Université Claude-Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des Mathématiques I
Semestre d'automne 2016-2017

Examen final (3 h)

Mardi 10 janvier 2017

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM** ainsi que le **NOM DE VOTRE CHARGÉ DE COURS** (M. Attal, M. Masnou ou M. Pujo-Menjouet). **TOUTE INFORMATION MANQUANTE SERA SANCTIONNÉE PAR 1 POINT EN MOINS.**
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.
L'usage des téléphones est prohibé.
La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 7 exercices.

Exercice 1. *30 minutes*
Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\, e^{ip\theta} = \frac{e^{i\theta} - t^n\, e^{i(n+1)\theta}}{1 - t\, e^{i\theta}}$.
2. Montrer que $\left(1 - t\, e^{i\theta}\right)\left(1 - t\, e^{-i\theta}\right) = t^2 - 2t\cos(\theta) + 1$.
3. On pose $S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \sin(p\theta)$. Déduire de ce qui précède que
$$S_n(t) = \frac{\sin(\theta) - t^n \sin\left((n+1)\theta\right) + t^{n+1} \sin(n\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}.$$
4. Quelle est la limite de $t^n \sin(n\theta)$ quand n tend vers $+\infty$?
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(t)$.

Exercice 2. *15 minutes*
Soit A un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 5 tel que le reste dans sa division par $(X+1)^3$ est -5 et le reste dans sa division par $(X-1)^3$ est 11.

1. Montrer que $A+5$ admet -1 comme racine triple.
2. Montrer que $A-11$ admet 1 comme racine triple.
3. En déduire que -1 et 1 sont racines doubles de A', le polynôme dérivée de A.
4. En déduire que A' s'écrit sous la forme $A' = a(X^4 - 2X^2 + 1)$, où $a \in \mathbb{R}$.
5. Montrer qu'alors A s'écrit sous la forme $A = a(\frac{1}{5}X^5 - \frac{2}{3}X^3 + X) + b$, où $b \in \mathbb{R}$.
6. Calculer a et b, et en déduire le polynôme A.

Exercice 3. *30 minutes*

1. Soient E et F deux ensembles et h une application de E dans F. On considère deux sous-ensembles quelconques $A, B \subset E$.
   (a) Montrer que si $A \subset B$ alors $h(A) \subset h(B)$.
   (b) Montrer que $h(A \cap B) \subset h(A) \cap h(B)$.
   (c) Montrer à l'aide d'un contre-exemple que l'inclusion précédente peut être stricte, c'est-à-dire qu'on n'a pas nécessairement égalité.
2. (a) Soit φ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que, sous cette hypothèse de continuité, on a l'équivalence :

$$\varphi \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \text{ est strictement monotone}$$

   i. Montrer que, si $\varphi \circ \varphi$ est injective, alors φ est injective (*Indication : on pourra prouver la contraposée*).
   ii. Montrer que si φ est monotone alors $\varphi \circ \varphi$ est nécessairement croissante.
   iii. Montrer que $\varphi \circ \varphi$ ne peut pas être strictement décroissante (*Indication : on pourra raisonner par l'absurde*).

   (b) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) > 0$. L'application φ est-elle nécessairement injective (justifiez votre réponse)? Est-elle nécessairement surjective (justifiez votre réponse)?

Exercice 4. *15 minutes*
Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

$$2520x - 3960y = 6480.$$

Exercice 5. *20 minutes*
On considère une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)| < 1$.

On définit $k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)|$.

1. Supposons qu'il existe $c, c' \in \mathbb{R}$ tels que $g(c) = c$ et $g(c') = c'$.
   (a) Montrer que $|g(c) - g(c')| \leq k|c - c'|$.
   (b) En déduire que $c = c'$.
2. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné dans } \mathbb{R}, \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|$.
   (c) Montrer que, pour tous $m \geq n \geq 0$: $|x_m - x_n| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.
   (d) On admet que ceci implique que la suite (x_n) converge vers un réel ℓ. Montrer que $g(\ell) = \ell$ et qu'il n'existe aucun autre réel ℓ' tel que $g(\ell') = \ell'$.

Exercice 6. *30 minutes*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cette question est de montrer rigoureusement que la suite (u_n) diverge.
   (a) Rappeler l'expression de $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$.
   (b) Montrer que pour tout n, $\cos(n+1) - \cos(n-1) = -2\sin(n)\sin(1)$. En déduire que si (u_n) converge, alors la suite $(\sin(n))$ tend vers 0.
   (c) En développant $\cos(n+1)$, en déduire que si (u_n) converge, alors elle converge vers 0.
   (d) Conclure à l'aide de la formule $\sin^2 + \cos^2 = 1$ que la suite (u_n) diverge.
2. Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, et (w_n) la suite définie par $w_0 \in \mathbb{R}$ donné et $w_{n+1} = aw_n + b$ pour tout $n \geq 0$.
   (a) Donner l'expression du terme général w_n dans le cas où $a = 1$, puis dans le cas où $b = 0$.
   (b) On suppose que $a \neq 1$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = a^n(w_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}.$$

   (c) Pour quelles valeurs de a, b et w_0 la suite (w_n) converge-t-elle ? Préciser dans ce cas sa limite.

Exercice 7. *40 minutes*

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

1. Montrer que $\mathscr{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$. En déduire que f se prolonge par continuité en 0, par une valeur à préciser.
3. (a) Montrer que $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
5. (a) Montrer que :

   $$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) f(x).$$

   (b) Étudier les variations de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathscr{D}_f$ par

   $$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

   (c) En déduire le signe de f' et les variations de f.

   (d) Calculer $\lim_{x \to 0+} f'(x)$.

   (e) Dessiner un graphe assez précis de f.