Feuille 2
Nombres complexes

Exercice 1.

Calculer le module et un argument de

$$z=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$$

Exercice 2.

Soit

$$u=1+i \quad \text{et} \quad v=-1+i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de u et v.
2. Déterminer un argument de u et un argument de v.
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

Exercice 3.

Calculer le module et un argument de

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v=1-i$$

En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

Exercice 4.

1. Déterminer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. (Utiliser la formule de Moivre).
2. En déduire une expression simple de $(1+i)^n+(1-i)^n$.

Exercice 5. Soit $x\in\mathbb{R}$

1. Calculer $\cos(3x)$ (resp. $\sin(3x)$) en fonction de $\cos(x)$ (resp. de $\sin(x)$).
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$

Exercice 6.

Pour rappel : Soient $z\in\mathbb{C}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes ω vérifiant $\omega^n=z$
Ces nombres sont appelés les n racines n-ième de z.

1. Représenter dans le plan complexes $\mathbb{C}$ les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines quatrième de -1.
2. Soit $n\geq 2$ un entier. Déterminer les $n-1$ racines du polynôme complexe $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$.

Exercice 7.

1. Quelles sont les racines du polynôme $1-X^5=0$.
2. Factoriser le polynôme $P(X)=X^4+X^3+X^2+X+1$

3. En développant $P(X)$. Soit $s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $p = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$
   Montrer que $s = -\frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{4}$ et dès lors que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont racines de $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 0$.
4. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 8.

Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1. Calculer z^2, puis déterminer le module et un argument de z^2, puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.
3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 9.

1. Donner les solutions de :
$$u^4 = -4$$
   Sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Donner les solutions de :
$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0$$
   Sous forme algébrique.

Exercice 10.

1. Donner les solutions complexes de $X^4 = 1$.
2. Résoudre $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre $X^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Exercice 11.

1. Déterminer les deux solutions complexes de $u^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.
2. Résoudre
$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$$
   On explicitera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 12.

1. Calculer les racines carrées des nombres complexes
$$a)\ z_1 = 7 + 24i \qquad b)\ z_2 = 9 + 40i \qquad c)\ z_3 = 1 + i$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$$a)\ z^2 = -2\sqrt{3} + 2i \qquad b)\ z^2 = 3 - 4i$$

Exercice 13.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$
2. $2z^2 + (5+i)z + 2 + 2i = 0$
3. $z^2 - (3+4i)z + 7i - 1 = 0$

Exercice 14.

1. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$.
2. $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$.

3. $4z^2 - 2z + 1 = 0$.
4. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.
5. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.
6. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$.
7. $z^3 + 3z - 2i = 0$.
8. $(1+i)z^2 - (3+i)z - 6 + 4i = 0$.
9. $(1+2i)z^2 - (9+3i)z - 5i + 10 = 0$.
10. $(1+3i)z^2 - (6i+2)z + 11i - 23 = 0$.

Exercice 15.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta), \quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta)$$

Exercice 16.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^5 - z = 0$
2. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$
3. $\overline{z}^7 = \frac{1}{z^2}$
4. $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$

Exercice 17.

Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$x^3 + (1-3i)x^2 - (6-i)x + 10i = 0$$

Exercice 18.

Soit (E) l'équation

$$X^4 - 3X^3 + (2-i)X^2 + 3X - 3 + i = 0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Exercice 19.

1. Résoudre $X^3 = -2 + 2i$
2. Résoudre $Z^3 = -8i$
3. Résoudre

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1+3i)Z^3 + 8 + 8i = 0$$

On rappelle que $\sqrt{676} = 26$.

Exercice 20.

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$
2. $\mathcal{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2}$
3. $\mathcal{Re}(iz) \leq \frac{1}{2}$
4. $\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2$

5. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$
6. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$

Exercice 21.

Montrer que

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

En déduire que

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$$

Exercice 22.

Soient $z, \omega \in \mathbb{C}$. Etablir la relation

$$|z + \omega|^2 + |z - \omega|^2 = 2(|z|^2 + |\omega|^2)$$

Et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 23.

Soit $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z + c| \leq |1 + \overline{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
   Soient $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité.
2. Montrer que l'application

$$f: D \to D$$
$$z \longmapsto \frac{z + c}{1 + \overline{c}z}$$

   Est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

Exercice 24.

Soit $n \geq 2$, un entier.

1.
   a. Déterminer les complexes qui vérifient $z^{2n} = 1$.
   b. Déterminer les complexes qui vérifient $z^n = -1$.
2. Calculer la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$.

Exercice 25.

1. Calculer les racines n-ième de $-i$ et de $1 + i$.
2. Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 26.

Soit $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z(1 - z)$

1. Déterminer les points fixes de f c'est-à-dire résoudre $f(z) = z$.
2. Montrer que si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$
   Indication : $z(1 - z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$

Feuille 2 compléments
Transformation dans le plan complexe

Exercice 1.

On rappelle que

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}};\quad j^2 = \overline{j} \quad \text{et que} \quad j^3 = 1$$

Soit r une transformation du plan qui a un point M associe le point M' d'affixe $M' = r(M)$ d'affixe $z' = -j^2 z + 1 + j^2$

Soit s une transformation du plan qui a un point M d'affixe z associe le point $M' = s(M)$ d'affixe $z' = -j^2\overline{z} + 1 + j^2$

1. Montrer que r est une rotation du plan dont on donnera l'affixe du centre Ω et l'angle de la rotation.
2. Montrer que Ω est un point fixe de s.
3. Montrer que s est une symétrie orthogonale. (on ne demande pas l'axe de la symétrie).
4. Calculer l'affixe z'' du point $M'' = r \circ s(M)$, où M est un point d'affixe z. Que peut-on en déduire de $r \circ s$?

Exercice 2.

Soit f la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z - i\sqrt{3}$$

1. Montrer que f est une similitude directe, dont on donnera le rapport et le centre.
2. Montrer que f est la composée d'une homothétie de centre O dont on donnera le rapport et d'une rotation, dont on donnera le centre et l'angle.

Exercice 3.

Soit f la similitude directe définie par $f(z) = az + b$, où $a, b \in \mathbb{C}$, avec $a = \rho e^{i\theta}$ et $\rho \neq 1$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe ω.
2. Donner l'image d'un complexe z par la rotation r de centre ω et d'angle θ.
3. Donner l'image d'un complexe z par l'homothétie h de centre ω et de rapport ρ.
4. Donner l'image d'un complexe z par $r \circ h$ en fonction de a, b et z, que peut-on en conclure ?

Exercice 4.

Soit f la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = -i\overline{z} + 1 + i$$

Soit g la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = i\overline{z} - 1 + i$$

1. Déterminer les points fixes de f et les points fixes de g.

On posera $z = x + iy$

2. Soit $h = f \circ g$, quelle est cette transformation, que peut-on dire de son centre ?

Feuille 2
Nombres complexes

Exercice 1.
Calculer le module et un argument de

$$z=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$$

Correction exercice 1.

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3})^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Exercice 2.
Soit

$$u=1+i \quad \text{et} \quad v=-1+i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de u et v.
2. Déterminer un argument de u et un argument de v.
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

Correction exercice 2.

1. $|u|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ et $|v|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2$
2.
$$u=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
Donc un argument de u est $\frac{\pi}{4}$.
$$v=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$$
Donc un argument de v est $\frac{2\pi}{3}$.
3. On cherche les solutions complexes de $z^3=u$
$$z^3=u\Leftrightarrow\begin{cases}|z^3|=\sqrt{2}\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=2^{\frac{1}{2}}\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2^{\frac{1}{6}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$
u admet trois racines cubiques
$$z_0=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\quad z_1=2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{9\pi}{12}}=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}}\quad et\quad z_2=2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}$$
4.

$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{\frac{2i\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5i\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

Et

$$\frac{u}{v}=\frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}+i\left(-1-\sqrt{3}\right)}{4}$$

Par conséquent

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{cases}$$

Exercice 3.

Calculer le module et un argument de

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\qquad\text{et}\qquad v=1-i$$

En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

Correction exercice 3.

$$|u|=\frac{\left|\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right|}{2}=\frac{\sqrt{6+2}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{\sqrt{4\times 2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2\times 3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Donc $|u|=\sqrt{2}$ et un argument de u est $-\frac{\pi}{6}$.

$$|v|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$v=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Donc $|v|=\sqrt{2}$ et un argument de v est $-\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Donc $\left|\frac{u}{v}\right|=1$ et un argument de $\frac{u}{v}$ est $\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4.

1. Déterminer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. (Utiliser la formule de Moivre).
2. En déduire une expression simple de $(1+i)^n+(1-i)^n$.

Correction exercice 4.

1. $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, on en déduit que

$$(1+i)^n=\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n$$

D'après la formule de Moivre $\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n=e^{\frac{ni\pi}{4}}$, par conséquent

$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{ni\pi}{4}}$$

2. $(1-i)^n = \left(\overline{1+i}\right)^n = \overline{(1+i)^n} = 2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{ni\pi}{4}}$, donc
$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi}{4}} + 2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{ni\pi}{4}} = 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{\frac{ni\pi}{4}} + e^{-\frac{ni\pi}{4}}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \times 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n+2}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Exercice 5. Soit $x \in \mathbb{R}$

1. Calculer $\cos(3x)$ (resp. $\sin(3x)$) en fonction de $\cos(x)$ (resp. de $\sin(x)$).
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$

Correction exercice 5.

1.
$$\cos(3x) + i\sin(3x) = e^{3ix} = \left(e^{ix}\right)^3$$
Avec la formule de Moivre
$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\sin(3x) = \left(e^{ix}\right)^3 &= (\cos(x) + i\sin(x))^3\\ &= \cos^3(x) + 3\cos^2(x)\,(i\sin(x)) + 3\cos(x)\,(i\sin(x))^2 + (i\sin(x))^3\\ &= \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x)\\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x))\end{aligned}$$
En égalisant les parties réelles et imaginaires
$$\begin{cases}\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\,(1-\cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)\\ \sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)\end{cases}$$

2.
$$\begin{aligned}\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 &= \frac{e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16}\\ &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4\left(e^{2ix} + 4e^{-2ix}\right) + 6}{16} = \frac{2\cos(4x) - 4\times 2\cos(2x) + 6}{16}\\ &= \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos(x)\sin^4(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4e^{2ix} - 4e^{-2ix} + 6}{16}\\ &= \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + e^{-3ix} - 4e^{3ix} - 4e^{-ix} + 6e^{ix} + e^{3ix} + e^{-5ix} - 4e^{ix} - 4e^{-3ix} + 6e^{-ix}\right)\\ &= \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + e^{-5ix} - 3\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) + 2\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right)\\ &= \frac{1}{32}(2\cos(5x) - 3\times\cos(3x) + 2\times 2\cos(x))\\ &= \frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{3}{32}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos(x)\end{aligned}$$

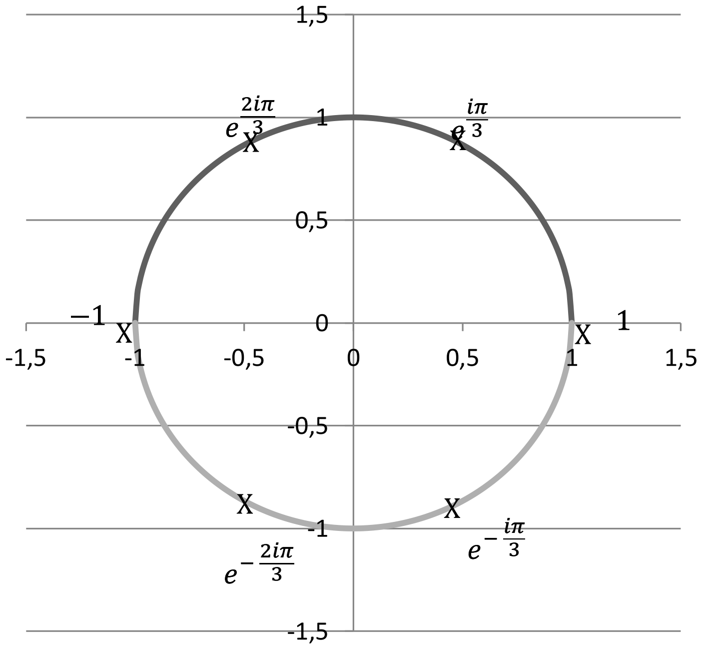
Exercice 6.

Pour rappel : Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes ω vérifiant $\omega^n = z$
Ces nombres sont appelés les n racines n-ième de z.

1. Représenter dans le plan complexes $\mathbb{C}$ les 6 racines 6-ièmess de 1 et les 4 racines quatrième de -1.
2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n-1$ racines du polynôme complexe $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.

Correction exercice 6.

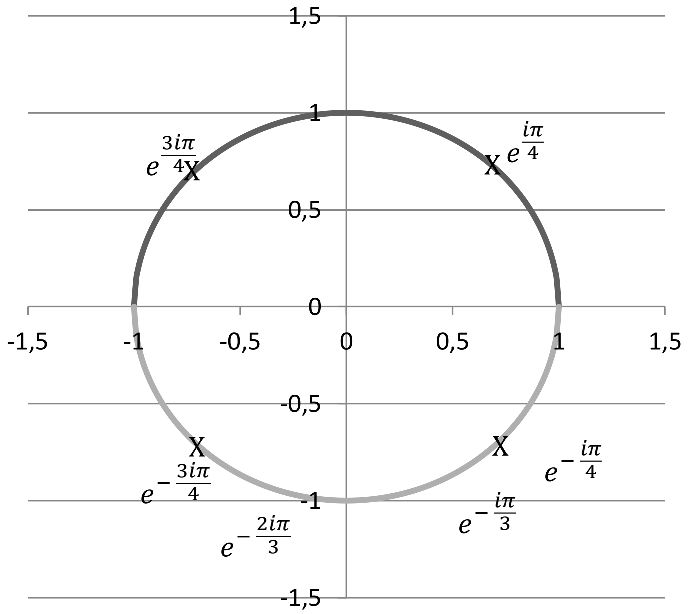
1. $z^6 = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,2,3,4,5\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}}$
Il y a donc six racines :
$$z_0 = 1; z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}; z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}; z_3 = e^{\frac{3i\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1; z_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{z_2} \text{ et } z_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = \overline{z_1}$$



$$z^4 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^4| = |-1| \\ \arg(z^4) = \arg(-1) + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = 1 \\ 4\arg(z) = \pi + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{4}, \ \ k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a donc 4 solutions

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}; z_1 = e^{\frac{3i\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}} = \overline{z_2} \ \text{ et } \ z_3 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \overline{z_1}$$



2. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

Les racines du polynôme complexe $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ sont les racines n-ièmes de l'unité privées de 1, c'est-à-dire

$$\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{1,2,\dots,n\}\right\}$$

Exercice 7.

1. Quelles sont les racines du polynôme $1 - X^5 = 0$.
2. Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
3. En développant $P(X)$. Soit $s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $p = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

   Montrer que $s = -\frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{4}$ et dès lors que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont racines de $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 0$.
4. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Correction exercice 7.

1. Ce sont les racines cinquièmes de l'unité :
$$1; e^{\frac{2i\pi}{5}};\ e^{\frac{4i\pi}{5}};\ e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{-\frac{4i\pi}{5}};\ e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{-\frac{2i\pi}{5}}$$
2. Pour tout $X \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$
$$P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = \frac{1 - X^5}{1 - X}$$
   Les racines de P sont donc les racines cinquièmes de 1 privées de la racine 1.
$$\begin{aligned} P(X) &= \left(X - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right) \\ &= \left(X - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right) \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} P(X) &= \left(X - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right) \\ &= \left(X^2 - e^{\frac{2i\pi}{5}}X - e^{-\frac{2i\pi}{5}}X + e^{\frac{2i\pi}{5}}e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X^2 - e^{\frac{4i\pi}{5}}X - e^{-\frac{4i\pi}{5}}X + e^{\frac{4i\pi}{5}}e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right) \\ &= \left(X^2 - \left(e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)X + 1\right)\left(X^2 - \left(e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right)X + 1\right) \\ &= \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right) \\ &= X^4 + \left(-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)X^3 + \left(1 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)X^2 \\ &+ \left(-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)X + 1 \\ &= X^4 - 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)X^3 + \left(2 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)X^2 \\ &- 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)X + 1 = X^4 - 2sX^3 + (2 + 4p)X^2 - 2sX + 1 \end{aligned}$$
   Ce qui donne
$$1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = X^4 - 2sX^3 + (2 + 4p)X^2 - 2sX + 1$$
   Puis en identifiant les coefficients
$$\begin{cases} -2s = 1 \\ 2 + 4p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -\dfrac{1}{2} \\ p = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$
   Un polynôme dont $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les racines est

$$\left(X-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)\left(X-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)=X^2-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$
$$=X^2-\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)X+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=X^2-sX+p$$
$$=X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}$$

4. Les racines de ce polynôme sont
$$\Delta=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$
$$X_1=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}\qquad\text{et}\qquad X_2=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$$
Comme $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ et comme $\frac{\pi}{2}<\frac{4\pi}{5}<\pi$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)<0$, on en déduit que
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\quad\text{et}\quad\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$$

Exercice 8.

Soit $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1. Calculer z^2, puis déterminer le module et un argument de z^2, puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.
3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction exercice 8.

1.
$$z^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)+2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$=2\sqrt{3}+2i\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=2\sqrt{3}+2i\sqrt{2^2-3}=2\sqrt{3}+2i$$
$$|z^2|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{4\times 3+4}=\sqrt{16}=4$$
Si on pose $\theta=\arg(z^2)$, $\cos(\theta)=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ donc $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Autre méthode :

$z^2=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

2.
On déduit de la première question que $|z^2|=4$ donc $|z|^2=4$ et que $|z|=2$. Et que les arguments possible de z sont $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)=\frac{\pi}{12}+k\pi$, $k\in\{0,1\}$, donc $z=2e^{\frac{i\pi}{12}}$ ou $z=-2e^{\frac{i\pi}{12}}$. Mais $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ entraine que le cosinus et le sinus de ses arguments sont positifs, donc $z=2e^{\frac{i\pi}{12}}$.

3. D'après la question précédente
$$2e^{\frac{i\pi}{12}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\Leftrightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\\\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{cases}$$

Exercice 9.

1. Donner les solutions complexes de :
$$u^4 = -4$$
sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Donner les solutions complexes de :
$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0$$
sous forme algébrique.

Correction exercice 9.

1.
$$u^4 = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} |u^4| = |-4| \\ \arg(u^4) = \arg(-4) + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u|^4 = 4 \\ 4\arg(u) = \pi + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |u| = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \arg(u) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \ \ k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a quatre solutions
$$u_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$
$$u_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$$
$$u_2 = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i = \overline{u_1}$$
$$u_3 = \sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i = \overline{u_0}$$

2.
$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^4 = -4(z-1)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = -4$$

On pose $u = \frac{z+1}{z-1}$, il y a donc 4 solutions que l'on trouve en exprimant z en fonction de u.
$$u = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow u(z-1) = z+1 \Leftrightarrow zu - u = z + 1 \Leftrightarrow zu - z = u + 1 \Leftrightarrow z(u-1) = u+1 \Leftrightarrow z = \frac{u+1}{u-1}$$
$$z_0 = \frac{u_0+1}{u_0-1} = \frac{1+i+1}{1+i-1} = \frac{2+i}{i} = 1 - 2i$$
$$z_1 = \frac{u_1+1}{u_1-1} = \frac{-1+i+1}{-1+i-1} = \frac{i}{-2+i} = \frac{i(-2-i)}{(-2)^2+1^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$
$$z_2 = \frac{u_2+1}{u_2-1} = \frac{\overline{u_1}+1}{\overline{u_1}-1} = \overline{z_1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$
$$z_3 = \frac{u_3+1}{u_3-1} = \frac{\overline{u_0}+1}{\overline{u_0}-1} = \overline{z_0} = 1 + 2i$$

Exercice 10.

1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.
2. Résoudre $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Résoudre $z^8+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

Correction exercice 10.

1. Les racines quatrième de l'unité sont $\{1,i,-1,-i\}$.
2. $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

$$z^4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow X^4=e^{\frac{4i\pi}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}|X^4|=\left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right|\\ \arg(X^4)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|X|^4=1\\ 4\arg(X)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|X|=1\\ \arg(X)=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\{0,1,2,3\}\end{cases}\Leftrightarrow X_k=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)},k\in\{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{\frac{5i\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$
$$z_2=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}=e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_3=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)}=e^{\frac{11i\pi}{6}}=e^{-\frac{i\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=j^2$. Donc $z^4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=j^2\Leftrightarrow z^4-j^2=0$. Or

$$z^4-j^2=(z^2-j)(z^2+j)=(z^2-j^4)(z^2-i^2j^4)=(z-j^2)(z+j^2)(z-ij^2)(z+ij^2)$$

D'où les solutions :

$z=j^2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z=i\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ et $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

3. On pose $Z=z^4$, l'équation est alors du second degré.

$$Z^2+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

Le discriminant est

$$\Delta=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+2+2i\sqrt{3}=\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}=3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Donc les solutions de $\delta^2=\Delta$ sont

$$\delta=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ et }\ \delta=-\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=-(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Z_1=\frac{-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Z_2=\frac{-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1, \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Z^2+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \Leftrightarrow Z^2+jZ+j^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{j}\right)^2+\frac{Z}{j}+1=0$$

Les solutions de $T^2+T+1=0$ sont $T_1=j$ et $T_2=j^2$

Donc $\frac{Z_1}{j}=j \Leftrightarrow Z_1=j^2$ et $\frac{Z_2}{j}=j^2 \Leftrightarrow Z_2=j^3=1$

Exercice 11.

1. Déterminer les deux solutions complexes de $u^2=-2+2i\sqrt{3}$.
2. Résoudre

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2=-2+2i\sqrt{3}$$

On explicitera les solutions sous forme algébrique.

Correction exercice 11.

1.

$$u^2=4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow u=\pm 2e^{\frac{i\pi}{3}}=\pm 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pm\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

2. On pose $u=\frac{z+i}{z-i}$

$$u=\frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow u(z-i)=z+i \Leftrightarrow uz-iu=z+i \Leftrightarrow uz-z=iu+i \Leftrightarrow z(u-1)=i(u+1) \Leftrightarrow z = i\frac{u+1}{u-1}$$

Il y a deux solutions

$$z_1=i\frac{1+i\sqrt{3}+1}{1+i\sqrt{3}-1}=i\frac{2+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}+i$$

$$z_2=i\frac{-1-i\sqrt{3}+1}{-1-i\sqrt{3}-1}=i\frac{-i\sqrt{3}}{-2-i\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}\left(2-i\sqrt{3}\right)}{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{3}}{7}+\frac{3}{7}i$$

Exercice 12.

1. Calculer les racines carrées des nombres complexes

$a)\ z_1=7+24i \qquad b)\ z_2=9+40i \qquad c)\ z_3=1+i$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a)\ z^2=-2\sqrt{3}+2i \qquad b)\ z^2=3-4i$$

Correction exercice 12.

1.

a. Soient a et b deux réels tels que :

$$(a+i)^2=a^2-b^2+2iab=7+24i$$

En identifiant les parties réels et imaginaires

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} a^2-b^2=7 \\ 2ab=24 \end{cases}$$

En prenant le module de $(a+i)^2=7+24i$, on trouve

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{7^2+24^2} \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25 \ \ L_3$$

En calculant L_1+L_3, on obtient $2a^2=32$, par conséquent $a^2=16$ et $a=\pm 4$

En calculant $L_3 - L_1$, on obtient $2b^2 = 18$, par conséquent $b^2 = 9$ et $b = \pm 3$
La ligne L_2 montre que a et b sont de même signe, les racines de $7 + 24i$ sont

$$4 + 3i \quad \text{et} \quad -4 - 3i = -(4 + 3i)$$

b. Soient a et b deux réels tels que :

$$(a + i)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 9 + 40i$$

En identifiant les parties réels et imaginaires

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = 9 \\ 2ab = 40 \end{cases}$$

En prenant le module de $(a + i)^2 = 9 + 40i$, on trouve

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \sqrt{9^2 + 40^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{81 + 1600} = \sqrt{1681} = 41 \ \ L_3$$

En calculant $L_1 + L_3$, on obtient $2a^2 = 50$, par conséquent $a^2 = 25$ et $a = \pm 5$
En calculant $L_3 - L_1$, on obtient $2b^2 = 32$, par conséquent $b^2 = 16$ et $b = \pm 4$
La ligne L_2 montre que a et b sont de même signe, les racines de $9 + 40i$ sont

$$5 + 4i \quad \text{et} \quad -5 - 4i = -(5 + 4i)$$

c. Soient a et b deux réels tels que :

$$(a + i)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 1 + i$$

En identifiant les parties réels et imaginaires

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

En prenant le module de $(a + i)^2 = 1 + i$, on trouve

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{2} \ \ L_3$$

En calculant $L_1 + L_3$, on obtient $2a^2 = 1 + \sqrt{2}$, par conséquent $a^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

En calculant $L_3 - L_1$, on obtient $2b^2 = \sqrt{2} - 1$, par conséquent $b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ et $b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

La ligne L_2 montre que a et b sont de même signe, les racines de $1 + i$ sont

$$\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} = -\left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}\right)$$

2.

a. On utiliser la même méthode que précédemment mais dans cet exemple il y a mieux

$$z^2 = -2\sqrt{3} + 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\, e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Donc $z = \pm 2e^{\frac{i\pi}{3}}$

b. Utilisons une « petite ruse »

$$z^2 = 3 - 4i = 4 - 2 \times 2i - 1 = 2^2 - 2 \times 2i + i^2 = (2 - i)^2$$

Donc $z = \pm(2 - i)$

Exercice 13.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$
2. $2z^2 + (5 + i)z + 2 + 2i = 0$
3. $z^2 - (3 + 4i)z + 7i - 1 = 0$

Correction exercice 13.

1.

$$\Delta=(1-5i)^2-4i(6i-2)=1-10i-25+24+8i=-2i=1-2i-1=(1-i)^2$$
Les racines de l'équation sont
$$z_1=\frac{-(1-5i)-(1-i)}{2i}=\frac{-2+6i}{2i}=-\frac{1}{i}+3=i+3=3+i$$
Car $\frac{1}{i}=-i$

Et
$$z_2=\frac{-(1-5i)+(1-i)}{2i}=\frac{4i}{2i}=2$$
2.
$$\Delta=(5+i)^2-4\times 2(2+2i)=25+10i-1-16-16i=8-6i=9-2\times 3i-1$$
$$=3^2-2\times 3i+i^2=(3-i)^2$$
Les racines de l'équation sont
$$z_1=\frac{-(5+i)-(3-i)}{4}=-\frac{8}{4}=-2$$
Et
$$z_2=\frac{-(5+i)+(3-i)}{4}=\frac{-2-2i}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$
3.
$$\Delta=(3+4i)^2-4(7i-1)=9+24i-16-28i+4=-3-4i=1^2-2\times 2i+(2i)^2=(1-2i)^2$$
Les racines de l'équation sont
$$z_1=\frac{(3+4i)-(1-2i)}{2}=1+3i$$
Et
$$z_2=\frac{(3+4i)+(1-2i)}{2}=2+i$$

Exercice 14.

1. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$.
2. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$.
3. $4z^2-2z+1=0$.
4. $z^4+10z^2+169=0$.
5. $x^4-30x^2+289=0$.
6. $x^4+4x^3+6x^2+4x-15=0$.
7. $z^3+3z-2i=0$.
8. $(1+i)z^2-(3+i)z-6+4i=0$.
9. $(1+2i)z^2-(9+3i)z-5i+10=0$.
10. $(1+3i)z^2-(6i+2)z+11i-23=0$.

Correction exercice 14.

1.
$$\Delta=3+4i=(2+i)^2$$
$$z_1=\frac{\sqrt{3}+2+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}i=1-i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-ij$$
$$z_2=\frac{\sqrt{3}-2-i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{1}{2}i=-1+i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+ij^2$$
2.

Le discriminant vaut
$$\Delta=\left(-(3+4i)\right)^2-4(-1+5i)=9+24i-16+4-20i=-3+4i=(1+2i)^2$$

Il y a deux solutions

$$z_1 = \frac{3+4i-(1+2i)}{2} = 1+2i$$
$$z_2 = \frac{3+4i+1+2i}{2} = 2+3i$$

3. Soit on résout « normalement », soit on ruse, rusons

$$4z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0$$

Avec $Z = -2z$. Les solutions de $Z^2 + Z + 1 = 0$ sont connues (et puis on vient de les revoir dans 1°))

$$Z_1 = j \quad \text{et} \quad Z_2 = j^2$$

Par conséquent

$$z_1 = -\frac{1}{2}j \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2}j^2$$

4. On pose $Z = z^2$, $Z^2 + 10Z + 169 = 0$ a pour discriminant

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 169 = 10^2 - (2 \times 13)^2 = (10-26)(10+26) = -16 \times 36 = -4^2 \times 6^2 = (24i)^2$$
$$Z_1 = \frac{-10+24i}{2} = -5+12i$$
$$Z_2 = \frac{-10-24i}{2} = -5-12i$$

On cherche $z = a + ib$ tel que

$$z^2 = Z_1 \Leftrightarrow (a+ib)^2 = -5+12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -5+12i$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \end{array} \right.$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3, on trouve que $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$,
En faisant la différence de L_3 et de L_1, on trouve que $2b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$,
D'après L_2, a et b sont de même signe donc $z^2 = Z_1$ a deux solutions

$$z_1 = 2+3i \quad et \quad z_2 = -2-3i$$

On peut résoudre de la même façon $Z_2 = z^2$ ou dire que $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ est une équation à coefficients réels et que donc si une racine complexe est solution alors son conjugué est aussi solution, par conséquent $\overline{z_1} = 2 - 3i$ et $\overline{z_2} = -2 + 3i$ sont aussi solution, ce qui donne 4 solutions pour une équation de degré 4, il n'y en a pas plus, on les a toutes.

5. On pose $X = x^2$

$$X^2 - 30X + 289 = 0$$
$$\Delta = 30^2 - 4 \times 289 = 900 - 1156 = -256 = -16^2 = (16i)^2$$
$$X_1 = \frac{30-16i}{2} = 15 - 8i$$
$$X_2 = 15 + 8i$$

On cherche x tel que $x^2 = 15 - 8i = 16 - 8i - 1 = (4-i)^2$
Il y a donc deux solutions $x_1 = 4 - i$ et $x_2 = -(4-i) = -4 + i$.
De même on cherche x tel que $x^2 = 15 + 8i = 16 + 8i - 1 = (4+i)^2$
Il y a donc deux solutions $x_3 = 4 + i$ et $x_4 = -(4+i) = -4 - i$.
Les solutions sont

$$\{4-i, -4+i, 4+i, -4-i\}$$

6. Il faudrait trouver des solutions (réelles ou complexes).
$x = 1$ est solution évidente, mais ensuite cela ne vient pas, mais en regardant mieux on s'aperçoit que 4 premiers termes ressemblent fort au développement de $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ donc

$$x^4+4x^3+6x^2+4x-15=0 \Leftrightarrow (x+1)^4-1-15=0 \Leftrightarrow (x+1)^4=16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |(x+1)^4|=16 \\ \arg((x+1)^4)=\arg(16)+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|^4=2^4 \\ 4\arg(x+1)=0+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|=2 \\ \arg(x+1)=\dfrac{2k\pi}{4}, \quad k\in\{0,1,2,3\} \end{cases} \Leftrightarrow x_k+1=2e^{\frac{ik\pi}{2}},$$

$$k\in\{0,1,2,3\} \Leftrightarrow x_k=-1+2e^{\frac{ik\pi}{2}}, \qquad k\in\{0,1,2,3\}$$

$$x_0=-1+2=1;\ x_1=-1+2e^{i\frac{\pi}{2}}=-1+2i;$$

$$x_2=-1+2e^{i\pi}=-1-2=-3;\ x_3=-1+2e^{\frac{3i\pi}{2}}=-1-2i$$

Sont les solutions.

7. On voit que i est une solution évidente (car $i^3+3i-2i=0$) donc on peut mettre $z-i$ en facteur.

$$z^3+3z-2i=(z-i)(az^2+bz+c) \Leftrightarrow z^3+3z-2i=az^3+(-ia+b)z^2+(-ib+c)z-ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -ia+b=0 \\ -ib+c=3 \\ -ic=-2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=ia=i \\ c=3+ib=2 \\ c=2 \end{cases}$$

$$z^3+3z-2i=(z-i)(z^2+iz+2)$$

Le discriminant de z^2+iz+2 est $\Delta=i^2-4\times 2=-9=(3i)^2$

Il y a deux solutions

$$z=\frac{-i-3i}{2}=-2i \quad \text{et} \quad z=\frac{-i+3i}{2}=i$$

Il y a donc deux solutions, $z_1=i$ et $z_2=-2i$.

8.

$$\Delta=\left(-(3+i)\right)^2-4(1+i)(-6+4i)=(3+i)^2-4(-6+4i-6i-4)$$
$$=9-1+6i-4(-10-2i)=8+6i+40+8i=48+14i$$

On pose $\delta=a+ib$, $\Delta=\delta^2 \Leftrightarrow 48+14i=(a+ib)^2 \Leftrightarrow 48+14i=a^2-b^2+2iab \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a^2-b^2=48 \\ 2ab=14 \end{cases}$

On rajoute l'équation

$$|\Delta|=|\delta^2| \Leftrightarrow |48+14i|=a^2+b^2 \Leftrightarrow 2|24+7i|=a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=2\sqrt{24^2+7^2} \Leftrightarrow a^2+b^2$$
$$=2\sqrt{576+49} \Leftrightarrow a^2+b^2=2\sqrt{625}=2\times 25=50$$

Avec le système $\begin{cases} a^2-b^2=48 \\ a^2+b^2=50 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2=98 \Leftrightarrow a^2=49$, d'où l'on tire $b^2=1$. Les valeurs possibles de a sont ± 7 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab=14 \Leftrightarrow ab=7$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a=7$ alors $b=1$ et $\delta=7+i$ et si $a=-7$ alors $b=-1$ et $\delta=-7-i$

Deuxième méthode

$\Delta=48+14i=49+2\times 7i-1=(7+i)^2$ donc $\delta=7+i$ ou $\delta=-7-i$.

Troisième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2-b^2=48 \\ 2ab=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\left(\frac{7}{a}\right)^2=48 \\ b=\frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\frac{49}{a^2}=48 \\ b=\frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-49=48a^2 \\ b=\frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a^4-48a^2-49=0 \\ b=\frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2-48A-49=0 \\ b=\frac{7}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2-48A-49=0$ est $\Delta'=48^2+4\times 49=2500=50^2$ donc ses solutions sont $A_1=\frac{48-50}{2}=-1$ et $A_2=\frac{48+50}{2}=49$, $A_1<0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2=-1$, par contre $a^2=49$ admet deux solutions $a=-7$ et $a=7$.

Si $a=-7$ alors $b=\frac{7}{a}=-1$ et si $a=7$ alors $b=\frac{7}{a}=1$, on retrouve les mêmes solutions.

Les solutions de $(1+i)z^2-(3+i)z-6+4i=0$ sont :

$$z_1=\frac{(3+i)-(7+i)}{2(1+i)}=-\frac{4}{2(1+i)}=-\frac{2}{1+i}=-\frac{2(1-i)}{1^2+1^2}=-1+i$$

$$z_2=\frac{(3+i)+(7+i)}{2(1+i)}=\frac{10+2i}{2(1+i)}=\frac{5+i}{1+i}=\frac{(5+i)(1-i)}{1^2+1^2}=\frac{5-5i+i+1}{1^2+1^2}=\frac{6-4i}{2}=3-2i$$

9.

$$\begin{aligned}\Delta&=\big(-(9+3i)\big)^2-4(1+2i)(-5i+10)=(3(3+i)^2)-4(-5i+10+10+20i)\\&=9(9-1+6i)-4(-25)=9(8+6i)-4(20+15i)=72+54i-80-60i\\&=-8-6i\end{aligned}$$

On pose $\delta=a+ib$,

$\Delta=\delta^2\Leftrightarrow -8-6i=(a+ib)^2\Leftrightarrow -8-6i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=-8\\2ab=-6\end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta|=|\delta^2|\Leftrightarrow|-8-6i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{64+36}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{100}=10$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=-8\\a^2+b^2=10\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2=2\Leftrightarrow a^2=1$, d'où l'on tire $b^2=9$. Les valeurs possibles de a sont ±1 et les valeurs possibles de b sont ±3, d'après l'équation $2ab=-6\Leftrightarrow ab=-3$, on en déduit que $ab<0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a=1$ alors $b=-3$ et $\delta=1-3i$ et si $a=-1$ alors $b=3$ et $\delta=-1+3i$

Deuxième méthode

On reprend le système $\begin{cases}a^2-b^2=-8\\2ab=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\left(\frac{-3}{a}\right)^2=-8\\b=\frac{-3}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\frac{9}{a^2}=-8\\b=\frac{-3}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4-9=-8a^2\\b=\frac{-3}{a}\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}a^4+8a^2-9=0\\b=\frac{-3}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A^2+8A-9=0\\b=\frac{-3}{a}\end{cases}$, le discriminant de $A^2+8A-9=0$ est $\Delta'=8^2+4\times9=100=10^2$ donc ses solutions sont $A_1=\frac{-8-10}{2}=-9$ et $A_2=\frac{-8+10}{2}=1$, $A_2<0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2=-9$, par contre $a^2=1$ admet deux solutions $a=-1$ et $a=1$.

Si $a=-1$ alors $b=\frac{-3}{a}=3$ et si $a=1$ alors $b=\frac{-3}{a}=-1$, on retrouve les mêmes solutions.

Troisième méthode

$\Delta=-8-6i=1-6i-9=(1-3i)^2$ donc $\delta=1-3i$ et $\delta=-1+3i$

Les solutions de $(1+2i)z^2-(9+3i)z-5i+10=0$ sont :

$$z_1=\frac{(9+3i)-(1-3i)}{2(1+2i)}=\frac{8+6i}{2(1+2i)}=\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(4+3i)(1-2i)}{1^2+2^2}=\frac{4-8i+3i+6}{10}=2-i$$

$$z_2=\frac{(9+3i)+(1-3i)}{2(1+2i)}=\frac{10}{2(1+2i)}=\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{1^2+2^2}=1-2i$$

10.

$$\begin{aligned}\Delta&=(-(6i+2)^2)-4(1+3i)(11i-23)=(6i+2)^2-4(11i-23-33-69i)\\&=-36+24i+4-4(-56-58i)=-32+24i+224+232i=192+256i\\&=64(3+4i)\end{aligned}$$

Si j'ai mis 64 en facteur, c'est que maintenant il suffit de trouver une racine deuxième de $3+4i$, ce qui est beaucoup plus facile que de trouver une racine deuxième de $192+256i$.

On pose $\delta=a+ib$, $\Delta=\delta^2\Leftrightarrow 3+4i=(a+ib)^2\Leftrightarrow 3+4i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=4\end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |3+4i| = a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{25} = 5$

Avec le système $\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab = 4 \Leftrightarrow ab = 2$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 2$ alors $b = 1$ et $\delta = 2+i$ et si $a = -2$ alors $b = -1$ et $\delta = -2-i$

Donc $(2+i)^2 = 3+4i$ entraine que $\Delta = 64(3+4i) = 8^2(2+i)^2 = \left(8(2+i)\right)^2 = (16+8i)^2$

Deuxième méthode

$3+4i = 4+4i-1 = (2+i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\left(\frac{2}{a}\right)^2=3 \\ b=\frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\frac{4}{a^2}=3 \\ b=\frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-4=3a^2 \\ b=\frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-3a^2-4=0 \\ b=\frac{2}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^2-3A-4=0 \\ b=\frac{2}{a} \end{cases}$$

Les solutions de $A^2-3A-4=0$ sont $A_1 = -1 < 0$ et $A_2 = 4$, donc $a^2 = 4$,

Si $a = -2$ alors $b = \frac{2}{a} = -1$ et alors $\delta = -2-i$, si $a = 2$ alors $b = \frac{2}{a} = 1$ et alors $\delta = 2+i$.

Les solutions de $(1+3i)z^2-(6i+2)z+11i-23 = 0$ sont

$$z_1 = \frac{6i+2-(16+8i)}{2(1+3i)} = \frac{-14-2i}{2(1+3i)} = \frac{-7-i}{1+3i} = \frac{(-7-i)(1-3i)}{1^2+3^2} = \frac{-7+21i-i-3}{10} = -1+2i$$

$$z_2 = \frac{6i+2+(16+8i)}{2(1+3i)} = \frac{18+14i}{2(1+3i)} = \frac{9+7i}{1+3i} = \frac{(9+7i)(1-3i)}{1^2+3^2} = \frac{9-27i+7i+21}{10} = 3-2i$$

Exercice 15.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta), \quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta)$$

Correction exercice 15.

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta) + i\sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{k=n} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{k=n} \left(e^{i\theta}\right)^k$$

Grâce à la formule de Moivre

Par conséquent si $\theta \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^n}{1-e^{i\theta}} = \frac{1-e^{ni\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

Toujours grâce à la formule de Moivre.

Pour trouver U_n et V_n il faut trouver la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression.

Première et pas terrible solution, mais correcte.

$$U_n + V_n = \frac{1-e^{ni\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{\left(1-e^{ni\theta}\right)\left(1-e^{-i\theta}\right)}{\left(1-e^{i\theta}\right)\left(1-e^{-i\theta}\right)}$$

Car le conjugué de $1-e^{i\theta}$ est $1-e^{-i\theta}$ et non pas, comme le pense de nombreux étudiants $1+e^{i\theta}$

$$U_n+V_n=\frac{\left(1-e^{ni\theta}\right)\left(1-e^{-i\theta}\right)}{(1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}=\frac{1-e^{-i\theta}-e^{ni\theta}+e^{(n-1)i\theta}}{1-e^{i\theta}-e^{-i\theta}+e^{i\theta}e^{-i\theta}}$$

$$=\frac{1-(\cos(\theta)-i\sin(\theta))\ -(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))\ +\left(\cos\left((n-1)\theta\right)+i\sin\left((n-1)\theta\right)\right)}{1-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\ +1}$$

$$=\frac{1-\cos(\theta)-\cos(n\theta)+\cos\left((n-1)\theta\right)+i\left(\sin(\theta)-\sin(n\theta)+\sin\left((n-1)\theta\right)\right)}{1-2\cos(\theta)\ +1}$$

$$=\frac{1-\cos(\theta)-\cos(n\theta)+\cos\left((n-1)\theta\right)}{1-2\cos(\theta)\ +1}+i\frac{\sin(\theta)-\sin(n\theta)+\sin\left((n-1)\theta\right)}{1-2\cos(\theta)\ +1}$$

Ce qui montre que

$$U_n=\frac{1-\cos(\theta)-\cos(n\theta)+\cos\left((n-1)\theta\right)}{1-2\cos(\theta)\ +1}\quad \text{et}\quad V_n=\frac{\sin(\theta)-\sin(n\theta)+\sin\left((n-1)\theta\right)}{1-2\cos(\theta)\ +1}$$

Deuxième solution, « la bonne » mais astucieuse pour des L1

$$U_n+V_n=\frac{1-e^{ni\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}-e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}=\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{\frac{i\theta}{2}}}\times\frac{-\left(e^{i\frac{n+1}{2}\theta}-e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}\right)}{-\left(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}$$

$$=e^{i\frac{n+1}{2}\theta}e^{-\frac{i\theta}{2}}\times\frac{-2\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}=e^{i\frac{n\theta}{2}}\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}+i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Ce qui montre que

$$U_n=\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\quad \text{et}\quad V_n=\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

C'est mieux.

Et puis si $\theta=2l\pi$ avec $l\in\mathbb{Z}$

$$U_n=\sum_{k=0}^{k=n}\cos(k2l\pi)=\sum_{k=0}^{k=n}1=n+1,\ \ V_n=\sum_{k=0}^{k=n}\sin(k2l\pi)=\sum_{k=0}^{k=n}0=0$$

Exercice 16.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^5-z=0$
2. $27(z-1)^6+(z+1)^6=0$
3. $\overline{z}^7=\frac{1}{z^2}$
4. $z^6-(3+2i)z^3+2+2i=0$

Correction exercice 16.

1. $z^5-z=0\Leftrightarrow z(z^4-1)=0\Leftrightarrow z(z^2-1)(z^2+1)=0\Leftrightarrow z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)=0\Leftrightarrow z\in\{0,1,-1,i,-i\}$
2.

$$27(z-1)^6+(z+1)^6=0\Leftrightarrow(z+1)^6=-27(z-1)^6\Leftrightarrow\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6=-27$$

On pose $X=\frac{z+1}{z-1}$ et on va résoudre $X^6=-27$

$$X^6=-27\Leftrightarrow\begin{cases}|X^6|=|-27|\\ \arg(X^6)=\arg(-27)+2k\pi, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|X|^6=27=3^3\\ 6\arg(X)=\pi+2k\pi, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|X|=(3^3)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\\ \arg(X)=\dfrac{\pi+2k\pi}{6}=\dfrac{(2k+1)\pi}{6}, & k\in\{0,1,2,3,4,5\}\end{cases}$$

Il y a donc 6 solutions

$$X_k=\sqrt{3}e^{\frac{(2k+1)\pi}{6}},k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

Il reste à trouver les solutions de $27(z-1)^6+(z+1)^6=0$, soit z_k une solution

$$X_k=\frac{z_k+1}{z_k-1}\Leftrightarrow X_k(z_k-1)=z_k+1\Leftrightarrow X_kz_k-X_k=z_k+1\Leftrightarrow X_kz_k-z_k=X_k+1\Leftrightarrow(X_k-1)z_k$$

$$=X_k+1\Leftrightarrow z_k=\frac{X_k+1}{X_k-1}$$

Avec $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

L'énoncé ne précise pas sous quelle forme doivent être mise les solutions, si on les veut sous forme algébrique, il faut aller plus loin

$$z_k=\frac{X_k+1}{X_k-1}=\frac{(X_k+1)(\overline{X_k}-1)}{(X_k-1)(\overline{X_k}-1)}=\frac{|X_k|^2-X_k+\overline{X_k}-1}{|X_k|^2-X_k-\overline{X_k}+1}=\frac{3-(X_k-\overline{X_k})-1}{3-(X_k+\overline{X_k})+1}=\frac{2-2iIm(X_k)}{4-2Re(X_k)}$$

$$=\frac{1-iIm(X_k)}{2-Re(X_k)}=\frac{1-i\sqrt{3}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)}{2-\sqrt{3}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)}$$

Puis remplacer k par 0, puis par 1, etc…

3.

$$\overline{z}^7=\frac{1}{z^2}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\overline{z}^7\right|=\left|\dfrac{1}{z^2}\right|\\ \arg(\overline{z}^7)=\arg\left(\dfrac{1}{z^2}\right)+2k\pi, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|\overline{z}|^7=\left|\dfrac{1}{z}\right|^2\\ 7\arg(\overline{z})=-2\arg(z)+2k\pi, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^7=\dfrac{1}{|z|^2}\\ -7\arg(z)=-2\arg(z)+2k\pi, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^9=1\\ -5\arg(z)=2k\pi, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=-\dfrac{2k\pi}{5}, & k\in\{0,1,2,3,4\}\end{cases}$$

Il y a 5 solutions

$$\left\{e^{-\frac{2ki\pi}{5}},\quad k\in\{0,1,2,3,4\}\right\}$$

4. $z^6-(3+2i)z^3+2+2i=0$, on pose $X=z^3$ et on résous

$$X^2-(3+2i)X+2+2i=0$$

$$\Delta=(3+2i)^2-4(2+2i)=9+12i-4-8-8i=-3+4i=-4+2\times 2i+1=(2i+1)^2$$

Il y a deux solutions

$$X_1=\frac{3+2i-(2i+1)}{2}=1\quad\text{et}\quad X_2=\frac{3+2i+2i+1}{2}=2+2i$$

Il reste à résoudre $z^3=1$ et $z^3=2+2i$

$$z^3=1\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,2\},z=e^{\frac{2ik\pi}{3}}$$

Car ce sont les racines troisième de l'unité, cela donne trois solutions

$$\left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$z^3 = 2+2i \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = |2+2i| \\ \arg(z^3) = \arg(2+2i) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$|2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$2+2i = 2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}} + i\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}\right) = 2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$z^3 = 2+2i \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Cela donne trois solutions de plus

$$\left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i, \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\}$$

Exercice 17.

Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$x^3 + (1-3i)x^2 - (6-i)x + 10i = 0$$

Correction exercice 17.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a^3 + (1-2i)a^2 - 3(1+i)a - 2 + 2i = 0 \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 3a - 2 + i(-2a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 3a - 2 = 0 \\ -2a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation $-2a^2 - 3a + 2 = 0$ sont $a_1 = -2$ et $a_2 = \frac{1}{2}$

$$(-2)^3 + (-2)^2 - 3(-2) - 2 = -8 + 4 + 6 - 2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 = \frac{1+2-12-16}{8} = -\frac{25}{8} \neq 0$$

Donc seul -2 est solution de (E)

2. On peut diviser $X^3 + (1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i$ par $X+2$

$X^3 + (1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i$	$X+2$
$X^3 + 2X^2$	$X^2 + (-1-2i)X - 1 + i$
$(-1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i$	
$(-1-2i)X^2 + 2(-1-2i)X$	
$(-1+i)X - 2 + 2i$	
$(-1+i)X - 2 + 2i$	
0	

Par conséquent

$$X^3 + (1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i = (X+2)(X^2 + (-1-2i)X - 1 + i)$$
$$= (X+2)(X^2 - (1+2i)X - 1 + i)$$

Les solutions de (E) sont donc

$$X^2 - (1+2i)X + i - 1 = 0$$

$$\Delta = (1+2i)^2 - 4(i-1) = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1$$

$$X_1 = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

$$X_2 = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i$$

Exercice 18.

Soit (E) l'équation

$$X^4 - 3X^3 + (2-i)X^2 + 3X - 3 + i = 0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Correction exercice 18.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ une solution de (E)

$$a^4 - 3a^3 + (2-i)a^2 - 3 + i = 0 \Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 + i(-a^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0 \\ -a^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$a_1 = -1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 - 3 = 0$ et $a_2 = 1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0$, donc (E) admet deux solutions réelles, on peut mettre $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ en facteur.

2. Il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$X^4 - 3X^3 + (2-i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2-1)(aX^2+bX+c)$$

On développe

$$(X^2-1)(aX^2+bX+c) = aX^4 + bX^3 + (c-a)X^2 - bX - c$$

Par conséquent

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c - a = 2 - i \\ -b = 3 \\ -c = -3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 - i \end{cases}$$

$$X^4 - 3X^3 + (2-i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2-1)(X^2 - 3X + 3 - i) = 0$$

Il reste à trouver les solutions de $X^2 - 3X + 3 - i = 0$

$$\Delta = 9 - 4(3-i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1+2i)^2$$

Les racines carrées du discriminant sont $\delta = \pm(1-2i)$

Il y a deux solutions

$$X_1 = \frac{3-(1+2i)}{2} = 1 - i$$

$$X_2 = \frac{3+1+2i}{2} = 2 + i$$

L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{-1, 1, 1-i, 2+i\}$$

Exercice 19.

1. Résoudre $X^3 = -2 + 2i$
2. Résoudre $Z^3 = -8i$
3. Résoudre

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1+3i)Z^3 + 8 + 8i = 0$$

On rappelle que $\sqrt{676} = 26$.

Correction exercice 19.

1. $X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\pi}{4}}$

   Donc

$$X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^{\frac{3}{2}} \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{4}+2k\pi, \ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\arg(X) = \frac{3\pi}{4}+2k\pi, \ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(X) = \frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}, \ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases} \Leftrightarrow X_k$$

$$= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k\in k\in\{0,1,2\}$$

$$X_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$$

$$X_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}$$

$$X_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

2.

$$X^3 = -8i = 2^3e^{\frac{3i\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^3 \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{2}+2k\pi, \ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^3 \\ 3\arg(X) = \frac{3\pi}{2}+2k\pi, \ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}, \ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases} \Leftrightarrow X_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k\in k\in\{0,1,2\}$$

$$X_0 = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$$

$$X_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{\frac{7i\pi}{6}} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3}-i$$

$$X_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3})} = 2e^{\frac{11i\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}-i$$

3. On pose $X = Z^3$

$$\frac{1}{2}Z^6+(1+3i)Z^3+8+8i = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}X^2+(1+3i)X+8+8i = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (1+3i)^2-4\times\frac{1}{2}(8+8i) = 1+6i-9-16-16i = -24-10i$$

Les racines carrés de $-24-10i$:

$$(a+ib)^2 = -24-10i \Leftrightarrow a^2-b^2+2iab = -24-10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = -24 \\ 2ab = -10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2\end{matrix}\begin{cases} a^2-b^2 = -24 \\ ab = -5\end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2+b^2 = \sqrt{24^2+10^2} = \sqrt{576+100} = \sqrt{676} = 26 \quad L_3$$

En additionnant L_1 et L_3, on trouve $2a^2 = 2$ donc $a^2 = 1$, c'est-à-dire $a = \pm 1$.

En soustrayant L_1 à L_3, on trouve $2b^2 = 50$ donc $b^2 = 25$, c'est-à-dire $b = \pm 5$.

D'après L_2, a et b sont de signes différents donc les deux racines carrés de $-24-10i$ sont : $1-5i$ et $-1+5i$.

L'équation du second degré a pour racine :

$$X_1 = \frac{-(1+3i)-(1-5i)}{2\times\frac{1}{2}} = -2-2i$$

Et

$$X_2 = \frac{-(1+3i)+(1-5i)}{2\times\frac{1}{2}} = -2i$$

Les six racines de

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1+3i)Z^3 + 8 + 8i = 0$$

Sont les six complexes trouvés en 1. et 2.

Exercice 20.

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $|1-z| \leq \frac{1}{2}$
2. $\mathcal{R}e(1-z) \leq \frac{1}{2}$
3. $\mathcal{R}e(iz) \leq \frac{1}{2}$
4. $\left|1-\frac{1}{z}\right|^2 = 2$
5. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$
6. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$

Correction exercice 20.

1. L'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C}$, tels que $|1-\mathrm{z}| \leq \frac{1}{2}$ est le cercle de centre Ω d'affixe 1 et de rayon $\frac{1}{2}$.
2. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels
$$1 - z = 1 - x - iy$$
$$\mathcal{R}e(1-z) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$
L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe à droite de la droite verticale $x = \frac{1}{2}$.
3. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels
$$iz = i(x+iy) = -y + ix$$
$$\mathcal{R}e(iz) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -y \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}$$
L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe au-dessus de la droite horizontale $y = -\frac{1}{2}$
4. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels
$$\left|1-\frac{1}{z}\right|^2 = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z}\right|^2 = 2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2(x^2+y^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 1 = x^2 + 2x + y^2 \Leftrightarrow 1 = (x+1)^2 - 1 + y^2$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2$$
L'ensemble des solutions est le cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
5.
$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3}{z+3}\right|^2 = 4 \Leftrightarrow |z-3|^2 = 4|z+3|^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4((x+3)^2 + y^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4(x^2 + 6x + 9 + y^2) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2$$
$$= 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2 \Leftrightarrow 0 = 3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + 10x + 9 + y^2$$
$$\Leftrightarrow 0 = (x+5)^2 - 25 + 9 + y^2 \Leftrightarrow 16 = (x+5)^2 + y^2$$
L'ensemble des solutions est le cercle de centre $(-5,0)$ et de rayon 4.
6.

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right|<2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3}{z+3}\right|^2<4 \Leftrightarrow |z-3|^2<4|z+3|^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2<4\left((x+3)^2+y^2\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2<4(x^2+6x+9+y^2) \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2$$
$$<4x^2+24x+36+4y^2 \Leftrightarrow 0<3x^2+30x+27+3y^2 \Leftrightarrow 0<x^2+10x+9+y^2$$
$$\Leftrightarrow 0<(x+5)^2-25+9+y^2 \Leftrightarrow 16<(x+5)^2+y^2$$

L'ensemble des solutions est l'extérieur du disque de centre $(-5,0)$ et de rayon 4.

Exercice 21.

Montrer que

$$\forall z,z' \in \mathbb{C}, |z+z'| \leq |z|+|z'|$$

En déduire que

$$\forall z,z' \in \mathbb{C}, \big||z|-|z'|\big| \leq |z-z'|$$

Correction exercice 21.

$$|z+z'|^2=(z+z')\left(\overline{z+z'}\right)=(z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)=z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'}=|z|^2+z\overline{z'}+\overline{z\overline{z'}}+|z'|^2$$
$$=|z|^2+2\mathcal{R}e\left(z\overline{z'}\right)+|z'|^2 \leq |z|^2+2\left|z\overline{z'}\right|+|z'|^2=|z|^2+2|z|\left|\overline{z'}\right|+|z'|^2$$
$$=|z|^2+2|z||z'|+|z'|^2=(|z|+|z'|)^2$$

Comme $|z+z'| \geq 0$ et $|z|+|z'| \geq 0$

On a $|z+z'| \leq |z|+|z'|$

Dans $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ on pose $Z=z+z'$ et $Z'=z'$ donc $z=Z-Z'$, cela donne

$$|Z| \leq |Z-Z'|+|Z'| \Leftrightarrow |Z|-|Z'| \leq |Z-Z'| \quad (1)$$

Puis on intervertit Z et Z' dans (1) on obtient $|Z'|-|Z| \leq |Z'-Z|=|-(Z-Z')|=|Z-Z'| \quad (2)$

Comme $\big||Z|-|Z'|\big|=|Z|-|Z'|$ si $|Z| \geq |Z'|$ et $\big||Z|-|Z'|\big|=-(|Z|-|Z'|)=|Z'|-|Z|$ si $|Z'| \geq |Z|$

(1) ou (2) donne le résultat.

Exercice 22.

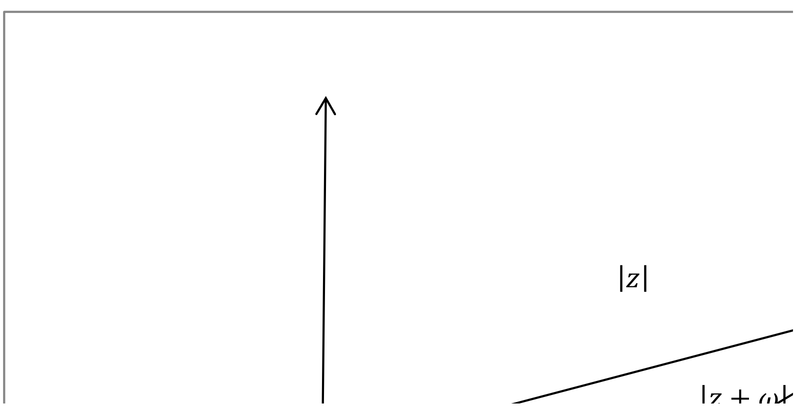
Soient $z,\omega \in \mathbb{C}$. Etablir la relation

$$|z+\omega|^2+|z-\omega|^2=2(|z|^2+|\omega|^2)$$

Et en donner une interprétation géométrique.

Correction exercice 22.

$$|z+\omega|^2+|z-\omega|^2=(z+\omega)(\overline{z}+\overline{\omega})+(z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega})$$
$$=|z|^2+z\overline{\omega}+\omega\overline{z}+|\omega|^2+|z|^2-z\overline{\omega}-\omega\overline{z}+|\omega|^2=2(|z|^2+|\omega|^2)$$



C'est l'égalité du parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales

Exercice 23.

Soit $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z + c| \leq |1 + \overline{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
   Soient $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité.
2. Montrer que l'application
$$f: D \to D$$
$$z \longmapsto \frac{z + c}{1 + \overline{c}z}$$
   Est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

Correction exercice 23.

1.
$$|z + c| \leq |1 + \overline{c}z| \Leftrightarrow |z + c|^2 \leq |1 + \overline{c}z|^2 \Leftrightarrow (z + c)(\overline{z} + \overline{c}) \leq (1 + \overline{c}z)(1 + c\overline{z})$$
$$\Leftrightarrow |z|^2 + z\overline{c} + c\overline{z} + |c|^2 \leq 1 + c\overline{z} + \overline{c}z + |c|^2|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |c|^2 \leq 1 + |c|^2|z|^2 \Leftrightarrow 0$$
$$\leq 1 - |c|^2 + |c|^2|z|^2 - |z|^2 \Leftrightarrow 1 - |c|^2 + (|c|^2 - 1)|z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - |c|^2)(1 - |z|^2)$$
$$\geq 0 \Leftrightarrow 1 - |z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq |z|^2 \Leftrightarrow 1 \geq |z|$$
2. Il faut montrer que pour tout $z' \in D$ il existe un unique $z \in D$ tel que
$$z' = \frac{z + c}{1 + \overline{c}z}$$
   Mais il faut d'abord montrer que $f(D) \subset D$, comme $|z| \leq 1$ d'après 1., $|z + c| \leq |1 + \overline{c}z|$, ce qui équivaut à
$$\frac{|z + c|}{|1 + \overline{c}z|} = \left|\frac{z + c}{1 + \overline{c}z}\right| = |f(z)| \leq 1$$
   D'où $z \in D \Rightarrow f(z) \in D$
$$z' = \frac{z + c}{1 + \overline{c}z} \Leftrightarrow z'(1 + \overline{c}z) = z + c \Leftrightarrow z' + z'\overline{c}z = z + c \Leftrightarrow z' - c = z - z'\overline{c}z \Leftrightarrow z' - c = z(1 - z'\overline{c})$$
$$\Leftrightarrow \frac{z' - c}{1 - z'\overline{c}} = z$$
   Car $|z'\overline{c}| < 1$ et donc le dénominateur n'est pas nul
   On a montré que pour tout $z' \in D$, il existe un unique z tel que $z' = f(z)$, il reste à montrer que $z \in D$. On pose $c' = -\overline{c}$, $|c'| < 1$
$$z = \frac{z' + c'}{1 + z'\overline{c'}} \Rightarrow |z| = \left|\frac{z' + c'}{1 + z'\overline{c'}}\right| \leq 1$$
   D'après le 1.
   Montrons que $f(C) = C$.
   Soit $z \in C$, donc $|z| = 1$
$$|f(z)| = \left|\frac{z + c}{1 + \overline{c}z}\right| = \left|\frac{z\left(1 + \frac{c}{z}\right)}{1 + \overline{c}z}\right| = \left|\frac{z\left(1 + \frac{c\overline{z}}{|z|^2}\right)}{1 + \overline{c}z}\right| = |z|\left|\frac{1 + c\overline{z}}{1 + \overline{c}z}\right| = \left|\frac{1 + c\overline{z}}{1 + \overline{c}z}\right| = \frac{|1 + c\overline{z}|}{|1 + \overline{c}z|} = \frac{\left|\overline{1 + c\overline{z}}\right|}{|1 + \overline{c}z|}$$
$$= \frac{|1 + \overline{c}z|}{|1 + \overline{c}z|} = 1$$
   Cela montre que $f(C) \subset C$, il faut montrer que $C \subset f(C)$
   Soit $z' \in C$, z' admet un unique antécédent z, on a $z' = f(z)$
$$z = \frac{z' - c}{1 - z'\overline{c}} = \frac{z' + c'}{1 + z'\overline{c'}}$$
   Si on pose $c' = -\overline{c}$ et comme précédemment $|z| = 1$, ce qui montre que pour tout $z' \in C$, il existe $z \in C$ tel que $z' = f(z) \in f(C)$

Exercice 24.

Soit $n \geq 2$, un entier.

1.
   a. Déterminer les complexes qui vérifient $z^{2n} = 1$.

b. Déterminer les complexes qui vérifient $z^n = -1$.

2. Calculer la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$.

Correction exercice 24.

1.

a. $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in \{0,1,\dots,2n-1\}$.

b.

$$z^n = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = 1 \\ \arg(z^n) = \arg(-1) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\arg(z) = \pi + 2k\pi \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}, k \in \{0,1,\dots,n-1\} \end{cases}$$

Il y a n solutions $z_k = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{n}}, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

Soit encore $z_k = e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

2. Première solution $z^{2n} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z^n = 1 \\ z^n = -1 \end{cases}$

La somme des racines $2n$-ième de l'unité (qui est nulle) est la somme des racines n-ième de l'unité (qui est nulle) plus la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$, donc la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$ est nulle.

Deuxième solution

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$$

Car $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ pour $n \geq 2$.

Exercice 25.

1. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1 + i$.
2. Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Correction exercice 25.

1. On cherche les complexes tels que

$$z^n = -i \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = |-i| \\ \arg(z^n) = \arg(-i) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = -\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{2k\pi}{n}, k \in \{0,1,\dots,n-1\} \end{cases}$$

Les solutions sont les

$$z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$$

On cherche les complexes tels que

$$z^n = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = \sqrt{2} \\ \arg(z^n) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \\ n\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2^{\frac{1}{2n}} \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{4n} + \dfrac{2k\pi}{n}, k \in \{0,1,\dots,n-1\} \end{cases}$$

Les solutions sont les

$$z_k = 2^{\frac{1}{2n}} e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$$

2. $z^2 - z + 1 - i = 0$

   Le discriminant vaut

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1-i) = -3 - 4i = 1 + 4i - 4 = (1+2i)^2$$

   Il y a deux solutions

$$z_1 = \frac{1-(1+2i)}{2} = -i$$
$$z_2 = \frac{1+1+2i}{2} = 1+i$$

3. $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$, on pose $Z = z^n$

$$z^{2n} - z^n + 1 - i = 0 \Leftrightarrow Z^2 - Z + 1 - i = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} Z = -i \\ \text{ou} \\ Z = 1+i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z^n = -i \\ \text{ou} \\ z^n = 1+i \end{array}\right.$$

   L'ensemble des solutions est

$$\left\{ e^{i\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0,1,\dots,n-1\}, 2^{\frac{1}{2n}} e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k'\pi}{n}\right)}, k' \in \{0,1,\dots,n-1\} \right\}$$

Exercice 26.

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z(1-z)$

1. Déterminer les points fixes de f c'est-à-dire résoudre $f(z) = z$.
2. Montrer que si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$

   Indication : $z(1-z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$

Correction exercice 26.

1.

$$f(z) = z \Leftrightarrow z(1-z) = z \Leftrightarrow z(1-z) - z = 0 \Leftrightarrow z - z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2.

$$\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| = \left|z(1-z) - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-z\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right| \le \left|\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\right| + \frac{1}{4}$$
$$\le \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Feuille 2 compléments
Transformation dans le plan complexe

Exercice 1.

On rappelle que

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}; \quad j^2 = \overline{j} \quad \text{et que} \quad j^3 = 1$$

Soit r une transformation du plan qui a un point M associe le point M' d'affixe $M' = r(M)$ d'affixe $z' = -j^2 z + 1 + j^2$

Soit s une transformation du plan qui a un point M d'affixe z associe le point $M' = s(M)$ d'affixe $z' = -j^2\overline{z} + 1 + j^2$

1. Montrer que r est une rotation du plan dont on donnera l'affixe du centre Ω et l'angle de la rotation.
2. Montrer que Ω est un point fixe de s.
3. Montrer que s est une symétrie orthogonale. (on ne demande pas l'axe de la symétrie).
4. Calculer l'affixe z'' du point $M'' = r \circ s(M)$, où M est un point d'affixe z. Que peut-on en déduire de $r \circ s$?

Correction exercice 1.

1. $-j^2 = e^{i\pi} e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{7i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ donc r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, son point fixe vérifie $r(\Omega) = \Omega$ donc $\omega = -j^2\omega + 1 + j^2$, ce qui entraine que :
$$\omega = \frac{1 + j^2}{1 + j^2} = 1$$
2. L'affixe de $s(\Omega)$ est
$$-j^2 \times \overline{1} + 1 + j^2 = -j^2 + 1 + j^2 = 1$$
Ce qui montre que
$$s(\Omega) = \Omega$$
Autrement dit Ω est un point fixe de s.
3. L'affixe de l'image par s d'un point M est de la forme $a\overline{z} + b$, de plus
$$a\overline{b} + b = -j^2\left(\overline{1 + j^2}\right) + 1 + j^2 = -j^2(1 + j) + 1 + j^2 = -j^2 - j^3 + 1 + j^2 = 0$$
Donc s est une symétrie orthogonale.
4. Soit $M' = s(M)$ d'affixe $z' = -j^2\overline{z} + 1 + j^2$. Soit $M'' = r(M') = r \circ s(M)$ d'affixe $z'' = -j^2 z' + 1 + j^2$, on a
$$z'' = -j^2 z' + 1 + j^2 = -j^2(-j^2\overline{z} + 1 + j^2) + 1 + j^2 = j^4\overline{z} - j^2 - j^4 + 1 + j^2 = j\overline{z} + 1 - j$$
C'est de la forme $a\overline{z} + b$, il reste à vérifier que $a\overline{b} + b = 0$ pour montrer qu'il s'agit d'une symétrie orthogonale.
$$a\overline{b} + b = j\left(\overline{1 - j}\right) + 1 - j = j(1 - j^2) + 1 - j = j - j^3 + 1 - j = 0$$
$r \circ s$ est une symétrie orthogonale.

Exercice 2.

Soit f la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z - i\sqrt{3}$$

1. Montrer que f est une similitude directe, dont on donnera le rapport et le centre.

2. Montrer que f est la composée d'une homothétie de centre O dont on donnera le rapport et d'une rotation, dont on donnera le centre et l'angle.

Correction exercice 2.

1. z' est de la forme $az+b$ donc f est une similitude directe.
$|-1+i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2+3} = 2$ est le rapport de la similitude
Son centre d'affixe a vérifie

$$a = (-1+i\sqrt{3})a - i\sqrt{3} \Leftrightarrow (2-i\sqrt{3})a = -i\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{-i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}} = \frac{(-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})}{4+3} = \frac{3}{7} - \frac{2i\sqrt{3}}{7}$$

2. $|-1+i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2+3} = 2$

$$z' = 2\left(\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

On appelle h l'homothétie de centre O rapport est 2, à un point M d'affixe z elle associe le point M' d'affixe $z' = 2z$

On appelle r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (car $\frac{2\pi}{3}$ est un argument du complexe de module 1 : $e^{\frac{2i\pi}{3}}$), à un point M d'affixe z elle associe le point d'affixe M' d'affixe $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$M'' = h(r(M)) \text{ et } M' = r(M)$$

Equivaut à

$$\begin{cases} z'' = 2z' \\ z' = e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Donc

$$z'' = 2\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-1+i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$$

On a bien $f = h \circ r$. Il reste à trouver le centre de la rotation, c'est-à-dire son point fixe Ω d'affixe ω qui vérifie

$$\omega = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega - i\ \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega = -i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{-i\sqrt{3}}{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-i\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$$

Exercice 3.

Soit f la similitude directe définie par $f(z) = az+b$, où $a, b \in \mathbb{C}$, avec $a = \rho e^{i\theta}$ et $\rho \neq 1$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe ω.
2. Donner l'image d'un complexe z par la rotation r de centre ω et d'angle θ.
3. Donner l'image d'un complexe z par l'homothétie h de centre ω et de rapport ρ.
4. Donner l'image d'un complexe z par $r \circ h$ en fonction de a, b et z, que peut-on en conclure ?

Correction exercice 3.

1. soit ω un éventuel point fixe

$\omega = a\omega + b \Leftrightarrow \omega(1-a) = b \Leftrightarrow \omega = \frac{b}{1-a}$

Car $a \neq 1$ vu que $|a| \neq 1$.

Donc f admet un unique point fixe.

2.

$$r(z) - \omega = e^{i\theta}(z-\omega) \Leftrightarrow r(z) = e^{i\theta}z + \omega\left(1 - e^{(i\theta)}\right)$$

3.

$$h(z) - \omega = \rho(z-\omega) \Leftrightarrow h(z) = e^{i\theta}z + \omega(1-\rho)$$

4.

$$r(z) = e^{i\theta}z + \omega\left(1 - e^{(i\theta)}\right)$$

$$h(z) = \rho z + \omega(1-\rho) = z'$$

$$\begin{aligned} r \circ h(z) = r\big(h(z)\big) = r(z') = e^{i\theta}z' + \omega\left(1 - e^{(i\theta)}\right) &= e^{i\theta}\big(\rho z + \omega(1-\rho)\big) + \omega\left(1 - e^{i\theta}\right) \\ &= \rho e^{i\theta}z + \omega e^{i\theta} - \omega\rho e^{i\theta} + \omega - \omega e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}z - \omega\rho e^{i\theta} + \omega = az - a\omega + \omega \\ &= az + \omega(1-a) = az + \frac{b}{1-a}(1-a) = az + b = f(z) \end{aligned}$$

Donc toute similitude directe de centre ω est la composée d'une rotation de centre ω et d'une homothétie de centre ω.

Il est important de montrer que le « a » et le « b » sont ceux de f.

Exercice 4.

Soit f la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = -i\bar{z} + 1 + i$$

Soit g la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = i\bar{z} - 1 + i$$

1. Déterminer les points fixes de f et les points fixes de g.

On posera $z = x + iy$

2. Soit $h = f \circ g$, quelle est cette transformation, que peut-on dire de son centre ?

Correction exercice 4.

1. On cherche les points d'affixe $z = x + iy$ tels que $f(M) = M$, ce qui équivaut à

$$z = -i\bar{z} + 1 + i \Leftrightarrow x + iy = -i(x - iy) + 1 + i = 1 - y + i(1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1$$

Il s'agit d'une droite.

On cherche les points d'affixe $z = x + iy$ tels que $g(M) = M$, ce qui équivaut à

$$z = i\bar{z} - 1 + i \Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) - 1 + i = -1 + y + i(1+x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + y \\ y = 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 + x$$

Il s'agit d'une droite.

2. On pose $M'' = f\big(g(M)\big)$ et $M' = f(M)$ donc

$$\begin{cases} z'' = -i\overline{z'} + 1 + i \\ z' = i\bar{z} - 1 + i \end{cases}$$

Par conséquent

$$z'' = -i\overline{(i\bar{z} - 1 + i)} + 1 + i = -i(-iz - 1 - i) + 1 + i = -z + i - 1 + 1 + i = -z + 2i$$

h est à la fois une homothétie de rapport -1 et une rotation d'angle π, l'affixe de son centre vérifie

$$z = -z + 2i \Leftrightarrow z = i$$

On peut remarquer que c'est l'intersection des deux droites invariante de f et g.