Examen final session 2 (1 h)
Mardi 19 juin 2018

NOM :
PRÉNOM :
CHARGÉ DE COURS :

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM** ainsi que le **NOM DE VOTRE CHARGÉ DE COURS** (M. Masnou, M. Pujo-Menjouet ou M. Wagner).
TOUTE INFORMATION MANQUANTE SERA SANCTIONNÉE PAR 1 POINT EN MOINS.
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.
L'usage des téléphones est prohibé.
La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices. Noter que toutes les questions de chaque exercice peuvent se traiter sans avoir répondu aux précédentes.
Attention : pour l'exercice 1, rédiger directement la réponse sur la feuille, les calculs justificatifs seront **obligatoirement** à préciser sur la copie.

Exercice 1- 7 points - 20 minutes

1. (a) Trouver A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{3}{n^2+3n+2} = \dfrac{A}{n+1} + \dfrac{B}{n+2}$.

   Réponse :

   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{10} \frac{3}{n^2+3n+2}$.

   Réponse :

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$.

   Réponse :

Exercice 2 - (13 points) - 40 minutes

On considère l'application f définie pour tout $x \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

1. Justifier le fait que f est bien définie sur $\mathscr{D}_f$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que $f(x)$ possède une limite quand x tend vers 1 et quand x tend vers -1.
   Indication : on pourra poser $x = 1 + t$ et calculer, en justifiant, $\lim_{t \to 0} f(1+t)$ puis utiliser la question précédente pour conclure.
4. En déduire que f admet un prolongement par continuité en 1 et -1. On note h le prolongement de f défini sur $\mathbb{R}$.
5. L'application h est-elle dérivable en 1 ?
6. On note désormais $\mathscr{D}_+ =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et pour tout $x \in \mathscr{D}_+$ on pose

$$u(x) = \ln \frac{1+x}{|1-x|} - \frac{1}{x}.$$

   (a) Montrer que la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'application $x \mapsto \ln |x|$ est l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

   (b) Montrer que la dérivée u' de u sur $\mathscr{D}_+$ vérifie $u'(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2(1-x^2)}$ pour tout $x \in \mathscr{D}_+$.

   (c) Déterminer la monotonie de u sur $\mathscr{D}_+$.

   (d) Montrer que $u(x) > 0$ pour tout $x \in]1, +\infty[$ et qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $u(x) < 0$ pour tout $x \in]0, \alpha[$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha, 1[$.

   (e) Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}_+$, $f'(x) = 2xu(x)$.

   (f) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathscr{D}_f$.

   (g) BONUS (+1 point) Représenter le graphe de la fonction f ainsi que celui de h.