Feuille 10. Dérivabilité

Question générale. Pour les fonctions considérées dans cette feuille, on précisera le domaine de définition.

Exercice 1.

Préciser pour chacune des fonctions suivantes en quels points elles sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et les valeurs de leurs dérivées, dérivées à droite, dérivées à gauche.

1. $f(x) = \cos(\cos x)$.
2. $g(x) = \sqrt{|\sin x|}$.
3. $h(x) = \sqrt{1 + \cos x}$.

Exercice 2.

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & \text{si } x < 0 \\ \cos^2(\pi x), & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Exercice 3.

Pour chacune des expressions $y(t)$ ci-dessous, calculer $\dfrac{dy}{dt}$:

$$1)\ t^4 + 3t^2 - 6,\ 2)\ 6t^{7/2} + 4t^{5/2} - 2t,\ 3)\ \sqrt{3t} + \sqrt[3]{t} + \frac{1}{t},\ 4)\ t\,e^t,\ 5)\ t^2\,e^t,\ 6)\ t\,(t+3)\,e^t,$$

$$7)\ t\,\sin t\,\ln t,\ 8)\ \frac{5-t}{5+t},\ 9)\ \frac{t^3}{1+t^2},\ 10)\ \frac{t^3+1}{t^2-t-2},\ 11)\ \frac{\ln t}{t^3},\ 12)\ \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}},\ 13)\ \frac{\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{t}},$$

$$14)\ \frac{\cos t}{\sin t},\ 15)\ \frac{\sin t}{1+\cos t}.$$

Exercice 4.

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, calculer la fonction dérivée f' :

$$1)\ e^{3x},\ 2)\ \cos(5x),\ 3)\ \ln(2x),\ 4)\ \ln(|2x|),\ 5)\ \ln(-2x),\ 6)\ (1-x)^{7/3},\ 7)\ \sin(\cos x),$$

$$8)\ \sin(\cos(3x)),\ 9)\ \ln(\sin^2 x),\ 10)\ \sqrt[3]{x^2+x+1},\ 11)\ e^{-x^2},\ 12)\ 2^{\ln x},\ 13)\ \frac{\sqrt{5+4x}}{1+2\sqrt{1+x}},$$

14) $\ln(|e^{2\imath\pi x}|)$.

Exercice 5.

Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ \sin x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$ en calculant sa dérivée.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. f' est elle continue en 0 ?
4. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 6.

Soit $f_n(x)$ les fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Pour quelle valeur de n, a-t-on f_n continue ?
2. Pour quelle valeur de n, a-t-on f_n dérivable ?
3. Pour quelle valeur de n, a-t-on f'_n continue ?
4. Pour quelle valeur de n, a-t-on f'_n dérivable ?

Exercice 7.

1. Montrer que pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b$:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

2. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \operatorname{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Exercice 8.

1. Montrer que pour tous réels x et y : $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$.
2. Montrer que pour tous réels x et y tels que $x \neq y$: $|\cos y - \cos x| < |y - x|$.

Exercice 9. Montrer que pour tout entier $k \geq 1 : 0 < \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Comment se comporte la suite (H_n) de terme général $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini ?

Exercice 10.

1. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que pour $\alpha \leq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \infty.$$

2. On suppose maintenant $\alpha > 1$. Pour $k \geq 2$, comparer $\frac{\alpha - 1}{k^\alpha}$ et $\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}$.
3. Toujours pour $\alpha > 1$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \ell, \text{ avec } \ell < \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Exercice 11. Montrer que $100 + \frac{1}{200}$ est une approximation par excès de $\sqrt{10001}$, et que l'erreur d'approximation est inférieure à $\frac{1}{4 \cdot 10^6}$.

Exercice 12.

Soit f de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable.

1. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et que $f(1) = 0$. Montrer que f''' s'annule quelque part dans $]0,1[$.
2. On suppose ici que $f(0) = f(1/3) = f(2/3) = f(1) = 0$. Montrer le même résultat.
3. On suppose ici que $f(0) = f'(0) = 0$ et que $f(1) = f'(1) = 0$. Montrer le même résultat.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer $\lim_{x\to a} \frac{a\, f(x) - x\, f(a)}{x - a}$, pour un $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 14.

Soit $a < b$ deux réels.

Existe-t-il une fonction dérivable f de $[a, b[$ vers $\mathbb{R}$ telle que l'on ait simultanément le comportement asymptotique $\lim_{x \to b-} f(x) = \infty$ et la majoration $|f'| \leq 1$?

Exercice 15. * Soit f de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ une application continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 et que l'on a $f'(0) = f'(1) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un α dans $]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. [Indication : étudier la fonction $g(x) := f(x) - x$.]
2. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un β dans $]0, 1[$ tel que $|f''(\beta)| \geq 4$. [Indication : raisonner par l'absurde et étudier les fonctions $x \mapsto f(x) - 2\,x^2$ et $x \mapsto 1 - f(x) - 2\,(1 - x)^2$.]

Exercice 16. Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x - x$.

1. En appliquant à f le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln n \leq f(n + 1) - f(n) \leq \ln(n + 1).$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \leq f(n + 1) + 1 \leq \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n + 1).$$
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Exercice 17. [Théorème de Sturm.] On considère une fonction deux fois dérivable $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(b) = 0$, $f(x) > 0, \forall\, x \in]0, b[$, et $|f''(x)| \leq f(x), \forall\, x \in [0, b]$. Le théorème de Sturm affirme que $b \geq \pi$. Preuve par l'absurde : on suppose $b < \pi$.

1. On pose $g(x) := f'(x)\,\sin x - f(x)\,\cos x$. Montrer que g est croissante, puis que g est positive.
2. On pose $h(x) := \dfrac{f(x)}{\sin x}$, $x > 0$. De la question précédente, déduire que h est croissante.
3. Calculer $h(b)$ et obtenir une contradiction.

Feuille 10. Dérivabilité

Question générale. Pour les fonctions considérées dans cette feuille, on précisera le domaine de définition.

Exercice 1.

Préciser pour chacune des fonctions suivantes en quels points elles sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et les valeurs de leurs dérivées, dérivées à droite, dérivées à gauche.

1. $f(x) = \cos(\cos x)$.
2. $g(x) = \sqrt{|\sin x|}$.
3. $h(x) = \sqrt{1 + \cos x}$.

Correction:

1. La fonction $\cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = \sin(\cos x)\sin(x)$.
2. La fonction $g(x)$ est π périodique. Comme $\sin x$ est partout dérivable, $|x|$ est dérivable en dehors de 0, et $\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a que $g(x)$ est dérivable sur $]0, \pi[$ de dérivée $f'(x) = \frac{\cos x}{2 \sin x}$.
   Par contre en 0, g n'est ni dérivable à droite, ni à gauche, car $\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas finie (idem en 0^-).
3. h est 2π périodique. En dehors de π, h est dérivable de dérivée $h'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$.
   $\lim_{x \to \pi^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos y}}{y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{|y|}{\sqrt{2}y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ce qui donne la valeur de la dérivée à droite. Par contre en π^- on obtiendra $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui donne la valeur de la dérivée à gauche.

Exercice 2.

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & \text{si } x < 0 \\ \cos^2(\pi x), & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Correction:

La fonction est clairement continue en dehors de 0 et 1, continue à droite en 0 et à gauche en 1. Comme $\lim_{x \to 0^-} e^x - x = 1 = f(0)$, elle est aussi continue à gauche en 0 et comme $\lim_{x \to 1^+} 1 + \frac{\ln x}{x} = 1 = f(1)$ elle est aussi continue à droite en 1. Elle est donc partout continue.

Pour $x < 0$, f est dérivable de dérivée $f'(x) = e^x - 1$.
Pour $0 < x < 1$, f est dérivable de dérivée $f'(x) = -2\pi\cos(\pi x)\sin(\pi x)$.
Pour $x > 1$, f est dérivable de dérivée $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

On a $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{2x} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^2(\pi x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(\pi x)^2(\cos(\pi x)+1)}{2x} = 0$. La fonction f est donc dérivable en O de dérivée $f'(0) = 0$.

On a $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cos^2(\pi x)-1}{x-1} = \lim_{y\to 0^-} \frac{\cos^2(\pi y)-1}{y} = \lim_{y\to 0^-} \frac{-(\pi y)^2(\cos(\pi y)+1)}{2y} = 0$ et $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x(x-1)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(y+1)}{y(y+1)} = 1$. Donc f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en 1 mais n'est pas dérivable.

Exercice 3.

Pour chacune des expressions $y(t)$ ci-dessous, calculer $\dfrac{dy}{dt}$:

$$1)\ t^4+3t^2-6,\ 2)\ 6t^{7/2}+4t^{5/2}-2t,\ 3)\ \sqrt{3t}+\sqrt[3]{t}+\frac{1}{t},\ 4)\ t\,e^t,\ 5)\ t^2\,e^t,\ 6)\ t\,(t+3)\,e^t,$$

$$7)\ t\,\sin t\,\ln t,\ 8)\ \frac{5-t}{5+t},\ 9)\ \frac{t^3}{1+t^2},\ 10)\ \frac{t^3+1}{t^2-t-2},\ 11)\ \frac{\ln t}{t^3},\ 12)\ \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}},\ 13)\ \frac{\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{t}},$$

$$14)\ \frac{\cos t}{\sin t},\ 15)\ \frac{\sin t}{1+\cos t}.$$

Correction:

1. $4t^3+6t$
2. $21t^{5/2}+10t^{3/2}-2$
3. $\frac{3}{2\sqrt{3t}}+\frac{1}{3}t^{-2/3}-\frac{1}{t^2}$
4. $(1+t)e^t$
5. $(t^2+2t)e^t$
6. $(t^2+5t+3)e^t$
7. $(\sin t+t\cos t)\ln t+\sin t$
8. $\frac{-10}{(5+t)^2}$
9. $\frac{t^4+3t^2}{(1+t^2)^2}$
10. $\frac{t^4-2t^3-6t^2-2t+1}{(t^2-t-2)^2}$
11. $\frac{1-3\ln t}{t^4}$
12. $\frac{(t+1)^2(5t-1)}{2t\sqrt{t}}$
13. $\frac{\sqrt{t}-1}{2\sqrt{t}\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})^2}$
14. $\frac{-1}{\sin^2 t}$
15. $\frac{1}{1+\cos t}$

Exercice 4.
Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, calculer la fonction dérivée f' :

$$1)\ e^{3x},\ 2)\cos(5x),\ 3)\ \ln(2x),\ 4)\ \ln(|2x|),\ 5)\ \ln(-2x),\ 6)\ (1-x)^{7/3},\ 7)\ \sin(\cos x),$$

$$8)\ \sin(\cos(3x)),\ 9)\ \ln(\sin^2 x),\ 10)\ \sqrt[3]{x^2+x+1},\ 11)\ e^{-x^2},\ 12)\ 2^{\ln x},\ 13)\ \frac{\sqrt{5+4x}}{1+2\sqrt{1+x}},$$

$$14)\ \ln(|e^{2\imath\pi x}|).$$

Correction:

$$1)\ 3e^{3x},\ 2)-5\sin(5x),\ 3)\ 1/x,\ 4)\ 1/x,\ 5)\ 1/x,\ 6)\ -7/3(1-x)^{4/3},\ 7)\ -\cos(\cos x)\sin x,$$

$$8)\ -3\cos(\cos(3x))\sin(3x),\ 9)\ \frac{2\cos x}{\sin x},\ 10)\ 1/3(x^2+x+1)^{-2/3}(2x+1),\ 11)\ -2xe^{-x^2},$$

$$12)\ \ln(2)2^{\ln x},\ 13)\ \frac{2\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{5+4x}\sqrt{1+x}(1+2\sqrt{1+x})^2},\ 14)\ 2i\pi.$$

Exercice 5.
Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x+\exp(-1/x^2), & \text{si } x>0\\ \sin x, & \text{si } x\le 0\end{cases}.$$

1. Montrer que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$ en calculant sa dérivée.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. f' est elle continue en 0 ?
4. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Correction:

1. Tout d'abord f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ et comme $\lim_{x\to 0^+} x+\exp(-1/x^2)=0=f(0)$ elle est aussi continue en 0.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(x)=1+2/x^3\exp(-1/x^2)$, et aussi sur $\mathbb{R}_-^*$ de dérivée $f'(x)=\cos x$.
2. On a $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+} 1+1/x\exp(-1/x^2)=1$ et $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$.
3. Comme $\lim_{x\to 0^+} 1+2/x^3\exp(-1/x^2)=1$ et $\lim_{x\to 0^-}\cos x=1$, f' est continue en 0, et donc continue sur $\mathbb{R}$.
4. On a $\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+} 2/x^4\exp(-1/x^2)=0$ et $\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-1}{x}=0$, d'où f est deux fois dérivable en 0, et $f''(0)=0$.

Exercice 6.

Soit $f_n(x)$ les fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Pour quelle valeur de n, a-t-on f_n continue ?
2. Pour quelle valeur de n, a-t-on f_n dérivable ?
3. Pour quelle valeur de n, a-t-on f'_n continue ?
4. Pour quelle valeur de n, a-t-on f'_n dérivable ?

Correction:

1. Comme $\sin$ est une fonction bornée, on a $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$ si $n \neq 0$, par contre $\lim_{x\to 0} \sin x$ n'existe pas, vu que $\sin$ est périodique, non constante. Ainsi f_n est continue sur $\mathbb{R}$ pour $n \geq 1$.
2. En dehors de 0, f_n est dérivable, de dérivée $f'_n(x) = nx^{n-1}\sin(1/x) - x^{n-2}\cos(1/x)$. En 0 on a $\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\sin(1/x)$. Ainsi f est dérivable en O si et seulement si $n \geq 2$, auquel cas $f'_n(0) = 0$.
3. On a $\lim_{x\to 0} f'_n(x) = \lim_{x\to 0} nx^{n-1}\sin(1/x) - x^{n-2}\cos(1/x) = 0$ seulement si $n \geq 3$, car elle n'existe pas pour $n = 2$. Donc f'_n est continue, uniquement si $n \geq 3$.
4. f'_n est dérivable en dehors de 0. On a $\lim_{x\to 0} \frac{f'_n(x)-f'_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} nx^{n-2}\sin(1/x) - x^{n-3}\cos(1/x)$ et donc f'_n est dérivable en 0 si et seulement si $n \geq 4$.

Exercice 7.

1. Montrer que pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b$:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

2. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \operatorname{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Correction:

1. $\operatorname{Arctan} x$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on a donc $\operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a = \operatorname{arctan}' c(b-a)$ avec $c \in]a, b[$. Comme $\operatorname{arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$ d'où le résultat.
2. Il suffit d'écrire l'encadrement précédent pour $a = 1$ et $b = 4/3$.

Exercice 8.

1. Montrer que pour tous réels x et y : $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$.
2. Montrer que pour tous réels x et y tels que $x \neq y$: $|\cos y - \cos x| < |y - x|$.

Correction:

1. $\cos x$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\sin x$ qui est bornée par -1 et 1 d'où l'encadrement en passant à la valeur absolue.
2. Le seul cas non trivial est celui ou un point comme $\pi/2$ est entre x et y, auquel cas il suffit d'encadrer entre x et $\pi/2$, et entre $\pi/2$ et y, pour pouvoir conclure.

Exercice 9. Montrer que pour tout entier $k \geq 1 : 0 < \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Comment se comporte la suite (H_n) de terme général $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini ?

Correction:

1. $\ln x$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $1/x$, donc pour $k \geq 1$ on a $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ car $1/x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On a $\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k$, d'où le résultat, par la question précédente.
3. Comme $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$, on a que H_n diverge aussi.

Exercice 10.

1. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que pour $\alpha \leq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \infty.$$

2. On suppose maintenant $\alpha > 1$. Pour $k \geq 2$, comparer $\dfrac{\alpha - 1}{k^\alpha}$ et $\dfrac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$.
3. Toujours pour $\alpha > 1$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \ell, \text{ avec } \ell < \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Correction:

1. On a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} > \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \infty$.
2. La fonction $f(x) = 1/x^{\alpha-1}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $-\frac{\alpha-1}{x^\alpha}$ strictement croissante, donc $\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} = f(k-1) - f(k) > \frac{\alpha-1}{k^\alpha}$.

3. On a donc par somme télescopique, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} < \frac{\alpha}{\alpha-1}$, car $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exercice 11. Montrer que $100 + \dfrac{1}{200}$ est une approximation par excès de $\sqrt{10001}$, et que l'erreur d'approximation est inférieure à $\dfrac{1}{4\cdot 10^6}$.
Correction: On applique le théorème des accroissements finis à $f(x) = \sqrt{x}$, de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 12.
Soit f de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable.

1. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et que $f(1) = 0$. Montrer que f''' s'annule quelque part dans $]0,1[$.
2. On suppose ici que $f(0) = f(1/3) = f(2/3) = f(1) = 0$. Montrer le même résultat.
3. On suppose ici que $f(0) = f'(0) = 0$ et que $f(1) = f'(1) = 0$. Montrer le même résultat.

Correction:

1. Comme $f(0) = f(1) = 0$ il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. Alors comme $f'(0) = f'(\alpha) = 0$ il existe $\beta \in]0,\alpha[$ tel que $f''(\beta) = 0$, et finalement, comme $f''(0) = f''(\beta) = 0$ il existe $\gamma \in]0,\beta[\subset]0,1[$ tel que $f'''(\gamma) = 0$.
2. Pour f' on a trois racines distinctes, une entre 0 et $1/3$, une entre $1/3$ et $2/3$ et une entre $2/3$ et 1, donc 2 racines distinctes pour f'' et finalement 1 pour f'''.
3. $f(0) = f(1) = 0$ nous donne une troisième racine pour f', on conclut comme ci dessus.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a\,f(x) - x\,f(a)}{x-a}$, pour un $a \in \mathbb{R}$.
Correction: On a $\lim_{x\to a}\frac{a\,f(x)-x\,f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{a\,f(x)-a\,f(a)+a\,f(a)-x\,f(a)}{x-a} = af'(a) - f(a)$.

Exercice 14.
Soit $a < b$ deux réels.
Existe-t-il une fonction dérivable f de $[a,b[$ vers $\mathbb{R}$ telle que l'on ait simultanément le comportement asymptotique $\displaystyle\lim_{x\to b-} f(x) = \infty$ et la majoration $|f'| \leq 1$?
Correction: Non. Il suffit d'utiliser le théorème des accroissements finis pour exhiber une contradiction.

Exercice 15. * Soit f de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ une application continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 et que l'on a $f'(0) = f'(1) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un α dans $]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. [Indication : étudier la fonction $g(x) := f(x) - x$.]

2. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe un β dans $]0,1[$ tel que $|f''(\beta)| \geq 4$. [Indication : raisonner par l'absurde et étudier les fonctions $x \mapsto f(x) - 2\,x^2$ et $x \mapsto 1 - f(x) - 2\,(1-x)^2$.]

Correction:

1. Comme $f'(0) = 0$ on a que $g'(0) = -1$ et donc il existe $\beta > 0$ tel que $g(\beta) < 0$. De même $f'(1) = 0$ entraine que $g'(1) = -1$ et donc il existe $\gamma < 1$ tel que $g(\gamma) > 0$. Donc, comme g est continue, il existe α tel que $g(\alpha) = 0$.
2.

Exercice 16. Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x - x$.

1. En appliquant à f le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln n \leq f(n+1) - f(n) \leq \ln(n+1).$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \leq f(n+1) + 1 \leq \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1).$$
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Correction:

1. $f(x)$ est dérivable de dérivée $\ln x$, strictement croissante.
2. On fait la somme de 1 à n de ses inégalités pour obtenir le résultat.
3. On a donc $f(n) + 1 < |n(n!) < f(n+1) + 1$, soit l'encadrement désiré en passant à l'exponentielle.

Exercice 17. [Théorème de Sturm.] On considère une fonction deux fois dérivable $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(b) = 0$, $f(x) > 0, \forall\, x \in]0,b[$, et $|f''(x)| \leq f(x), \forall\, x \in [0,b]$. Le théorème de Sturm affirme que $b \geq \pi$. Preuve par l'absurde : on suppose $b < \pi$.

1. On pose $g(x) := f'(x)\,\sin x - f(x)\,\cos x$. Montrer que g est croissante, puis que g est positive.
2. On pose $h(x) := \dfrac{f(x)}{\sin x}$, $x > 0$. De la question précédente, déduire que h est croissante.
3. Calculer $h(b)$ et obtenir une contradiction.

Correction:

1. $g'(x) = (f''(x) + f(x))\sin x$ donc $g'(x)$ est positive si $b < \pi$, et $g(0) = 0$, donc g est positive.
2. $h'(x) = \frac{g(x)}{\sin^2 x}$, donc h est strictement croissante.
3. $h(b) = 0$ or h ne peut pas prendre des valeurs négatives avant b, ce qui est absurde.