Université Claude Bernard, Lyon 1 — Licence Sciences & Technologies
Fondamentaux des mathématiques I — Séquences Maths- Prépa- Info et Eco - Automne 2016

Examen Session 2 (2 heures)
22 juin 2017

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Exercice 1 (10 minutes) (5 points)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. (2.5 points) Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété *"f est strictement croissante"*.
2. (2.5 points) Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété *"f n'est pas strictement croissante"*.

Exercice 2 (30 minutes) (11 points)

Soient f et g définies par

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

1. (3 point - 0.5 chaque) Calculer $f(0)$, $f(4)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$.
2. (3 points - 0.5 point chaque) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.
3. (2 points - 1 point chaque) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
4. (3 points - 0.5 chaque) Pour chacune des applications $g \circ f$ et $f \circ g$, dire si elle est injective, surjective, bijective.

Exercice 3 (40 minutes) (10 points)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = 0$. On suppose que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et dérivable à droite en 0 avec $f'(0) = 0$. On désigne par g l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x) = & f(x)/x, \quad \text{pour tout } \ x > 0, \\ g(0) = & 0. \end{cases}$$

1. (a) (1 point) Justifier que g est continue sur $]0, +\infty[$.
   (b) (1 point) En observant que pour tout $x > 0$, $g(x) = (f(x) - f(0))/x$, déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.
   (c) (1 point) En déduire que g est continue sur $[0, +\infty[$.
2. (2 points - 1 et 1) Expliquer pourquoi g est dérivable sur $]0, +\infty[$. Montrer ensuite que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}.$$

3. (5 points) On suppose désormais que f' est croissante sur $]0, +\infty[$.
   (a) (1 point) Rappeler le théorème des accroissements finis.
   (b) (1 point) Appliquer ce théorème à f sur l'intervalle $]0, x[$, où $x > 0$ est donné.
   (c) (2 points) Montrer alors qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que $g'(x) = \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x}$.
   (d) (1 point) Que peut-on en déduire pour la croissance de g sur $[0, +\infty[$? (Bonus de 1 point si discussion en 0).

Exercice 4 (20 minutes) (7 points)

On considère des réels a, c, p tels que $a, c, p \in]0, 1[$ et $a^2 + c^2 = 1$. On s'intéresse dans cet exercice aux solutions de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$:

$$(a^2 - x)(1 - x) + pc^2 = 0.$$

1. (1 point) Montrer que le discriminant de cette équation est $\Delta = c^2(c^2 - 4p)$.
2. (2 points) Dans le cas $\Delta > 0$, montrer que les deux solutions réelles λ_1, λ_2 vérifient $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$.
3. (1 point) Dans le cas $\Delta = 0$, montrer que la solution réelle λ vérifie $|\lambda| < 1$.
4. (3 points)Lorsque $\Delta < 0$ on note z et $\overline{z}$ les deux solutions complexes conjuguées de l'équation, avec $z \in \mathbb{C}$.
   (a) (1.5 point) Montrer que $z\overline{z} = a^2 + pc^2$.
   (b) (1.5 point) En déduire que $|z| < 1$.

Exercice 5 (20 minutes) (8 points)

Soient a, b, c trois réels fixés. On considère deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0, v_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = au_n, \quad v_{n+1} = bu_n + cv_n \end{cases}$$

1. (1 point) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n u_0$.
2. (3 points) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = c^n v_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c^k b a^{n-1-k} u_0$.

3. (a) (2.5 points) Déduire de ce qui précède que $v_n = c^n v_0 + b u_0 \dfrac{a^n - c^n}{a - c}$ quand $a \neq c$.

   (b) (1.5 point) Que vaut v_n quand $a = c$?

4. Bonus (+2 points) : discuter de la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivant les valeurs de a, b et c.

Examen Session 2 (2 heures)
22 juin 2017

Corrigé

Exercice 1 (10 minutes)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété *"f est strictement croissante"*.
2. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété *"f n'est pas strictement croissante"*.

Solution.

1. $\forall x\, \forall y\, (x < y \rightarrow f(x) < f(y))$.
2. non $\forall x\, \forall y\, (x < y \rightarrow f(x) < f(y))$ (on pourrait utiliser le symbôle $\neg$ à la place de *non*), ou bien $\exists x\, \exists y\, (x < y$ et $f(x) \geq f(y))$ (on pourrait utiliser $\wedge$ à la place de *et*).

Exercice 2 (30 minutes)

Soient f et g définies par

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

1. Calculer $f(0)$, $f(4)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$.
2. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.
3. Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
4. Pour chacune des applications $g \circ f$ et $f \circ g$, dire si elle est injective, surjective, bijective.

Solution.

1. $f(0) = 0$, $f(4) = 8$, $g(0) = 0$, $g(2) = 1$, $g(3) = 1$.
2. f est injectif (si $2x = 2y$ alors $x = y$), non surjectif (1 n'est pas dans l'image) ni bijectif. g n'est pas injectif ($g(2) = g(3)$) ni bijectif, mais surjectif ($g^{-1}(\{x\}) = \{2x, 2x+1\}$).
3. $$(g \circ f)(n) = n \quad \text{et} \quad (f \circ g)(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n \text{ pair ;} \\ n-1, & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$
4. $g \circ f$ est l'identité, donc injectif, surjectif et bijectif. $f \circ g$ n'est pas injectif (puisque g ne l'est pas) ni surjectif (puisque f ne l'est pas), ni donc bijectif.

Exercice 3 (40 minutes)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = 0$. On suppose que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et dérivable à droite en 0 avec $f'(0) = 0$. On désigne par g l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x) = & f(x)/x, \quad \text{pour tout } \ x > 0, \\ g(0) = & 0. \end{cases}$$

1. (a) Justifier que g est continue sur $]0, +\infty[$.
   (b) En observant que pour tout $x > 0$, $g(x) = (f(x) - f(0))/x$, déterminer $\lim_{x \to 0^+} g(x)$.
   (c) En déduire que g est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Expliquer pourquoi g est dérivable sur $]0, +\infty[$. Montrer ensuite que
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}.$$
3. On suppose désormais que f' est croissante sur $]0, +\infty[$.
   (a) Rappeler le théorème des accroissements finis.
   (b) Appliquer ce théorème à f sur l'intervalle $]0, x[$, où $x > 0$ est donné.
   (c) Montrer alors qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que $g'(x) = \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x}$.
   (d) Que peut-on en déduire pour la croissance de g sur $[0, +\infty[$?

Solution.

1. (a) f et $x \mapsto 1/x$ sont continues sur $]0, \infty[$, et leur produit $g = f(x)/x$ aussi.
   (b)
$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0,$$
   puisque $f(0) = 0$ et f est dérivable à droite avec $f'(0) = 0$.
   (c) Puisque $g(0) = 0 = \lim_{x \to 0^+} g(x)$ et g est continue sur $]0, \infty|$, on a que g est continue sur $[0, \infty[$.
2. Si f et h sont dérivable en x, alors f/h est dérivable en x avec $(f/h)'(x) = \frac{f'(x)h(x) - f(x)h'(x)}{h(x)^2}$. Pour $h(x) = x$ ceci donne que g est dérivable sur $]0, \infty[$ avec
$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}.$$
3. (a) Soient $a < b$ réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et dérivable sur $]a, b[$. Alors il y a $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
   (b) f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. D'après le TAF il existe $c \in]0, x[$ avec
$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = g(x).$$
   (c) On a d'après 2. et 3.b que
$$g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)/x}{x} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f'(c)}{x} = \frac{f'(x) - f'(c)}{x}.$$
   (d) Puisque f' est croissante sur $]0, \infty[$, on a $f'(x) \geq f'(c)$ et $g'(x) \geq 0$. Donc g est croissante sur $[0, \infty[$.

Exercice 4 (20 minutes)

On considère des réels a, c, p tels que $a, c, p \in]0, 1[$ et $a^2 + c^2 = 1$. On s'intéresse dans cet exercice aux solutions de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$:

$$(a^2 - x)(1 - x) + pc^2 = 0.$$

1. Montrer que le discriminant de cette équation est $\Delta = c^2(c^2 - 4p)$.
2. Dans le cas $\Delta > 0$, montrer que les deux solutions réelles λ_1, λ_2 vérifient $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$.
3. Dans le cas $\Delta = 0$, montrer que la solution réelle λ vérifie $|\lambda| < 1$.
4. Lorsque $\Delta < 0$ on note z et $\overline{z}$ les deux solutions complexes conjuguées de l'équation, avec $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que $z\overline{z} = pc^2$.
   (b) En déduire que $|z| < 1$.

Solution. L'équation est $x^2 - (a^2 + 1)x + a^2 + pc^2 = 0$.

1. On a
$$\begin{aligned}\Delta &= (-a^2 - 1)^2 - 4(a^2 + pc^2) = (c^2 - 2)^2 - 4(1 - c^2 + pc^2)\\ &= c^4 - 4c^2 + 4 - 4 + 4c^2 - 4pc^2 = c^2(c^2 - 4p).\end{aligned}$$
2. On a $(a^2 - \lambda_i)(1 - \lambda_i) = -pc^2 < 0$, et un des deux facteurs est strictement négatif, l'autre strictement positif. Puisque $0 < a^2 = 1 - c^2 < 1$ on a $a^2 < \lambda_i < 1$, ce qui implique $|\lambda_i| < 1$.
3. Même raisonnement, avec λ à la place de λ_i.
4. (a) $z\bar{z} =$ terme constant $= a^2 + pc^2$.
   (b) Donc $|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + pc^2 < a^2 + c^2 = 1$, ce qui donne $|z| < 1$.

Exercice 5 (20 minutes)

Soient a, b, c trois réels fixés. On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0, v_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = au_n, \quad v_{n+1} = bu_n + cv_n \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n u_0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = c^n v_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c^k b a^{n-1-k} u_0$.
3. (a) Déduire de ce qui précède que $v_n = c^n v_0 + bu_0 \dfrac{a^n - c^n}{a - c}$ quand $a \neq c$.
   (b) Que vaut v_n quand $a = c$?
4. Bonus : discuter de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs de a, b et c.

Solution.

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation : $u_0 = a^0 u_0$.
   Hérédité : Si $u_n = a^n u_0$, alors $u_{n+1} = au_n = aa^n u_0 = a^{n+1} u_0$.
   Conclusion : Donc $u_n = a^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : $v_1 = bu_0 + cv_0 = c^1 v_0 + \sum_{k=0}^{0} c^k b a^{1-1-k} u_0$.
Hérédité : Si $v_n = c^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c^k b a^{n-1-k} u_0$, alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} = bu_n + cv_n &= ba^n u_0 + c(c^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c^k b a^{n-1-k} u_0) \\ &= c^{n+1} v_0 + c^0 b a^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c^{k+1} b a^{n-1-k} u_0 \\ &= c^{n+1} v_0 + c^0 b a^n u_0 + \sum_{k=1}^{n} c^k b a^{n-k} u_0 = c^{n+1} v_0 + \sum_{k=0}^{n} c^k b a^{n-k} u_0. \end{aligned}$$

Conclusion : Donc $v_n = c^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c^k b a^{n-1-k} u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) D'après la formule pour la somme géométrique, on a pour $a \neq c$ que

$$\begin{aligned} v_n &= c^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c^k b a^{n-1-k} u_0 = c^n v_0 + b a^{n-1} u_0 \sum k = 0^{n-1} (c/a)^k \\ &= c^n v_0 + b a^{n-1} u_0 \frac{1-(c/a)^n}{1-(c/a)} = c^n v_0 + b u_0 \frac{a^n - c^n}{a-c}. \end{aligned}$$

(b) Si $a = c$ on a

$$v_n = c^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c^k b a^{n-1-k} u_0 = c^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b c^{n-1} u_0 = c^n v_0 + n b c^{n-1} u_0.$$

4. Si $|a| < 1$ on a $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Si $a = 1$ la suite $(u_n)_n$ est constante $u_n = u_0$. Si $a = -1$, elle oscillate between u_0 et $-u_0$. Si $[a| > 1$ la suite $(u_n)_n$ diverge sauf pour $u_0 = 0$.
Soit d'abord $a \neq c$. Si $|a|, |c| < 1$, alors la suite $(v_n)_n$ converge vers 0. Si $a = 1$ et $|c| < 1$, elle converge vers $bu_0/(1-c)$. Si $|a| < 1$ et $c = 1$, elle converge vers $v_0 + bu_0/(1-a)$. Sinon, elle ne converge pas, sauf si $u_0 = 0$ et $c \in]-1, 1]$, ou si $u_0 = v_0 = 0$, ou encore si $v_0 = bu_0/(a-c)$ et $a \in]-1, 1]$.
Enfin, soit $a = c$. Si $|c| < 1$ la suite converge vers 0. Si $b = 0$ et $c = 1$ elle est constante $v_n = v_0$. Sinon elle diverge sauf pour $v_0 = u_0 = 0$.