Feuille 4 : Sur les applications

Exercice 1

1. Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$
   Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on déduire de la composition de fonctions ?
2. Dans les exemples suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$:

$$h_1(x) = \sqrt{3x-1} \quad h_2(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \quad h_3(x) = \frac{1}{x+7}$$

Exercice 2 Soit la fonction $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) = 2x+1 \end{array}$

Déterminer $(f \circ f \circ f \circ f \cdots \circ f)(x)$ (où f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit une application affine f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que si on a $f \circ f = f$, alors f admet un point fixe (i.e. il existe un $x \in \mathbb{R}$ solution de l'équation $f(x) = x$).

Exercice 4

1. On note f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : pour tout x réel, $f(x) = 2x + 3$. Pour $m \in \mathbb{R}$, on note g_m l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : pour tout x réel, $g_m(x) = mx - 1$.
   Calculer $f \circ g_m$ et $g_m \circ f$, puis déterminer $\{m \in \mathbb{R} \mid g_m \circ f = f \circ g_m\}$.
2. Soit E un ensemble et soit u, v deux applications de E dans E. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que si α est un point fixe de u, alors $v(\alpha)$ est lui aussi un point fixe de u.
3. Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $h_{a,b}$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : pour tout x réel, $h_{a,b}(x) = ax + b$ puis $\mathcal{E} = \{h_{a,b} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ b \in \mathbb{R}\}$.
   a) Montrer que pour tout $h \in \mathcal{E}$, h possède un et un seul point fixe.
   b) Montrer que pour tous h, $k \in \mathcal{E}$, $(h \circ k = k \circ h) \Rightarrow$ (h et k ont le même point fixe).
   c) Peut-on remplacer le $\Rightarrow$ par un $\iff$ dans la question précédente ?

Exercice 5 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$; 2. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$; 3. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto n \end{array}$; 4. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x \end{array}$

5. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 8x+3 \end{array}$; 6. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \{14\} \\ x & \mapsto 14 \end{array}$; 7. $\begin{array}{rl} f : \{17\} & \longrightarrow \{12; 17\} \\ x & \mapsto 17 \end{array}$ 8. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$

9. $\begin{array}{rl} f : \{0\} & \longrightarrow \{0\} \\ x & \mapsto 0 \end{array}$; 10. $\begin{array}{rl} f : \{1\} & \longrightarrow \{1/2\} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x+1} \end{array}$; 11. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto n+1 \end{array}$; 12. $\begin{array}{rl} g : \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n & \mapsto n+1 \end{array}$

13. $\begin{array}{rl} h : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, x-y) \end{array}$; 14. $\begin{array}{rl} k : \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$.

Exercice 6 Soit a et b deux réels, avec $b \neq 0$.
1) On définit $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $h_1(x) = a - x$. Vérifier que $h_1 \circ h_1 = \mathrm{Id}$.
2) On veut définir une application $h_2 : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \setminus \{a\}$ par $h_2(x) = \dfrac{b}{x-a} + a$. Justifier que cette définition est possible, puis montrer que $h_2 \circ h_2 = \mathrm{Id}$.
3) Montrer que h_2 est bijective.

Exercice 7 Soient les ensembles A, B, C et D, et les applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$.
1. Montrer que : $g \circ f$ injective $\Longrightarrow$ f injective et que $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow$ g surjective.
2. Montrer que : $\Big(g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives$\Big) \iff \Big(f, g$ et h sont bijectives$\Big)$.

Exercice 8 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ?

$$\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}; \qquad \tan_{|[0,\frac{\pi}{2}]} \to \mathbb{R}; \qquad \tan_{|]\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}[} \to \mathbb{R}.$$

Exercice 9 Soit f l'application de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ dans lui-même définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$. Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = \{1, 3\}$, $A = \{3, 4\}$, $A = \{\}$, puis déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$.

Exercice 10 Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.
1. $\tan(\{0\})$; 2. $\sin^{-1}(\{2\})$; 3. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
4. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-1/2, 4/3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$; 5. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
6. $(\cos_{|[0,\pi]})^{-1}([0, 1])$; 7. $(\cos_{|[3,7]})^{-1}([0, 1])$; 8. $\cos^{-1}([0, 1])$;
9. $\exp(]-\infty, 2])$; 10. $\exp^{-1}([-1, e])$ 11. $\ln(\mathbb{R}_-)$; 12. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.

Exercice 11 Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$. Soient également B_1, B_2 deux parties de F et A_1, A_2 deux parties de E

1) Démontrer que $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. La réciproque est-elle vraie ?
2) Démontrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3) Démontrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Exercice 12 Soit $f : X \to Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est injective ;
ii) Pour tous A_1, A_2 parties de X, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Exercice 13 Soit l'application $f : E \to F$ où E et F sont des ensembles finis.
Pour $b \in F$ on note m_b le nombre d'antécédents de b.

1) Que vaut $\displaystyle\sum_{b \in F} m_b$?
2) Montrer que f injective $\Longrightarrow \mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$.
3) Montrer que f surjective $\Longrightarrow \mathrm{Card}(F) \leq \mathrm{Card}(E)$.

Exercice 14 Soit $f : E \to F$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\exists\, G \subset F$ telle que la restriction de $f : E \to G$ existe et est bijective ;
ii) f est injective.

Exercice 15 Soit l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(2k) = k$ et $f(2k + 1) = -k - 1$.
Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$.

Exercice 16 Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout ensemble W et pour tout $g : W \to X$ et tout $h : W \to X$, on a $f \circ g = f \circ h \iff g = h$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout ensemble Z et pour tout $g : Y \to Z$ et tout $h : Y \to Z$, on a $g \circ f = h \circ f \iff g = h$.

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

1) f est-elle injective ? surjective ?
2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3) Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4) Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 1

1) Les deux composées demandées vont de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Soit x un réel, on calcule successivement :

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2 \text{ et } (g \circ f)(x) = g[f(x)] = (3x^2 + 1)^2 - 1 = 9x^4 + 6x^2.$$

Pour le "que peut-on déduire", sans doute attend-on une remarque sur la non-commutation de f et g. Pour la faire correctement, il ne suffit pas de constater qu'on a trouvé deux expressions différentes : peut-être (aussi improbable soit-ce) expriment-elles la même fonction de deux façons différentes ! Le plus sûr est tout de même de constater que $(f \circ g)(0) = -2 \neq 0 = (g \circ f)(0)$. Une fois cette explicitation faite, il ne fait plus de doute que $f \circ g \neq g \circ f$.

2) L'énoncé ne précisant pas les ensembles de départ et d'arrivée, on s'autorisera -même si ce n'est pas totalement rigoureux- d'en faire autant. Ceci posé, on constate sans mal qu'on peut utiliser $u_1(x) = \sqrt{x}$, $u_2(x) = 3x - 1$, $v_1(x) = \sin x$, $v_2(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$, $u_3(x) = 1/x$ et $v_3(x) = x + 7$. Procéder ainsi est souvent utile (par exemple pour étudier des sens de variation avec économie de calculs) ; on doit quand même noter qu'en dehors des réponses "intelligentes" fournies ci-avant, on peut aussi, si on est pervers, fournir des réponses idiotes mais parfaitement correctes, par exemple $u_2(x) = \sin(x + \dfrac{\pi}{3})$ et $v_2(x) = x + \dfrac{\pi}{6}$. Mais à quoi bon ?

Exercice 2

Pour $x \in \mathbf{R}$, on calcule successivement : $(f \circ f)(x) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$ puis

$$(f \circ f \circ f)(x) = f[(f \circ f)(x)] = f(4x + 3) = 2(4x + 3) + 1 = 8x + 7.$$

Soit $x \in \mathbf{R}$. Notons (H_n) l'énoncé suivant :

$$(H_n) \text{“} f^n(x) = 2^n x + 2^n - 1 \text{”}$$

* L'énoncé (H_1) est vrai, car $2^1 x + 2^1 - 1 = 2x - 1 = f(x)$.
* Soit $n \geq 1$ un entier, supposons (H_n). On peut alors calculer :

$$f^{n+1}(x) = f[f^n(x)] = f(2^n x + 2^n - 1) = 2(2^n x + 2^n - 1) + 1 = 2^{n+1}x + 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1}x + 2^{n+1} - 1.$$

et l'énoncé (H_{n+1}) est également vérifié.
On a ainsi montré que pour tout $n \geq 1$, $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$.
* Par application du principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, (H_n) est vrai.

Exercice 3

Supposons $f \circ f = f$. Alors $f[f(0)] = (f \circ f)(0) = f(0)$ et $f(0)$ est donc un point fixe de f. (La question n'utilise pas le caractère affine de f !).

Exercice 4

1) Soit m un réel. Les deux applications à calculer vont toutes deux de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Pour x réel, on calcule sans mal :

$$(f \circ g_m)(x) = 2(mx - 1) + 3 = 2mx + 1 \text{ et } (g_m \circ f)(x) = m(2x + 3) - 1 = 2mx + 3m - 1.$$

Notons A l'ensemble à déterminer. Si m est élément de A, alors en particulier $(f \circ g_m)(0) = (g_m \circ f)(0)$ soit $1 = 3m - 1$ ce qui se produit si et seulement si $m = 2/3$. Réciproquement, si $m = 2/3$, alors $3m - 1 = 1$, et les deux applications $f \circ g_m$ et $g_m \circ f$ sont toutes deux représentées par la même formule $x \mapsto 2mx + 1$ et sont donc égales (elles ont par ailleurs les mêmes ensembles de départ et d'arrivée), donc $2/3 \in A$. On conclut que $A = \{2/3\}$.

2) Soit α un point fixe de u. On calcule alors $v(\alpha) = v[u(\alpha)] = (v \circ u)(\alpha) = (u \circ v)(\alpha) = u[v(\alpha)]$. Ceci prouve que $v(\alpha)$ est laissé fixe par u.

3) a) Soit $h \in \mathcal{E}$. Notons $a \neq 1$ et b deux réels tels que pour tout x réel on ait $h(x) = ax + b$. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. α est fixe pour $h \iff a\alpha + b = \alpha \iff (a-1)\alpha = -b \iff \alpha = b/(1-a)$. On constate ainsi qu'il y a un et un seul point fixe pour h.

b) Soit h et k deux éléments de $\mathcal{E}$ qui commutent. Notons α l'unique point fixe de h. En appliquant la question 2 à h, k et α, on constate que $k(\alpha)$ est aussi un point fixe de h. Vu l'unicité du point fixe de h, on en déduit que $\alpha = k(\alpha)$, et donc que α est aussi le point fixe de k.

c) La réponse est oui. Pour le montrer, soit h et k deux éléments de $\mathcal{E}$ qui ont le même point fixe ; notons $a \neq 1$, $c \neq 1$, b et d quatre réels tels que pour tout x réel on ait $h(x) = ax + b$ et $k(x) = cx + d$. Un calcul simple -on peut presque le faire mentalement, après l'expérience de la question 1, dès lors qu'on ne cherche pas à expliciter les deux constantes qui y apparaissent- assure qu'il existe deux constantes réelles e et f telles que pour tout x réel, $(h \circ k)(x) = acx + e$ et $(k \circ h)(x) = acx + f$. Notons α le point fixe commun de h et k. Alors $(h \circ k)(\alpha) = h[k(\alpha)] = h(\alpha) = \alpha$; de la même façon, α est également fixe par $k \circ f$. On conclut que $\alpha = ac\alpha + e = ac\alpha + f$ puis que $e = f$ puis que $h \circ k = k \circ h$

Exercice 5

1) f n'est pas injective car $f(-1) = f(1)$, elle n'est donc pas bijective. Elle n'est pas surjective car -1 n'a pas d'antécédent.

2) f n'est pas injective car $f(-1) = f(1)$, elle n'est donc pas bijective. Soit $y \in \mathbf{R}^+$, et posons $x = \sqrt{y}$. On constate que $f(x) = (\sqrt{y})^2 = y$: x est donc un antécédent de y. Ceci prouve que f est surjective.

3) On reconnaît ici l'application identique, notoirement bijective (et donc injective et surjective).

4) Soit x_1 et x_2 deux réels positifs tels que $f(x_1) = f(x_2)$, soit $2x_1 = 2x_2$. En divisant par 2, on conclut que $x_1 = x_2$: l'application f est donc injective. En revanche, le réel -2 n'a pas d'antécédent (l'équation $2x = -2$, d'inconnue x, n'a manifestement pas de solution positive), et f n'est pas surjective, donc pas bijective.

5) Soit y un réel. Pour x réel,

$$f(x) = y \iff 8x + 3 = y \iff 8x = y - 3 \iff x = (y-3)/8.$$

On conclut que y possède un antécédent et un seul, et ceci prouve que f est bijective - et aussi, c'est fatal, injective et surjective.

6) f n'est pas injective car $f(-1) = f(1)$, elle n'est donc pas bijective. Soit $y \in \{14\}$, et donc $y = 14$. On constate que $f(0) = 14 = y$ et que y possède donc au moins un antécédent : f est donc surjective.

7) Soit x_1 et x_2 deux éléments de $\{17\}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Puisqu'ils appartiennent à $\{17\}$, x_1 et x_2 sont tous deux égaux à 17, et donc égaux entre eux. f est donc injective. En revanche, l'élément 12 de l'ensemble d'arrivée n'a pas d'antécédent, et f n'est pas surjective, donc pas bijective.

8) Soit x_1 et x_2 deux réels strictement positifs tels que $f(x_1) = f(x_2)$, soit $1/x_1 = 1/x_2$. En prenant les inverses, on obtient $x_1 = x_2$ et on conclut à l'injectivité. En revanche, l'élément -1 de l'ensemble d'arrivée n'a pas d'antécédent, f n'est donc pas surjective, et pas non plus bijective.

9) Soit y un élément de l'ensemble d'arrivée $\{0\}$, et donc $y = 0$. L'unique élément de l'ensemble de départ, à savoir 0, est un antécédent de y, qui en possède donc un et un seul. Ceci prouve que f est bijective - et aussi, c'est vendu avec, injective et surjective. On notera que cette preuve peut se recopier à l'identique pour n'importe quelle application dont les ensembles de départ et d'arrivée n'ont chacun qu'un seul élément.

10) Les ensembles de départ et d'arrivée n'ont chacun qu'un élément, on n'a plus qu'à recopier la preuve écrite à la question précédente en remplaçant les deux premiers 0 qui y figurent par des 1/2 et le troisième par un 1. Pour éviter la répétition, on remplacera aussi "vendu avec" par "incontournable".

11) Soit n_1 et n_2 deux entiers positifs tels que $f(n_1) = f(n_2)$, soit $n_1 + 1 = n_2 + 1$. En soustrayant 1, on conclut que $n_1 = n_2$: l'application f est donc injective. En revanche, l'élément 0 de l'ensemble d'arrivée n'a pas d'antécédent, f n'est donc pas surjective, et pas non plus bijective.

12) Soit r un entier relatif. Pour $n \in \mathbf{Z}$,

$$f(n) = r \iff n + 1 = r \iff n = r - 1.$$

On conclut que r possède un antécédent et un seul, et ceci prouve que f est bijective - et aussi, c'est automatique, injective et surjective.

13) Soit (s,t) un couple de réels. Pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$f((x,y)) = (s,t) \iff \begin{cases} x+y=s \\ x-y=t \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{s+t}{2} \\ y = \dfrac{s-t}{2} \end{cases}$$

On conclut que (s,t) possède un antécédent et un seul, et ceci prouve que f est bijective -et aussi, dans la foulée, injective et surjective.

14) Soit x_1 et x_2 deux réels différents de 1 tels que $f(x_1) = f(x_2)$, c'est-à-dire $\dfrac{x_1+1}{x_1-1} = \dfrac{x_2+1}{x_2-1}$. En effectuant les produits en croix, on obtient : $x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1$ puis $x_2 - x_1 = x_1 - x_2$ et finalement $x_1 = x_2$: l'application f est donc injective. En revanche, considérons l'élément $y = 1$ de l'ensemble d'arrivée ; soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Alors $f(x) = 1$ entraîne $x + 1 = x - 1$ donc $1 = -1$ qui est manifestement impossible. C'est donc que $y = 1$ n'a pas d'antécédent, et que f n'est pas surjective, donc pas non plus bijective.

Exercice 6

1) Pour h_1, les choses sont simples : pour x réel, on calcule $h_1(h_1(x)) = a - (a - x) = a + x - a = x$. On conclut que $h_1 \circ h_1 = \mathrm{Id}$.

2) Pour h_2, une première difficulté est de décoder l'implicite dans la question : que signifie "peut définir une application" ? Cela invite en pratique à se pencher sur l'ensemble de départ proposé -c'est généralement creux et ici c'est creux- et, plus subtilement, à regarder de près ce qu'on nous propose comme ensemble d'arrivée.
Tout d'abord, pour $x \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$, la formule proposée pour définir $h_2(x)$ a bien un sens (on ne divise pas par zéro). Il n'y aurait donc aucun problème à définir par cette formule une application de $\mathbf{R} \setminus \{a\}$ vers $\mathbf{R}$.
Mais on nous demande implicitement de vérifier une chose supplémentaire, à savoir que la formule fournit bien un élément de $\mathbf{R} \setminus \{a\}$ et qu'on "peut" donc restreindre l'ensemble d'arrivée à $\mathbf{R} \setminus \{a\}$.

Une fois qu'on a compris ce qu'il fallait faire, l'exécution est assez simple : pour x dans $\mathbf{R} \setminus \{a\}$, le réel $\dfrac{b}{x-a}$ n'est pas nul (à cause de l'hypothèse $b \neq 0$), donc le réel $\dfrac{b}{x-a} + a$ n'est pas égal à a ; autrement dit il appartient bien à $\mathbf{R} \setminus \{a\}$.
Ce préalable étant posé, l'examen de $h_2 \circ h_2$ est aussi facile que celui de $h_1 \circ h_1$ réalisé plus haut. Il est tout de même prudent ici de constater que tant son ensemble de départ que son ensemble d'arrivée est $\mathbf{R} \setminus \{a\}$. Une fois ceci observé, on calcule, pour x dans ce domaine :

$$h_2[h_2(x)] = \frac{b}{\left(\frac{b}{x-a} + a\right) - a} = \frac{b}{\frac{b}{x-a}} + a = (x-a) + a = x.$$

3) En notant très provisoirement $k_2 = h_2$, l'information selon laquelle $h_2 \circ h_2 = \mathrm{Id}$ fournit aussi les informations $k_2 \circ h_2 = h_2 \circ k_2 = \mathrm{Id}$. Mais un théorème bien connu nous affirme que l'existence d'un tel k_2 entraîne la bijectité de h_2.

Exercice 7

Supposons $g \circ f$ injective, et soit x_1, x_2 deux éléments de A tels que $f(x_1) = f(x_2)$. En appliquant g on obtient $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, puis vu l'injectivité de $g \circ f$ on conclut que $x_1 = x_2$. L'application f est donc injective.
Supposons $g \circ f$ surjective, et soit z un élément de C. Par la surjectivité de $g \circ f$, on peut introduire un $x \in A$ tel que $(g \circ f)(x) = z$. Ceci peut être réécrit comme $g[f(x)] = z$; on constate alors que $f(x)$ est un antécédent de z par g. L'application g est donc surjective.
Supposons $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives, donc injectives et surjectives. Par le deuxième item de l'exercice, g est surjective ; en appliquant la preuve du premier item à g et h, g est bijective. Une fois qu'on sait ça, on peut utiliser la bijection réciproque g^{-1} ; comme f est égale à la composée $g^{-1} \circ (g \circ f)$, qui est une composée de deux bijections, elle est aussi bijective. De même h, puisqu'on peut l'écrire $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$.

Exercice 8

1) Injective et surjective.

2) Injective, mais pas surjective.

3) Injective et surjective.

Exercice 9

On ne peut guère en dire plus que donner les réponses justes, qui sont $\{4\}$, $\{2,4\}$, $\{2\}$ et $\{\}$, puis $\{3,4\}$, $\{2,3,4\}$ et $\{\}$.

Exercice 10

1) $\{0\}$.

2) $\{\}$.

3) $[-1,1]$.

4) $[-1/2,1]$.

5) $[0,1]$.

6) $[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

7) $[\dfrac{3\pi}{2},7]$.

8) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}[(2k-1)\dfrac{\pi}{2},(2k+1)\dfrac{\pi}{2}]$.

9) $]0,e^2]$.

10) $]-\infty,1]$.

11) Cette question n'a aucun sens : c'est un piège grossier.

12) $[e^3,+\infty[$.

Exercice 11

1) Supposons $B_1 \subset B_2$, et soit $x \in f^{-1}(B_1)$. Alors $f(x) \in B_1$, donc $f(x) \in B_2$, donc $x \in f^{-1}(B_2)$. L'inclusion est prouvée.
La réciproque peut être fausse : on peut -par exemple- reprendre l'exemple de l'exercice 9, avec $B_1 = \{2,3\}$ et $B_2 = \{2\}$.

2) Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$. On peut introduire un $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $f(x) = y$. Comme x est dans A_1, on voit que $y \in f(A_1)$. De même, la présence dans A_2 de x entraîne que $y \in f(A_2)$. On conclut que $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. L'inclusion est prouvée.
L'inclusion réciproque peut être fausse : toujours dans le même exemple, essayer $A_1 = \{3\}$ et $A_2 = \{4\}$.

3) On va montrer la double inclusion.
Soit dans un premier temps un $y \in f(A_1 \cup A_2)$. On peut introduire un $x \in A_1 \cup A_2$ pour lequel $f(x) = y$. Si x est dans A_1, y est dans $f(A_1)$ et donc dans $f(A_1) \cup f(A_2)$; sinon c'est que x est dans A_2, mézalor y est dans $f(A_2)$ et donc là encore dans $f(A_1) \cup f(A_2)$. L'inclusion est prouvée.
Soit dans un second temps un $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Si y est dans $f(A_1)$, on peut introduire un x de A_1 et donc *a fortiori* de $A_1 \cup A_2$ tel que $f(x) = y$; si y n'y est pas il est dans $f(A_2)$ et on peut faire pareil avec un x de A_2. Dans les deux cas on a prouvé que $y \in f(A_1 \cup A_2)$, donc l'inclusion réciproque.

Exercice 12

Montrons d'abord que i) implique ii). On suppose f injective.
Soit A_1 et A_2 deux parties de E. L'inclusion $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ a été prouvée à l'exercice précédent, passons à l'autre. Soit donc un $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Comme y est dans $f(A_1)$, on peut introduire un $x_1 \in A_1$ tel que $f(x_1) = y$. De même un x_2 dans A_2 tel que $f(x_2) = y$. On voit alors que $f(x_1) = f(x_2)$ et, ça tombe bien tout de même, f est injective. On conclut que $x_1 = x_2$ et donc $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$. L'élément y est donc l'image d'un élément de $A_1 \cap A_2$, et donc $y \in f(A_1 \cap A_2)$. L'inclusion manquante ne l'est plus.

Montrons maintenant que ii) implique i). Il est pratique de le faire par contraposition, supposons donc f non injective et montrons l'existence de parties A_1 et A_2 pour lesquelles l'égalité proposée est vraie. Ce n'est pas bien difficile : il suffit de calquer l'exemple fourni au 2 de l'exercice précédent dans ce contexte légèrement plus abstrait. Puisque f n'est pas bijective, on peut introduire deux éléments distincts x_1 et x_2 de X qui ont la même image par f, disons y. Il suffit pour conclure d'observer que $f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\{\}) = \{\}$ tandis que $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{y\} \cap \{y\} = \{y\}$: ce n'est pas la même chose.

Exercice 13

1) La somme proposée est le nombre total d'éléments de E qui sont antécédents de quelqu'un. Mais, dans une application, tous les éléments de l'ensemble de départ sont antécédents de quelqu'un, à savoir de leur image. La réponse attendue était donc $\operatorname{Card} E$.
On peut trouver ça un peu littéraire, craindre l'entourloupe. On peut faire plus formel si ça peut rassurer : pour $(a, b) \in E \times F$, notons $\epsilon_{a,b}$ le nombre entier qui, par définition, vaut 1 si $b = f(a)$ et 0 sinon. Alors pour tout $a \in E$,

$$\sum_{b \in F} \epsilon_{a,b} = \sum_{\substack{b \in F \\ b=f(a)}} \epsilon_{a,b} + \sum_{\substack{b \in F \\ b \neq f(a)}} \epsilon_{a,b} = \sum_{\substack{b \in F \\ b=f(a)}} 1 + \sum_{\substack{b \in F \\ b \neq f(a)}} 0 = \operatorname{Card}\{b \in F \mid b = f(a)\} = 1$$

tandis que pour tout $b \in F$,

$$\sum_{a \in E} \epsilon_{a,b} = \sum_{\substack{a \in E \\ f(a)=b}} \epsilon_{a,b} + \sum_{\substack{a \in E \\ f(a) \neq b}} \epsilon_{a,b} = \sum_{\substack{a \in E \\ f(a)=b}} 1 + \sum_{\substack{a \in E \\ f(a) \neq b}} 0 = \operatorname{Card}\{a \in E \mid f(a) = b\} = m_b$$

et donc,

$$\sum_{b \in F} m_b = \sum_{b \in F} \left(\sum_{a \in E} \epsilon_{a,b} \right) = \sum_{a \in E} \left(\sum_{b \in F} \epsilon_{a,b} \right) = \sum_{a \in E} 1 = \operatorname{Card} E.$$

2) Supposons f injective. Alors pour tout b dans F, on a l'inégalité : $m_b \leq 1$. Sommons ceci sur b : on obtient $\sum_{b \in F} m_b \leq \sum_{b \in F} 1$, et donc $\operatorname{Card} E \leq \operatorname{Card} F$.
3) Supposons f surjective. Alors pour tout b dans F, on a l'inégalité : $1 \leq m_b$. Sommons ceci sur b : on obtient $\sum_{b \in F} 1 \leq \sum_{b \in F} m_b$, et donc $\operatorname{Card} F \leq \operatorname{Card} E$.

Exercice 14

Montrons que i) implique ii). Supposons i) vraie ; on peut introduire un ensemble G comme dans l'énoncé de i, et on peut noter g la restriction de f de E vers G. Soit alors x_1 et x_2 deux éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Par définition d'une restriction, on a $g(x_1) = f(x_1)$ et $g(x_2) = f(x_2)$, donc $g(x_1) = g(x_2)$. Or g est bijective, donc injective, donc $x_1 = x_2$. On conclut que f est injective.
Montrons que ii) implique i). Supposons f injective, et notons $G = f(E)$. Il est possible de définir la restriction g de f de E vers G puisque $f(E) \subset G$. Soit maintenant x_1 et x_2 dans E tels que $g(x_1) = g(x_2)$. Par définition d'une restriction, on a $g(x_1) = f(x_1)$ et $g(x_2) = f(x_2)$, donc $f(x_1) = f(x_2)$. Or f est supposée injective, donc $x_1 = x_2$. On conclut que g est injective. Soit maintenant un $y \in G$. Comme $G = f(E)$, on peut introduire un $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Par définition d'une restriction, $g(x) = f(x)$, donc on a aussi $g(x) = y$ et on a trouvé un antécédent de y par g. Ceci prouve que g est surjective.

Exercice 15

On va commencer par montrer un résultat préparatoire.
Soit n un entier naturel. Si n est pair, et s'écrit donc sous la forme $2k$ il est immédiat vu la définition de f que $f(n)$ est positif ou nul. Supposonsau contraire n impair. L'entier n peut alors se mettre sous la forme $2k + 1$ avec k entier naturel ; son image est alors $-k - 1 \leq -1 < 0$.
On a donc montré l'équivalence suivante :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad n \text{ est pair} \iff 0 \leq f(n).$$

Soit r un entier relatif (élément de $\mathbf{Z}$), cherchons les antécédents de r par l'application f.
* Premier cas : si $r \geq 0$. Vu le résultat préparatoire, les antécédents de r sont à rechercher parmi les nombres pairs, c'est-à-dire les nombres de la forme $2k$, $k \in \mathbf{N}$. Soit $k \in \mathbf{N}$, alors $f(2k) = r \iff k = r$: l'entier r possède donc un et un seul antécédent par f (à savoir $2r$).
* Deuxième cas : si $r < 0$. Vu le résultat préparatoire, les antécédents de r sont à rechercher parmi les nombres impairs, c'est-à-dire les nombres de la forme $2k+1$, $k \in \mathbf{N}$. Soit $k \in \mathbf{N}$, alors $f(2k+1) = r \iff -k-1 = r \iff k = -r-1$. Notons de plus que comme $r < 0$ est entier, on a l'inégalité $r \leq -1$ donc $1 \leq -r$ donc $0 \leq -r-1$ et donc $-r-1 \in \mathbf{N}$. On a ainsi trouvé un et un seul antécédent pour r par f (à savoir $2(-r-1)+1 = -2r-1$).
Dans chaque cas, r possède un et un seul antécédent : l'application f est donc une bijection.
Remarque : *a posteriori*, maintenant qu'on a trouvé des formules explicites pour l'antécédent unique de r, une autre piste de rédaction de la solution est visible, tentante et peut être explorée avec succès : on définit une application $g\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ par $g(r) = 2r$ si $0 \leq r$ et $g(r) = -2r-1$ si $r < 0$ puis on vérifie avec soin que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{N}}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbf{Z}}$.

Exercice 16

1) * Supposons f injective. Soit W un ensemble, $g\colon W \to X$ et $h\colon W \to X$ deux applications. Il est clair que $g = h$ entraîne $f \circ g = f \circ h$, examinons l'implication directe. Pour ce faire, supposons que $f \circ g = f \circ h$. Soit $w \in W$, on a alors $f[g(w)] = (f \circ g)(w) = (f \circ h)(w) = f[h(w)]$. Comme l'application f est injective, on en déduit que $g(w) = h(w)$. Ceci étant prouvé pour un w arbitraire, on en déduit que $g = h$.
* On va procéder par contraposition. Supposons f non injective. Il existe alors deux éléments x_1 et x_2 distincts dans X tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons alors $W = \{0\}$, notons $g\colon W \to X$ l'application définie par $g(0) = x_1$ et $h\colon W \to X$ l'application définie par $h(0) = x_2$. Comme x_1 et x_2 sont distincts, g et h sont distinctes ; pourtant $(f \circ g)(0) = f(x_1) = f(x_2) = (f \circ h)(0)$. Les W, g et h qu'on vient de construire fournissent un exemple où l'équivalence "$f \circ g = f \circ h \iff g = h$" est fausse. C'est ce qu'on cherchait.

2) * Supposons f surjective. Soit Z un ensemble, $g\colon X \to Z$ et $h\colon X \to Z$ deux applications. Il est clair que $g = h$ entraîne $g \circ f = h \circ f$, examinons l'implication directe. Pour ce faire, supposons que $g \circ f = h \circ f$. Soit $y \in Y$, comme f est surjective, on peut introduire un $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On a alors $g(y) = g[f(x)] = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h[f(x)] = h(y)$. Ceci étant prouvé pour un y arbitraire, on en déduit que $g = h$.
* On va procéder par contraposition. Supposons f non surjective. On peut alors introduire un élément $y_0 \in Y$ dépourvu d'antécédent. Posons alors $Z = \{0, 1\}$, notons $g\colon Y \to Z$ l'application définie par $g(y) = 1$ si y a au moins un antécédent et $g(y) = 0$ sinon, et notons $h\colon Y \to Z$ l'application constante qui prend la valeur 1 en tout $y \in Y$. Comme $g(y_0) = 0$ et $h(y_0) = 1$ sont distincts, g et h sont distinctes ; pourtant pour tout $x \in X$, $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 1$ (puisque $f(x)$ a au moins l'antécédent x) et $(h \circ f)(x) = h[f(x)] = 1$, donc $g \circ f = h \circ f$. Les Z, g et h qu'on vient de construire fournissent un exemple où l'équivalence "$g \circ f = h \circ f \iff g = h$" est fausse. C'est ce qu'on cherchait.

Exercice 17

1) On constate que $f(\dfrac{1}{2}) = f(2) = \dfrac{4}{5}$. Le réel $4/5$ possède donc au moins deux antécédents : f n'est donc pas injective. Pour la surjectivité, autant attendre la question suivante, on y verra que 2 n'a pas d'antécédent, et ça sera réglé.

2) Soit y un réel, on va en rechercher les antécédents. Soit $x \in \mathbf{R}$. Le réel x est un antécédent de y si et seulement si :

$$\frac{2x}{1+x^2} = y \iff y(1+x^2) = 2x \iff yx^2 - 2x + y = 0. \qquad (E)$$

On traite dans un premier temps le cas particulier où $y = 0$; dans ce cas l'équation se réduit à $-2x = 0$ et on constate si on ne l'avait vu directement que 0 est un antécédent de $y = 0$, et accessoirement que c'est le seul.

Supposons dans un second temps que $y \neq 0$. Vu comme une équation d'inconnue x, (E) est alors une équation du deuxième degré, dont le discriminant est $4 - 4y^2$. Lorsque y^2 est inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire lorsque $y \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, ce discriminant est positif ou nul, et l'équation (E) admet au moins une solution réelle ; autrement dit y a au moins un antécédent. Lorsque, au contraire, y^2 est strictement supérieur à 1, le discriminant de (E) est strictement négatif, et y ne possède donc aucun antécédent.
En faisant la synthèse des cas étudiés, on constate que y possède au moins un antécédent si et seulement si $y \in [-1, 1]$. Autrement dit $f(\mathbf{R}) = [-1, 1]$.

3) On commence comme à la question précédente, à ceci près qu'on n'écrit pas "Soit $x \in \mathbf{R}$" mais plutôt "Soit $x \in [-1, 1]$". Les calculs démarrent de la même façon, on constate toujours de la même façon que 0 possède un et un seul antécédent, et on calcule de la même façon le discriminant de (E). C'est là que les choses se corsent car nous avons désormais à résoudre (E) dans $[-1, 1]$ et non plus dans $\mathbf{R}$, ce qui se déroule moins automatiquement. Il peut être prudent de traiter à part les cas particuliers $y = -1$ et $y = 1$; en écrivant explicitement (E) dans chacun de ces deux cas, on constate que chacun de ces y possède un et un seul antécédent dans $[-1, 1]$ (respectivement $x = -1$ et $x = 1$). Reste à traiter le cas où $y \in]-1, 0[\cup]0, 1[$. Dans ce cas, l'équation (E) est du second degré à discriminant strictement positif, et admet donc deux solutions réelles. Le produit de celles-ci est égal à $y/y = 1$: elles sont donc inverses l'une de l'autre. Mais si deux nombres réels (distincts) sont inverses l'un de l'autre, l'un est de valeur absolue strictement inférieure à 1 et l'autre de valeur absolue strictement supérieure à 1. Parmi les solutions réelles de (E), il y en a donc une et une seule qui est dans $[-1, 1]$, ce qui prouve bien que y possède un et un seul antécédent.

4) On dérive g et on constate que pour tout x de $[-1, 1]$, $g'(x)$ existe et vaut $\dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$. Ce réel $g'(x)$ est manifestement positif, et même strictement positif si x n'est pas l'une des bornes de l'intervalle de définition. On applique alors un "théorème de la bijection" plus ou moins connu dans ses souvenirs d'analyse, ou qu'on verra en décembre.