$S_n(t) = \frac{\sin(\theta) - t^n \sin\big((n+1)\theta\big) + t^{n+1}\sin(n\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}$$
4. $|t^n \sin(n\theta)| < t^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(t) = \lim_{n\to+\infty} t^n \sin(n\theta) = 0$$

5. On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(t) = \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}$$

Exercice 2. 15 minutes

Soit A un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 5 tel que le reste de sa division euclidienne par $(X+1)^3$ est -5 et le reste de sa division euclidienne par $(X-1)^3$ est 11.

1. Montrer que $A+5$ admet -1 comme racine triple.
2. Montrer que $A-11$ admet 1 comme racine triple.
3. En déduire que -1 et 1 sont racines doubles de A', le polynôme dérivée de A
4. En déduire que A' s'écrit sous la forme $A' = a(X^4 - 2X^2 + 1)$, où $a \in \mathbb{R}$.
5. Montrer qu'alors que A s'écrit sous la forme $A = a\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{2}{3}X^3 + X\right) + b$, où $b \in \mathbb{R}$.
6. Calculer a et b et en déduire le polynôme A.

Correction exercice 2.

1. Il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = (X+1)^3 Q_1 - 5$ donc $A + 5 = (X+1)^3 Q_1$, ce qui montre que -1 est une racine triple de $A+5$.
2. Il existe $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = (X+1)^3 Q_2 + 11$ donc $A - 11 = (X-1)^3 Q_2$, ce qui montre que 1 est une racine triple de $A - 11$.
3. On dérive les deux égalités :
$$\begin{cases} A+5 = (X+1)^3 Q_1 \\ A - 11 = (X-1)^3 Q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = 3(X+1)^2 Q_1 + (X+1)^3 Q_1' = (X+1)^2(3Q_1 + (X+1)Q_1') \\ A' = 3(X-1)^2 Q_2 + (X-1)^3 Q_2' = (X-1)^2(3Q_2 + (X-1)Q_2') \end{cases}$$ et que

   Ce qui montre que -1 est une racine double de A' et que 1 est une racine double de A'.

   On peut mettre $(X+1)^2(X-1)^2 = \left((X+1)(X-1)\right)^2 = (X^2-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ en facteur dans A', comme $d°A' = 4$, il existe une constante réelle a telle que
$$A' = a(X^4 - 2X^2 + 1)$$
4. Il suffit de constater que les primitives de $a(X^4 - 2X^2 + 1)$ sont de la forme
$$A = a\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{2}{3}X^3 + X\right) + b$$
5. D'après la première question $A(-1) = -5$ et la seconde $A(1) = 11$
$$\begin{cases} A(-1) = -5 \\ A(1) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\left(\frac{1}{5}(-1)^5 - \frac{2}{3}(-1)^3 - 1\right) + b = -5 \\ a\left(\frac{1}{5}1^5 - \frac{2}{3}1^3 + 1\right) + b = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1\right) + b = -5 \\ a\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) + b = 11 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} -\frac{8}{15}a + b = -5 \\ \frac{8}{15}a + b = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} -\frac{8}{15}a + b = -5 \\ 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{8}{15}a + b = -5 \\ b = 3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{8}{15}a = -8 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 3 \end{cases}$$
$$A = 15\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{2}{3}X^3 + X\right) + 3 = 3X^5 - 10X^3 + 15X + 3$$

Exercice 3. 30 minutes

1. Soient E et F deux ensembles et h une application de E dans F. On considère deux sous-ensembles quelconques $A, B \subset E$.
   a. Montrer que si $A \subset B$ alors $h(A) \subset h(B)$.

b. Montrer que $h(A \cap B) \subset h(A) \cap h(B)$.
c. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que l'inclusion précédente peut être stricte, c'est-à-dire que l'on n'a pas forcément égalité

2.
a. Soit φ une application continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On rappelle que <u>sous cette hypothèse de continuité</u>, on a l'équivalence

$$\varphi \text{ est injective} \Leftrightarrow \varphi \text{ est strictement monotone}$$

i. Montrer, que si $\varphi \circ \varphi$ est injective, alors φ est injective (Indication : on pourra montrer la contraposée).
ii. Montrer que si φ est monotone alors $\varphi \circ \varphi$ est nécessairement croissante.
iii. Montrer que $\varphi \circ \varphi$ ne peut être strictement décroissante (Indication : on pourra le montrer par l'absurde).

b. Soit $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) > 0$.
L'application φ est-elle nécessairement injective (justifier votre réponse) ? Est-elle nécessairement surjective (justifier votre réponse) ?

Correction exercice 3.

1.
a. Soit $y \in h(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = h(x)$, comme $A \subset B$, $x \in B$ donc $y = h(x) \in h(B)$, cela montre que $h(A) \subset h(B)$.
b. Soit $y \in h(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ (donc $x \in A$ et $x \in B$) tel que $y = h(x)$. Comme $x \in A$, $y \in h(A)$ et comme $x \in B$, $y \in h(B)$, ce qui montre que $y \in h(A) \cap h(B)$
c. Soit $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2$, $A = [-2,1]$ et $B = [-1,3]$

$$h(A) = [0,4] \text{ et } h(B) = [0,9] \text{ entraine que } h(A) \cap h(B) = [0,4]$$

$$A \cap B = [-1,1] \text{ entraine que } h(A \cap B) = [0,1]$$

On a $h(A \cap B)$ est strictement inclus dans $h(A) \cap h(B)$.

2.
a.
i. La contraposée de « $\varphi \circ \varphi$ est injective entraine φ est injective » est « φ n'est pas injective entraine $\varphi \circ \varphi$ n'est pas injective »
On suppose que φ n'est pas injective, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels $x \neq y$ et $\varphi(x) = \varphi(y)$, donc $\varphi \circ \varphi(x) = \varphi \circ \varphi(y)$, par conséquent $\varphi \circ \varphi$ n'est pas injective.
ii. Supposons d'abord que φ soit croissante

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) \Rightarrow \varphi(\varphi(x)) \leq \varphi(\varphi(y))$$

La dernière implication vient du fait que φ est croissante.
Par conséquent φ^2 est croissante.
Supposons que φ soit décroissante

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y) \Rightarrow \varphi(\varphi(x)) \leq \varphi(\varphi(y))$$

La dernière implication vient du fait que φ est décroissante.
Par conséquent $\varphi \circ \varphi$ est croissante.
On a montré que si φ est monotone alors $\varphi \circ \varphi$ est nécessairement croissante.
iii. $\varphi \circ \varphi$ est strictement décroissante, donc $\varphi \circ \varphi$ est strictement monotone, donc φ est injective d'après i. et d'après 2. $\varphi \circ \varphi$ est croissante, ce qui est impossible.

b. Si la dérivée d'une fonction est strictement positive sur un intervalle, cette fonction est strictement croissante sur cet intervalle, donc ici, φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'après le rappel, elle est injective.
Non, par exemple la fonction th: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Vérifie $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1,1[$, donc les réels inférieurs à -1 ou supérieur à 1 n'ont pas d'antécédent et pourtant sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$$

Exercice 4. 15 minutes

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

$$2520x - 3960y = 6480$$

Correction exercice 4.

Il faut d'abord simplifier au maximum

$$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \quad \text{et} \quad 3960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

Après quelques calculs élémentaires, puis

$$2520 = 360 \times 7 \quad \text{et} \quad 3960 = 360 \times 11$$

Et enfin $6480 = 360 \times 18$.

L'équation $2520x - 3960y = 6480$ équivaut à $7x - 11y = 18$

Elle admet une solution évidente $(x_0, y_0) = (1, -1)$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 7x - 11y = 18 \\ 7 \times 1 - 11 \times (-1) = 18 \end{cases}$$

$$L_1 - L_2 \ : 7(x-1) - 11(y+1) = 0$$

$$7(x-1) - 11(y+1) = 0 \Leftrightarrow 7(x-1) = 11(y+1) \ \ (*)$$

7 divise $11(y+1)$ et 7 est premier avec 11, d'après le théorème de Gauss 7 divise $y+1$, par conséquent il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y + 1 = 7k \ \ (**)$, ou encore $y = -1 + 7k$. On remplace $(**)$ dans $(*)$, $7(x-1) = 11 \times 7k$, ce qui entraine que $x = 1 + 11k$.

La réciproque est évidente donc l'ensemble des solutions est

$$\{(1 + 11k, -1 + 7k), k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 5. 20 minutes

On considère une fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)| < 1$$

On définit $k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)|$.

1. Supposons qu'il existe $c, c' \in \mathbb{R}$ tel que $g(c) = c$ et $g(c') = c'$.
   a. Montrer que $|g(c) - g(c')| \leq k|c - c'|$
   b. En déduire que $c = c'$.
2. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence suivante :
$$\begin{cases} x_0 \ \text{ donné dans } \mathbb{R} \\ x_{n+1} = g(x_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$.
   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|$.
   c. Montrer que pour tout $m \geq n \geq 0$: $|x_m - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.
   d. On admet que cela entraine que la suite converge vers un réel l. Montrer que $g(l) = l$ et qu'il n'existe aucun autre réel l' tel que $g(l') = l'$.

Correction exercice 5.

1.

a. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction g entre c et c'. g vérifie toutes les hypothèses ici. Il existe $d \in]c, c'[$ ou $]c', c[$ selon que c est plus grand ou plus petit que c'.

$$g(c) - g(c') = g'(d)(c - c') \Rightarrow |g(c) - g(c')| = |g'(d)||c - c'| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|g'(x)|\,|c - c'|$$
$$= k|c - c'|$$

b. Comme $g(c) = c$ et $g(c') = c'$, l'inégalité du a. donne

$$|c - c'| \leq k|c - c'| < |c - c'|$$

Ce qui n'est pas possible, donc l'hypothèse il existe $c, c' \in \mathbb{R}$ tel que $g(c) = c$ et $g(c') = c'$ est fausse, s'il y a un point fixe, il est unique.

2.

a. Comme dans la question précédente, on applique le théorème des accroissements finis entre x_{n-1} et x_n et on majore le sup de la dérivée par k.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}|$$

b. Par récurrence. Pour $n = 0$, (l'énoncé dit $n = 1$, mais comme cela marche dès $n = 0$, on va faire ainsi) $|x_1 - x_0| \leq k^0|x_1 - x_0|$ est vraie.

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$$

D'après a.. Puis en utilisant l'inégalité au rang n :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq kk^n|x_1 - x_0| = k^{n+1}|x_1 - x_0|$$

Ce qui achève la récurrence.

c.

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_{n+2} - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n| = \left|\sum_{i=n}^{m-1}(x_{i+1} - x_i)\right|$$
$$\leq \sum_{i=n}^{m-1}|x_{i+1} - x_i| \leq \sum_{i=n}^{m-1} k^i|x_1 - x_0| = |x_1 - x_0|k^n \sum_{i=n}^{m-1} k^{i-n}$$
$$= |x_1 - x_0|k^n \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i = |x_1 - x_0|k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1 - k} \leq \frac{k^n}{1 - k}|x_1 - x_0|$$

On admet que alors la suite (x_n) converge vers une limite l, comme pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} = g(x_n)$
En faisant tendre n vers l'infini

$$l = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(l)$$

Car g est continue. Puis d'après la question 1. c'est le seul.

Exercice 6. 30 minutes

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cette question est de montrer rigoureusement que cette suite diverge.
   a. Rappeler l'expression de $\cos(a + b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
   b. Montrer que pour tout n, $\cos(n + 1) - \cos(n - 1) = -2\sin(n)\ \sin(1)$. En déduire que si la suite (u_n) converge, alors la suite $(\sin(n))$ tend vers 0.
   c. En développant $\cos(n + 1)$, montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers 0.
   d. Conclure, à l'aide de la formule $\cos^2\ + \sin^2\ = 1$ que la suite (u_n) diverge.
2. Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et (w_n) la suite définie par w_0, donné, et $w_{n+1} = aw_n + b$ pour tout $n \geq 0$.
   a. Donner une expression du terme général de w_n dans le cas où $a = 1$, puis dans le cas où $b = 0$.
   b. On suppose que $a \neq 1$. Montrer par récurrence que :
   $$w_n = a^n\left(w_0 - \frac{b}{1 - a}\right) + \frac{b}{1 - a}$$
   c. Pour quelles valeurs de a, b et w_0 la suite (w_n) converge-t-elle ? Préciser dans ce cas, la limite.

Correction exercice 6.

1.

a. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\cos(n+1) - \cos(n-1) &= \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1) - (\cos(n)\cos(1) + \sin(n)\sin(1)) \\ &= -2\sin(n)\ \sin(1)\end{aligned}$$

Si la suite converge vers l alors $\cos(n+1)$ tend vers l et $\cos(n-1)$ aussi. Comme $\sin(1) \neq 0$ et que

$$\sin(n) = -\frac{1}{2}\frac{\cos(n+1) - \cos(n-1)}{\sin(1)} \to 0$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$$

On fait tendre n vers l'infini,

$$l = l\cos(1)$$

Puisque $\cos(1) \neq 0$, on a $l = 0$.

d. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$, on fait tendre n vers l'infini, cela donne $0 + 0 = 1$, ce qui est faux, par conséquent $(\cos(n))$ ne converge pas.

2.

a. Si $a = 1$ alors $w_{n+1} = w_n + b$, il s'agit d'une suite arithmétique de raison b alors $w_n = w_0 + nb$
Si $b = 0$ alors $w_n = aw_n$, il s'agit d'une suite géométrique de raison a alors $w_n = a^n w_0$.

b. Pour $n = 0$

$$a^0\left(w_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = \left(w_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = w_0$$

C'est bon

$$\begin{aligned}w_{n+1} = aw_n + b = a\left(a^n\left(w_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}\right) + b &= a^{n+1}\left(w_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{ab}{1-a} + b \\ = a^{n+1}\left(w_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{ab + b - ab}{1-a} &= a^{n+1}\left(w_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

c. Pour $|a| < 1$, w_0 et b quelconques.

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{b}{1-a}$$

Pour $w_0 = \frac{b}{1-a}$, a quelconque et $a \neq 1$, b quelconque

$$w_n = \frac{b}{1-a} \to \frac{b}{1-a}$$

Exercice 7. 40 minutes

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

1. Montrer que $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\lim_{x\to 0} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$. En déduire que f se prolonge par continuité en 0, par une valeur à préciser.
3.
   a. Montrer que $\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$
   b. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
4. Calculer $\lim_{x\to(-1)^-} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
5.

a. Montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \qquad f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) f(x)$$

b. Etudier les variations de la fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathcal{D}_f$ par :

$$g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

c. En déduire le signe de f' et les variations de f.

d. Calculer

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

e. Dessiner un graphe assez précis de f.

Correction exercice 7.

1.

$$f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

Il faut donc, pour que f soit définie il faut que $\frac{x+1}{x} > 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ -1 $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$x+1$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\qquad$ $+$
x	$-$ $\qquad$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$\frac{x+1}{x}$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad \| \quad$ $+$

Par conséquent

$$\frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[= \mathcal{D}_f$$

2.

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x\ln(x+1) - x\ln(x)$$

$$x\ln(x+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

La première limite n'est pas indéterminée, la seconde l'est, mais par croissance comparée elle vaut 0. D'où

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

On pose alors $f(0) = 1$

3.

a. On pose $g(y) = \ln(1+y)$, donc $g'(y) = \frac{1}{1+y}$

$$\frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{\ln(1+y) - \ln(1+0)}{y-0} = \frac{g(y)-g(0)}{y-0} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} g'(0) = 1$$

b. On pose $x = \frac{1}{y}$ ou $y = \frac{1}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$

Alors

$$f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)} = e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} e^1 = e$$

4.

$$\lim_{x\to -1^-} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\infty$$

Vérifier sur le tableau de signe que $\frac{x+1}{x}$ est bien positif pour $x < -1$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0,\ \text{ toujours parce que } \frac{x+1}{x} > 0 \text{ pour } x \to -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to 0} e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)} = 1$$

5.

a. $f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$$f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \times \frac{x}{x+1}\right) f(x)$$

$$= \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) f(x)$$

b. On pose $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, partout où g est définie

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

Par conséquent,
Si $x < -1$ alors $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante et si $x > 0$ alors $g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissante.

c. $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = 0$$

Donc si $x < -1$ alors $g(x) > 0$ et si $x > 0$ alors $g(x) > 0$.
Sur chacun des intervalles $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty, -1[$ et f est croissante sur $]0, +\infty[$.

d.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) f(x) = +\infty$$

e.