Feuille 3 : Bases de logique

Exercice 1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en utilisant uniquement des symboles les assertions suivantes :

1. la fonction f s'annule
2. la fonction f est la fonction nulle
3. f n'est pas une fonction constante
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur
5. la fonction f présente un minimum
6. f prend des valeurs arbitrairement grandes
7. f ne peut s'annuler qu'une seule fois

Exercice 2 Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels. Que signifient en mots les assertions suivantes

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists l \in \mathbb{Z}, q_n = l.$
2. $\exists l \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, q_n = l.$
3. $\forall l \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, q_n = l.$

Exercice 3 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \,\text{ou}\, x = -|x|).$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} x = -|x|).$
3. $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, y - x + x^2 < 0.$
4. $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}, y - x + x^2 > 0.$

Exercice 4 Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudiants de l'université de Lyon 1, $\mathcal{S}$ l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.

1. Écrire avec des symboles mathématiques la proposition : ≪Tout étudiant de l'université Lyon 1 se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ≫.
2. Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis l'énoncer en français.

Exercice 5* Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Comparer les deux propositions suivantes

$$\forall x \in I,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in I,\ (|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$$

et

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ \forall y \in I,\ (|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon).$$

Exercice 6 En utilisant un raisonnement par contraposée démontrer l'implication

$$(x \neq y) \Longrightarrow ((x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)).$$

Exercice 7 Principe des tiroirs.
Soit n un entier, $n \geq 1$. Démontrer que si vous rangez $n + 1$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 8 Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

1. Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Ecrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$).
4. Donnez-en une preuve en utilisant le principe des tiroirs.

Exercice 9

1. Démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $|x-2| < x^2 - 2x + 3$.
2. Démontrer que si n est un entier positif alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.
3. Démontrer que si n et p sont des entiers relatifs, alors np est pair ou $n^2 - p^2$ est multiple de 8.

Exercice 10 Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En déduire la valeur de $\sum\limits_{i=1}^{n} (2i-1)^2$.

Exercice 11 Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 12 On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier n et pour tout réel $x > 0$, on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

1. La récurrence porte-t-elle sur n ? Sur x ? Sur les deux ?
2. Énoncer l'hypothèse de récurrence.
3. Vérifier que $(1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$.
4. Rédiger la démonstration.

Exercice 13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'entiers naturels définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 4u_n + u_{n+1}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq 3^n$.

Exercice 14 Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs augmenté de 1 est le carré d'un entier (on pourra calculer $n(n+3)$ et $(n+1)(n+2)$).

Exercice 15* Pour tout entier $n > 0$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que $S_n = T_n$ pour tout entier $n > 0$.

Exercice 16 On considère les ensembles

$$E = \left\{ x \in [0,1],\, \exists n \in \mathbb{N},\, x < \frac{1}{n+1} \right\} \text{ et } F = \left\{ x \in [0,1],\, \forall n \in \mathbb{N},\, x < \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Les ensembles E et F ont-ils un, une infinité ou aucun élément ?

Exercice 17 Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$. Écrire en utilisant $\forall, \exists, \in$ les assertions

1. $A = \emptyset$; 2. $A \cap B \neq \emptyset$; 3. $A \subset B$; 4. $A \not\subset B$.

Exercice 18 Soient $A = [1, 3]$, $B =]2, 4]$, $C = [1, 2[$. Déterminer

1. $A \cap B$; 2. $A \cup B$; 3. $B \cap C$; 4. $B \cup C$.

Exercice 19

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
   $A_1 =]-\infty, 0]$, $A_2 =]-\infty, 0[$, $A_3 =]0, +\infty[$, $A_4 = [0, +\infty[$, $A_5 =]1, 2[$ et $A_6 = [1, 2[$.
2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$.
   Comparer les ensembles suivants : A^c et $B^c \cap C^c$.

Exercice 20 Soient P_1, P_2, P_3 et P_4 les parties du plan $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\begin{array}{ll} P_1 = \{(x, y), x + y \leq 1\} & P_2 = \{(x, y), x - y \leq 1\} \\ P_3 = \{(x, y), -x + y \leq 1\} & P_4 = \{(x, y), -x - y \leq 1\}. \end{array}$$

1. Represénter $P_1 \cap P_2$, $P_3 \cap P_4$ et $(P_1 \cap P_2) \cap (P_3 \cap P_4)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.
2. Comparer $(P_1 \cap P_2)^c$, $P_1^c \cap P_2^c$, $(P_1 \cup P_2)^c$ et $P_1^c \cup P_2^c$.

Exercice 21 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.

1. Que pensez-vous de l'implication
$$(A \cup B) \not\subset C \Rightarrow (A \not\subset C \,\text{ou}\, B \not\subset C) \ ?$$
2. On suppose qu'on a les deux inclusions suivantes $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer l'inclusion $B \subset C$.

Exercice 22 Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Montrer que

1. $F \subset G \iff F \cup G = G$
2. $F \subset G \iff F \cap C_E G = \emptyset$

Exercice 23 On considère les ensembles $E = \{1, 5\}$, $F = \{2, 3\}$ et $G = \{1, 4\}$. Donner en extension les ensembles suivants :

1. $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(E \cap G)$, $\mathcal{P}(F \cap G)$, $\mathcal{P}(E \cup G)$
2. $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, $\mathcal{P}(F \times (E \cap G))$
3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

Exercice 24 Soient X et Y des ensembles. Démontrer que

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y) \Leftrightarrow X = Y.$$

Exercice 25 Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Écrire le produit cartésien $A \times B$. Quel est le nombre de parties de $A \times B$?

Exercice 26 Soit E et F des ensembles. Si $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$ montrer que $A \times B \subseteq E \times F$.

Exercice 27 Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

Exercice 28 Soient E, F, G et H quatre ensembles.
Comparer les ensembles $(E \times F) \cap (G \times H)$ et $(E \cap G) \times (F \cap H)$.

Exercice 29* Soit un ensemble E et deux parties A et B de E.
On désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Démontrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.
4. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A \triangle A' = A' \triangle A = X$.

Feuille 3 : Bases de logique : Corrections

Exercice 1

1. $\exists x \in I,\ f(x) = 0$
2. $\forall x \in I,\ f(x) = 0$
3. $\exists (x, y) \in I^2,\ f(x) \neq f(y)$ ou encore en niant le fait que la fonction est constante : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) \neq A$.
4. $\forall (x, y) \in I^2,\ f(y) = f(x) \Rightarrow x = y$
5. $\exists x \in I, \forall y \in I,\ f(x) \leq f(y)$
6. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in I,\ f(x) \geq A$
7. $\exists x \in I, \forall\ (f(y) = 0 \Rightarrow x = y)$

Exercice 2

1. La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs entières.
2. La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. Toutes les valeurs entières sont atteintes par la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (ou encore : La fonction q réalise une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$)

Exercice 3

1. Vrai
2. Faux $(\exists x \in \mathbb{R}, x \neq |x|)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x \neq -|x|)$.
3. Faux $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, y - x + x^2 \geq 0$.
4. Vrai car $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 - x + 1 > 0$ en calculant le discriminant de ce polynôme qui vaut -3 et le fait que le coefficient devant x^2 est positif.

Exercice 4

1. $\forall x \in \mathcal{E}, \exists i \in \mathcal{S}, h_i(x) \leq 8$
2. $\exists x \in \mathcal{E}, \forall i \in \mathcal{S}, h_i(x) > 8$. Il existe au moins un élève qui se réveille tous les jours après 8 heures.

Exercice 5*

$$(P_1)\ \forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in I,\ (|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$$

$$(P_2)\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I,\ (|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon).$$

On a $(P_1) \Rightarrow (P_2)$. Dans (P_2) le δ est universel une fois ϵ, il ne dépend pas de x comma c'est le cas dans P_1. De manière générale, $\exists A, \forall B \Rightarrow \forall B, \exists A$.

Ici, la première proposition est la définition de f continue. La deuxième proposition est la définition de f uniformément continue. La différence sera étudiée au cours du semestre.

Exercice 6 La contraposée de la proposition

$$(\mathcal{P})\ (x \neq y) \Longrightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)).$$

est

$$\mathcal{P}'\ ((x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)) \Longrightarrow x = y.$$

Tachons de démontrer $\mathcal{P}'$.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$. Alors, $xy - x + y - 1 = xy - y + x - 1$ qui est équivalent à $x = y$.

La proposition $\mathcal{P}'$ est démontrée et don $\mathcal{P}$ aussi.

Exercice 7 Principe des tiroirs.

On va montrer le principe des tiroir par l'absurde. Supposons que cela soit faux. Il existe $n \in \mathcal{N}$ tel que l'on puisse ranger $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs avec au plus 1 paire de chaussettes dans chaque tiroir. Soit T_i le nombre de chaussette dans le tiroir i. On compte alors les paires de chaussettes :

$$\sum_{i=1}^{n} T_i \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n \neq n+1$$

Contradiction ! Le principe des tiroirs est donc vrai.

Exercice 8 Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

1. $\exists i \in [\![1, n]\!]$, $x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}$
2. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}$
3. Supposons que la propriété est fausse. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}$. En sommant, on obtient :

$$x_n - x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \ .$$

Or $x_n - x_0 \leq 1$. Contradiction !

On a donc : $\exists i \in [\![1, n]\!]$, $x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 9

1. Si $x > 2$, $|x-2| = x - 2 < x^2 - 2x + 3$.
2. Démontrer $(\mathcal{P})$: si n est un entier strictement positif alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.
   Démontrons le par l'absurde. Supposons que $n > 0$ est un entier tel qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ avec $q^2 = n^2 + 1$. Alors $(q-n)(q+n) = 1$. Seuls 1 et -1 sont inversibles dans $\mathbb{Z}$. On a donc l'alternative $(q+n) = \pm 1$.
   – Si $(q+n) = 1$, $n > 0$ et $q \geq 0$ donne $q = 0$ et donc $n = 1$. Ce qui est impossible.
   – Si $(q+n) = -1$. Impossible car q et n sont plus grands que 0.
   On en déduit la véracité de $\mathcal{P}$.
3. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On se place dans le cas où np est impair. Alors n et p sont impairs. Donc $n = \pm 1[4]$ et $p = \pm 1[4]$. Donc $n - p$ et $n + p$ sont pairs et au moins un de ces deux nombres est divisible par 4. De ce fait $(n-p)(n+p) = 0[8]$.

Exercice 10

Ceci a déjà été montré durant le td 1 par récurrence : pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Notons $I = \sum\limits_{i=1}^{n} (2i-1)^2$ et $J = \sum\limits_{i=1}^{n} (2i)^2$. Nous avons

$$I + J = \sum_{i=1}^{2n} i^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}$$

et

$$J = 4 \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On en déduit que $I = (I+J) - J = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$.

Exercice 11 Soit $n \geq 1$ et la proposition

$$(\mathcal{P}_n) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Procédons par récurrence.

1. Initialisation : $\frac{1}{6} = \frac{1.4}{4.2.3}$ ok !
2. Récurrence : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \geq 1$. On a

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n(n+3)^2 + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} == \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$$

   La proprosition $\mathcal{P}_n$ est vrai.
3. Conclusion $\forall n \geq 1$ $\mathcal{P}_n$ est vrai.

Exercice 12 On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier n et pour tout réel $x > 0$, on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

1. La récurrence sur n ?
2. L'hypothèse de récurrence au rang n est

$$\forall x > 0, (1+x)^n > 1 + nx \ .$$

3. Simple calcul.
4. (a) Initialisation : Pour $n = 1$ on a égalité, la proposition est vrai.
   (b) Récurrence : Supposons $\mathcal{P}_n$ vrai pour un certain n.

$$\forall x > 0, (1+x)^n > 1 + nx \ .$$

   Comme $1 + nx > 0$, on a :

$$(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x$$

   (c) Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0 (1+x)^n > 1 + nx$.

Exercice 13 Soit $\mathcal{P}_n$ l'hypothèse de récurrence : $u_n \leq 3^n$ et $u_{n+1} \leq 3^{n+1}$.

1. Initialisation pour $n = 0$: $1 \leq 3^0$ et $3 \leq 3^1$.
2. Récurrence : Supposons $\mathcal{P}_n$ vrai pour un certain n. Alors

$$u_{n+2} = 4u_n + u_{n+1} \leq 4.3^n + 3^{n+1} = 7.3^n \leq 3^{n+2} \ .$$

   De plus, d'après $\mathcal{P}_n$, $u_{n+1} \leq 3^{n+1}$. $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vrai.

Exercice 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n(n+3)(n+1)(n+2) &= (n^2+n+1-1)(n^2+3n+1+1) \\ &= (n^2+3n+1)^2+1 \ . \end{aligned}$$

Exercice 15*

On utilise récurrence sur n. Il est facile à vérifier le cas $n = 1$. Supposons vrai le cas pour n : $S_n = T_n$. Alors $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = T_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = (T_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = T_{n+1}$.

Exercice 16

E a une infinité d'éléments. En effet, $E = [0, 1[$. F a un seule élément : $F = \{0\}$.

Exercice 17

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n \notin A$
2. $\exists n \in A, n \in B$
3. $\forall n \in A, n \in B$
4. $\exists n \in B, n \notin A$.

Exercice 18 $A \cap B =]2, 3]$; $A \cup B = [1, 4]$; $B \cap C = \emptyset$; $B \cup C = [1, 2[\cup]2, 4]$.

Exercice 19

1. $A_1^c = A_3$, $A_2^c = A_4$, $A_3^c = A_1$, $A_4^c = A_2$, $A_5^c =]-\infty, 1] \cup [2, \infty[$ et $A_6 =]-\infty, 1[\cup[2, \infty[$.
2. Comme $A = B \cup C$, on a $A^c = (B \cup C)^c = B^c \cap C^c$.

Exercice 20 Voir en TD

Exercice 21 1. Vrai
2. Comme $A \cup B \subset A \cup C$, on a $B \cap A^c = (A \cup B) \cap A^c \subset (A \cup C) \cap A^c = C \cap A^c$. Donc $B = B \cap E = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c) \subset (C \cap A) \cup (C \cap A^c) = C \cap (A \cup A^c) = C \cap E = C$.

Exercice 22 1. $\Longrightarrow$: $F \subset G \Longrightarrow F \cup G \subset G \cup G = G$.
$\Longleftarrow$: $F \cup G \subset G \Longrightarrow G^c \subset (F \cup G)^c = F^c \cap G^c \subset F^c \Longrightarrow G^c \subset F^c \Longrightarrow F \subset G$.
2. $\Longrightarrow$: $F \subset G \Longrightarrow F \cap G^c \subset G \cap G^c = \emptyset$.
$\Longleftarrow$: $F = F \cap E = F \cap (G \cup G^c) = (F \cap G) \cup (F \cap G^c) = (F \cap G) \cup \emptyset = F \cap G \subset G$.

Exercice 23 $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, E\}$
$\mathcal{P}(E \cap G) = \{\emptyset, \{1\}\}$
$\mathcal{P}(F \cap G) = \{\emptyset\}$
$\mathcal{P}(E \cup G) = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}\{1, 4, 5\}\}$
$\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{3\}), (\emptyset, F), (\{1\}, \emptyset),$
$(\{1\}, \{2\}), (\{1\}, \{3\}), (\{1\}, F), (\{5\}, \emptyset), (\{5\}, \{2\}), (\{5\}, \{3\}), (\{5\}, F), (E, \emptyset), (E, \{2\}), (E, \{3\})(E, F)\}$.
$\mathcal{P}(F \times (E \cap G)) = \{\emptyset, \{(2, 1)\}, \{(3, 1)\}, \{(2, 1), (3, 1)\}\}$.
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$: voir en TD, il y a 16 éléments.

Exercice 24 Évidement on a $X = Y$ implique que $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y)$. Inversement, si $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y) =: P$, alors on a donc $X = \bigcup_{S \in \mathcal{P}(X)} S = \bigcup_{S \in P} S = \bigcup_{S \in \mathcal{P}(Y)} S = Y$.

Exercice 25 $A \times B = \{(a_i, b_j) \mid 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 5\}$.
$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \times 5 = 20$ et donc $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^{20}$.

Exercice 26 Pour tout élément $s \in A \times B$, par la définition du produit cartésien, s s'écrit comme $s = (x, y)$ avec $x \in A$ et $y \in B$. Alors $x \in A \subset E$ et $y \in B \subset F$. Donc $x \in E$ et $y \in F$. D'où, $t = (x, y) \in E \times F$.

Exercice 27 $\subset$: Comme $E \subset E \cup F$, par Ex. 26, $E \times G \subset (E \cup F) \times G$. Par le même arguement, $F \times G \subset (E \cup F) \times G$, donc $(E \times G) \cup (F \times G) \subset (E \cup F) \times G$.
$\supset$: soit (x, y) un élément de $(E \cup F) \times G$, alors $x \in E \cup F$ et $y \in G$. Si $x \in E$, alors $(x, y) \in E \times G \subset (E \times G) \cup (F \times G)$; Si $x \in F$, alors $(x, y) \in F \times G \subset (E \times G) \cup (F \times G)$. En tout cas, $(x, y) \in (E \times G) \cup (F \times G)$.

Exercice 28 $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.

Exercice 29* 1, 2 : Omis.
3 : Unicité : si tel X existe, on impose $A = X$, alors $A \triangle X = X \triangle X = \emptyset$. Donc X est forcément $\emptyset$.
Existence : montrons que $X = \emptyset$ satisfait notre condition : pour tout A, $A \triangle \emptyset = (A \cup \emptyset) \backslash (A \cap \emptyset) = A \backslash \emptyset = A$.
4 : Unicité : pour un A fixé, si A' satisfait $A \triangle A' = \emptyset$. Par la définition de $\triangle$, on a donc $A \backslash A' = A' \backslash A = \emptyset$. Ceci implique que $A = A'$.
Existence : il est évident que $A' = A$ satisfait la condition : $A \triangle A = \emptyset$.