Feuille 6 : Polynômes

Exercice 1 Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :
1. $P(X^2+1) = P(X)$ 2. $P(2X+1) = P(X)$

Exercice 2 Pour a, b réels, on note $P_{a,b} = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $P_{a,b}$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 3

1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 4 Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) des polynômes suivants ?
1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ 2. $X^6 - 4$ 3. $X^4 - 13X^2 + 36$ 4. $X^4 + 6X^2 + 25$

Exercice 5

1. Soit $m \geq 1$ un entier. Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) du polynôme $X^m - 1$?
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) du polynôme $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$?

Exercice 6 Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de
1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.

Exercice 7 Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$ et $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$. Déterminer le PGCD de P et Q puis déterminer deux polynômes U et V tels que $PU + QV = \text{PGCD}(P, Q)$.

Exercice 8 Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par $X^5 - 1$.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$ par $X^5 - 1$.

Exercice 9 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de la division euclidienne de P par $X - 7$. Montrer que $R = P(7)$.

Exercice 10 Soit a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X - a$ et par $X - b$.

1. Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda = \mu = 0$?
3. Pourquoi l'hypothèse $a \neq b$ est-elle importante ?

Exercice 11 Soient a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. On pose $A = (X \sin a + \cos a)^n$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de A par $X^2 + 1$.

Exercice 12 Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes le divisant dans l'anneau de polynômes précisé :
1. $X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ 2. $X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ 3. $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ 4. $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 14 Calculer le PGCD des couples de polynômes (P, Q) suivants :

1. $P = 6(X-1)^2(X+2)^3(X^2+1)^4$ et $Q = 15(X-1)(X+7)^3(X^2+1)$,
2. $P = X^7 + 2X^6 - X - 2$ et $Q = X^3 + X^2 - 2X$,
3. $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $Q = X(X-1)^2(X-2)$,
4. $P = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$ et $Q = X^7 + X^5 + 8X^4 + X^3 + 8X^2 + 8$.

Exercice 13 Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :

1. $X^n + X^{n-1} + \cdots X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^4 - j$ dans $\mathbb{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 15 Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Calculer le PGCD des polynômes $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

Exercice 16 Montrer que le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a au moins une racine sur $\mathbb{R}$. Même exercice avec le polynôme $X^7 + 3X^2 + 2$.

Exercice 17 Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $X^2 + X + 1$?

Exercice 18 Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer α.
2. Montrer que -1 est une racine double de P.
3. Montrer que j est une racine multiple de P.
4. Factoriser P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19 Pour tout complexe a, on pose $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le PGCD de P_a et P'_a.
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 20 Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Exercice 21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et considérons le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

Exercice 22 Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Exercice 23 Soit $P = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 24 Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui satisfont à l'identité $(*)$:

$$(X + 3)P(X) = XP(X + 1).$$

1. Soit P un polynôme vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$.
2. Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.
3. En déduire que P est nécessairement de la forme $aX^m(X+1)^n(X+2)^p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n,\ m,\ p \in \mathbb{N}-\{0\}$.
4. Démontrer finalement que P vérifie $(*)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX(X+1)(X+2)$.

Exercice 25* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

Exercice 26* Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que Q divise P. Montrer que Q^2 divise $PQ' - P'Q$.

Exercice 1

1) Soit P un polynôme qui répond à la question, et soit d son degré. On vérifie, de façon plus ou moins laborieuse, que le degré de $P(X^2+1)$ est $2d$, et on en déduit que $d = 2d$ donc que $d = -\infty$ ou $d = 0$, donc que P est constant. Réciproquement, les polynômes constants vérifient clairement la condition proposée.

2) Soit P un polynôme non nul qui répond à la question. Notons d son degré et λ son coefficient dominant. On vérifie, de façon plus ou moins laborieuse, que le degré de $P(2X+1)$ est également d et que son coefficient dominant est $2^d\lambda$. On en déduit que $(1-2^d)\lambda = 0$. Un coefficient dominant n'est pas nul, donc $1-2^d = 0$ et donc P est constant. Réciproquement, les polynômes constants vérifient clairement la condition proposée.

Exercice 2

Soit a, b des réels. Dans un premier temps, supposons que P_{ab} soit le carré d'un polynôme Q, de degré d. Le degré de Q^2 est $2d$ tandis que celui de P est 4 donc $d = 2$ et le polynôme Q est de la forme $\alpha X^2 + \beta X + \gamma$ pour trois constantes $\alpha \in \mathbf{R}^*$, $\beta \in \mathbf{R}$ et $\gamma \in \mathbf{R}$. Dans l'identité $P_{ab} = (\alpha X^2 + \beta X + \gamma)^2$, on peut identifier les coefficients de X^4 d'une part, de X d'autre part et enfin les termes constants. On obtient les trois relations $\alpha^2 = 1$, $\beta\gamma = 1$ et $\gamma^2 = 1$, autrement dit $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \gamma = \pm 1$. Le polynôme P_{ab} est donc égal soit à $(X^2+X+1)^2$, soit à $(X^2-X-1)^2$ (il est superflu d'énumérer les deux autres possibilités $(-X^2+X+1)^2$ et $(-X^2-X-1)^2$, qui représentent les deux mêmes polynômes sous une autre forme). En développant les carrés, on obtient $P_{ab} = X^4+2X^3+3X^2+2X+1$ ou $P_{ab} = X^4-2X^3-X^2+2X+1$, et donc $(a,b) = (1,3)$ ou $(a,b) = (-1,-1)$.
Réciproquement, si $(a,b) = (1,3)$ alors $P_{ab} = X^4+2X^3+3X^2+2X+1 = (X^2+X+1)^2$ est un carré, et si $(a,b) = (-1,-1)$ alors $P_{ab} = X^4-2X^3-X^2+2X+1 = (X^2-X-1)^2$.

Exercice 3

1) Notons $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Alors :

$$Q(P_1) - Q(P_2) = \sum_{k=0}^{d} a_k(P_1^k - P_2^k) = \sum_{k=1}^{d} a_k(P_1^k - P_2^k) = \sum_{k=1}^{d} a_k(P_1-P_2)\Big(\sum_{j=0}^{k-1} P_1^j P_2^{k-1-j}\Big)$$
$$= (P_1-P_2)\left(\sum_{k=1}^{d} a_k\Big(\sum_{j=0}^{k-1} P_1^j P_2^{k-1-j}\Big)\right).$$

Cette relation montre la divisibilité attendue.

2) On applique la première question en prenant $P_1 = P$, $P_2 = X$ et $Q = P$. On découvre alors que $P - X$ divise $P(P) - P$. Comme par ailleurs et de façon évidente $P - X$ divise $P - X$, on conclut que $P - X$ divise la somme $[P(P) - P] + [P - X] = P(P) - X$.

Exercice 4

1) On remarque que 1 est racine. On effectue ensuite la division du polynôme proposé P par $X - 1$ pour obtenir $P = (X-1)(X^2-6X+8) = (X-1)(X-2)(X-4)$. Sur cette écriture il est clair que les racines de P sont 1, 2 et 4, aussi bien dans $\mathbf{R}$ que dans $\mathbf{C}$.

2) C'est une recherche des racines 6-èmes d'un nombre complexe, à savoir le nombre 4. Par application directe du cours, les racines complexes sont au nombre de six, et ce sont les $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2ik\pi}{6}}$ pour k variant entre 0 et 5. Les racines réelles sont au nombre de deux, à savoir $-\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[3]{2}$.

3) On commence par factoriser le polynôme auxiliaire $Y^2 - 13Y + 36 = (Y-9)(Y-4)$ (où on a noté l'indéterminée Y au lieu de X pour rendre la suite moins confuse). En substituant le polynôme X^2 à l'indéterminée Y, on obtient la factorisation $X^4 - 13X^2 + 36 = (X^2-9)(X^2-4) = (X+3)(X+2)(X-2)(X-3)$. Sur cette dernière expression les racines sont évidentes : ce sont -3, -2, 2 et 3 et ce qu'on travaille en réel ou en complexe.

4) Si on essaie de commencer comme à la question précédente, le polynôme auxiliaire $Y^2 + 6Y + 25$ a un discriminant strictement négatif et n'a donc pas de racine réelle. Soit r une racine réelle du polynôme de l'énoncé. En substituant r^2 dans le polynôme $Y^2 + 6Y + 25$ on constate que r^2 est alors racine réelle de $Y^2 + 6Y + 25$ qui n'en a pas, ce qui est assez absurde. On conclut ainsi que le polynôme de l'énoncé n'a pas

de racine réelle. Pour l'étude sur $\mathbf{C}$, on peut factoriser le polynôme auxiliaire comme plus haut, puis extraire deux racines deuxièmes complexes, il est plus élégant de connaître une astuce pratique face à ce type de polynôme dits "bicarrés" : elle consiste à regrouper préalablement les termes en X^4 et les termes constants, puis y voir les termes extrêmes d'un carré. Exécutons :

$$X^4+6X^2+25 = [X^4+25]+6X^2 = [(X^2+5)^2-10X^2]+6X^2 = (X^2+5)^2-4X^2 = (X^2+2X+5)(X^2-2X+5).$$

On n'a plus qu'à rechercher séparément les racines des deux facteurs qui sont apparus ; on peut le faire par les formules du cours pour la résolution des équations du second degré ou, ce qui va peut-être finalement plus vite ici, en les redémontrant :

$$X^2+2X+5 = [(X+1)^2-1]+5 = (X+1)^2+4 = (X+1)^2+(2i)^2 = (X+1+2i)(X+1-2i) \text{ et}$$

$$X^2-2X+5 = [(X+1)^2-1]+5 = (X-1)^2+4 = (X-1)^2+(2i)^2 = (X-1+2i)(X-1-2i).$$

Finalement, on a trouvé les quatre racines complexes du polynôme de l'énoncé : ce sont $-1-2i$, $-1+2i$, $1-2i$ et $1+2i$.

Exercice 5

1) Le cours sur les nombres complexes nous a fait connaître les m racines complexes de X^m-1, à savoir les $e^{\frac{2ik\pi}{m}}$ pour k variant entre 0 et $m-1$. Si on s'intéresse aux racines réelles, on peut remarquer que si x est une racine, $|x|^n = 1$ donc $|x| = 1$ donc $x = \pm 1$. On vérifie ensuite aussitôt que 1 est racine dans tous les cas, et que -1 l'est si et seulement si n est pair. On conclut que si n est impair, -1 est l'unique racine réelle de X^n-1 tandis que si n est pair, -1 et 1 sont les deux seules racines réelles de X^n-1.

2) Remarquons prélablement que 1 n'est pas racine de $X^n+X^{n-1}+\cdots+X+1$. Soit maintenant $z \in \mathbf{C}$. Alors z est racine de $X^n+X^{n-1}+\cdots+X+1$ si et seulement si $z^n+z^{n-1}+\cdots+z+1 = 0$, ce qui entraîne $(z-1)(z^n+z^{n-1}+\cdots+z+1) = 0$ soit $z^{n+1}-1 = 0$. Réciproquement, si $z^{n+1}-1 = 0$ et $z \neq 1$ on peut simplifier par $z-1$ et obtenir $z^n+z^{n-1}+\cdots+z+1 = 0$. On conclut que les racines de $X^n+X^{n-1}+\cdots+X+1$ sont exactement celles des racines de $X^{n+1}-1$ qui sont différentes de 1. On va alors se référer au 1) et on conclut que les racines complexes de $X^n+X^{n-1}+\cdots+X+1$ sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ pour k variant entre 1 et n, qu'il n'y a pas de racine réelle si n est pair et que -1 est l'unique racine réelle si n est impair.

Exercice 6

1) Après calcul peu palpitant, le quotient est $3X^3-6X^2+3X+16$ et le reste est $-41X-47$.

2) Après calcul pas plus drôle, le quotient est $3X^2+2X-3$ et le reste est $-9X^2-X+7$.

Exercice 7

La division euclidienne de P par Q donne : $P = Q - R$ où on note $R = 5X^3-7X^2+10X-14$. On en déduit les relations $\mathrm{PGCD}(P,Q) = \mathrm{PGCD}(Q,R)$ et $R = Q-P$.

La division euclidienne de Q par R contient de désagréables dénominateurs. On la fait quand même et on obtient, en notant $T = X^2+2$ la relation $Q = (\frac{X}{5}+\frac{7}{25})R+\frac{24}{25}T$. On en déduit les relations $\mathrm{PGCD}(P,Q) = \mathrm{PGCD}(Q,R) = \mathrm{PGCD}(R,T)$ et : $25Q = (5X+7)R+24T = (5X+7)(Q-P)+24T$ d'où $24T = (5X+7)P+(-5X+18)Q$ et donc :

$$T = \frac{7+5X}{24}P + \frac{18-5X}{24}Q.$$

La division euclidienne de R par T fait découvrir que T divise R. Comme T est unitaire, c'est que T est le PGCD demandé ; la relation de Bézout cherchée est donc celle qu'on a écrite au-dessus de ce paragraphe.

Exercice 8
Toutes les congruences écrites ci-dessous le sont modulo $X^5 - 1$.

1) $X^5 \equiv 1$ donc $X^{5n} \equiv 1^n = 1$. Le reste cherché est donc lui aussi congru à 1. Comme il est de degré strictement inférieur à 5, il est égal à 1.

2) En multipliant la congruence $X^{95} \equiv 1$ par X^4, on obtient $X^{99} \equiv X^4$ et on fait de même pour tous les autres termes. Le polynôme proposé est donc congru à $X^4 + 2X^2 - 0 - 2X^2 + 3 = X^4 + 3$; le reste l'est donc aussi. Vu son degré strictement supérieur à 5, il lui est même égal.

Exercice 9
Notons Q le quotient de la division euclidienne pratiquée. Alors : $(*)$ $P = Q(X - 7) + R$, où le degré de R est strictement inférieur à 1 autrement dit R est un polynome constant. En substituant 7 à l'indéterminée dans $(*)$ on obtient alors : $P(7) = R(7)$; comme R est constant, $R = R(7)$ et finalement $R = P(7)$.

Exercice 10
Comme à l'exercice précédent, on peut préalablement montrer que $\lambda = P(a)$ et $\mu = P(b)$.

1) Le reste à calculer, qu'on notera R, est de degré strictement inférieur à 2 donc de la forme $\alpha X + \beta$ pour des constantes réelles α et β. On écrit mentalement la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ et on substitue successivement a et b à l'indéterminée dans l'expression qu'on vient d'écrire. On obtient $P(a) = \alpha a + \beta$ puis $P(b) = \alpha b + \beta$, autrement dit :

$$\begin{cases} a\alpha & +\beta & = \lambda \\ b\alpha & +\beta & = \mu \end{cases}.$$

On pense cette expression comme un système d'inconnues α et β. Par les techniques classiques de résolution des systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues, il équivaut à :

$$\alpha = \frac{\lambda - \mu}{a - b} \text{ et } \beta = \frac{a\mu - b\lambda}{a - b}.$$

On conclut que $R = \dfrac{\lambda - \mu}{a - b} X + \dfrac{a\mu - b\lambda}{a - b}$.

2) Si $\lambda = \mu = 0$, on a montré que $R = 0$, autrement dit que si $X - a$ et $X - b$ divisent tous deux P, alors leur produit aussi.

3) Supposons a et b égaux, notons c leur valeur commune. Considérons successivement les polynômes $P_1 = (X - c)^2$ et $P_2 = (X - c)(X - c - 1)$. Pour l'un comme pour l'autre de ces polynômes, les valeurs de λ et μ sont toutes nulles. Pourtant pour le premier le reste de la division de P_1 par $(X - a)(X - b) = (X - c)^2$ est 0 tandis que pour l'autre il ne l'est pas. Cet exemple montre que dès que $a = b$, il n'est pas possible de calculer le reste de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction du seul réel $\lambda = \mu$.

Exercice 11
On refait l'exercice précédent en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$, P par A, a par i et b par $-i$. On a alors $\lambda = A(i) = (e^{ia})^n = e^{nia}$ et $\mu = A(-i) = (e^{-ia})^n = e^{-nia}$.
En notant R le reste cherché, on recopie alors les formules du 6 1, adaptées à ces nouvelles valeurs :

$$R = \frac{e^{nia} - e^{-nia}}{2i} X + \frac{ie^{-nia} + ie^{nia}}{2i} = X \sin(na) + \cos(na).$$

Exercice 12
Dans chacune des questions, il est prudent de commencer par se rendre compte que tout diviseur d'un polynôme non nul de degré d est de degré compris au sens large entre 0 et d. Dans chacune des questions, on commencera par rechercher les diviseurs de degré 0, c'est-à-dire les diviseurs constants non nuls. Comme pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ et tout réel λ non nul on a $P = \lambda(P/\lambda)$, toutes les constantes non nulles sont des diviseurs de P, et itou en remplaçant les réels par des complexes. Les diviseurs de degré 0 sont donc exactement les constantes non nulles dans chacune des quatre questions. On recherche ensuite les diviseurs de degré maximal. En notant P le polynôme dont on recherche les diviseurs, si un polynôme Q de même degré

le divise, le quotient est de degré 0 donc est une constante non nulle qu'on peut noter $1/\lambda$; on en déduit que $Q = \lambda P$. Et réciproquement, pour λ non nul, λP divise P puisque $P = (1/\lambda)(\lambda P)$. Les diviseurs de degré maximal sont donc identifiés. Il ne reste plus, dans trois questions sur six, qu'à rechercher les polynômes de degré 1 qui divisent P. C'est particulièrement facile à la question 4 : si le polynôme $X^2 + 1$ admettait un diviseur de degré 1, il admettrait au moins une racine, ce qu'il ne fait pas. Point de diviseur de degré 1 dans ce cas, donc. Pour la question 2, soit $\lambda X - \mu$ un diviseur de $X^2 - 1$ (où $\lambda \neq 0$). L'unique racine $\frac{\mu}{\lambda}$ du diviseur est racine du divisé, donc est égale à ± 1 et donc $\mu = \pm\lambda$. On vérifie très facilement que, réciproquement, $\lambda(X \pm 1)$ est un diviseur de $X^2 - 1$. On en a donc dressé la liste complète. La question 3 est pareille, avec quelques i qui s'y glissent. Finalement :
* aux questions 1 et 4, les diviseurs sont les λ et les λP, où λ est un réel non nul ;
* à la question 2, ce sont les λ , les λP, les $\lambda(X + 1)$ et les $\lambda(X - 1)$, où λ est un réel non nul ;
* à la question 3, ce sont les λ , les λP, les $\lambda(X + i)$ et les $\lambda(X - i)$, où λ est un complexe non nul.

Exercice 13

1) On a déjà étudié ce polynôme à l'exercice 5 2 : on connaît ainsi ses racines qui sont les n complexes distincts $e^{\frac{2i\pi k}{n+1}}$ pour k variant entre 1 et n. Chaque facteur irréductible $X - e^{\frac{2i\pi k}{n+1}}$ pour k variant entre 1 et n apparaît donc dans la factorisation de $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$; vu le degré de celui-ci et son caractère unitaire, on a fini l'investigation et on connaît désormais cette décomposition ; c'est :

$$X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1 = \prod_{k=1}^{n} (X - e^{\frac{2i\pi k}{n+1}}).$$

2) On sait identifier les 11 racines du polynôme proposé - ce sont les racines onzièmes de $(-2)^{11}$, qui sont elles-mêmes les opposées des racines onzièmes de 2^{11}. Sans écrire les détails du passage de la recherche de racines toutes distinctes à la factorisation (ce sont les mêmes qu'à la question 1), on conclut que :

$$X^{11} + 2^{11} = \prod_{k=0}^{10} (X + e^{\frac{2i\pi k}{11}}).$$

Pour obtenir ensuite la décomposition réelle, il convient de rapprocher l'une de l'autre les racines conjuguées du polynôme qu'on est en train de factoriser. Il est facile, notamment avec un petit dessin, de s'apercevoir que la racine -1 qui correspond à $k = 0$ est réelle, tandis que les autres sont deux à deux conjuguées, celle correspondant à un k compris entre 1 et 5 pouvant être appariée avec celle correspondant à l'indice $11 - k$. Cela remarqué, on arrive rapidement à :

$$X^{11} + 2^{11} = (X + 1) \prod_{k=1}^{5} (X^2 + 2\cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + 1).$$

3) On recherche les racines quatrièmes de -4 par exemple selon la technique usuelle, en passant par la forme trigonométrique (ou en cherchant successivement les racines deuxièmes, puis les racines deuxièmes de celles-ci). Quelle que soit la méthode utilisée, on parvient à l'énumération suivante : $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$ et $-1 - i$. Comme dans les questions précédentes on en déduit la factorisation :

$$X^4 + 4 = (X - 1 - i)(X - 1 + i)(X + 1 - i)(X + 1 + i).$$

Pour la décomposition en irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ il convient encore de regrouper les racines conjuguées et effectuer le produit correspondant. On obtient :

$$X^4 + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).$$

Cette décomposition peut aussi être obtenue par l'astuce assez anecdotique déjà mentionnée au 4 4 : on peut regrouper $X^4 + 4 = (X^2 + 2)^2 - 4X^2$ puis appliquer l'identité remarquable $a^2 - b^2$ à cette expression pour conclure.

4) Les racines quatrièmes du complexe j peuvent certes s'exprimer de bien des façons ; parmi elles leur énumération comme j, ij, $-j$ et $-ij$ est agréablement concise. Si on les a présentées ainsi on peut conclure, sur le même modèle que les questions précédentes que :

$$X^4 - j = (X - j)(X - ij)(X + j)(X + ij).$$

5) On peut s'y prendre de plusieurs façons. L'une peut être d'introduire le polynôme $Q = X^2 + X + 1$ qu'on sait factoriser sur $\mathbf{C}$ en $(X - j)(X - j^2)$ et en déduire que $X^8 + X^4 + 1 = (X^4 - j)(X^4 - j^2)$, puis factoriser chacun de ces facteurs, sachant que le premier a été traité à la question précédente et qu'on peut en déduire la factoriation du second, puis enfin regrouper les termes deux à deux conjugués.
Il est ici quand même beaucoup plus rapide de jongler avec la technique anecdotique de manipulation des polynômes dits bicarrés : on écrit d'abord $X^8+X^4+1 = (X^4+1)^2-X^4 = (X^4+X^2+1)(X^4-X^2+1)$ puis on factorise chacun des facteurs par la même technique : $X^4+X^2+1 = (X^2+1)^2-X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$ tandis que $X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + X\sqrt{3} + 1)(X^2 - X\sqrt{3} + 1)$ et on rapproche le tout :

$$X^8 + X^4 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1)(X^2 - X\sqrt{3} + 1).$$

Chacun des facteurs de la décomposition ci-dessus est irréductible, soit qu'on calcule explicitement les quatre discriminants et constate qu'ils sont tous strictement négatifs, soit qu'on remarque (sous sa forme orginelle) que la fonction polynomiale associée au polynôme $X^8 + X^4 + 1$ ne prend sur $\mathbf{R}$ que des valeurs strictement positives, donc que le polynôme n'a pas de racine réelle.

6) Elle ressemble raisonnablement au 2 pour commencer, et on obtient encore plus rapidement la factorisation :

$$X^5 - 1 = (X - 1)(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1)(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1).$$

On peut considérer avoir fini ou, si on veut aller plus loin, faire ou refaire l'exercice 7 de la fiche 2.

Exercice 14

1) Les polynômes P et Q sont tous deux donnés par leur décomposition en irréductibles de $\mathbf{R}[X]$. Il suffit de rapprocher ces deux décompositions pour observer quels irréductibles divisent les deux, et à quelles puissances. Il n'y a plus qu'à écrire la réponse, sans oublier que c'est par définition un polynôme unitaire : ici $\mathrm{PGCD}(P, Q) = (X - 1)(X^2 + 1)$.

2) On factorise sans mal $Q = X(X + 2)(X - 1)$. On teste pour chacun des diviseurs irréductibles de Q s'il est ou non diviseur de P ce qui est très simple pour des diviseurs du premier degré : on constate que P a un terme constant non nul, donc n'est pas divisible par X, que $P(1) = 0$, et donc que $X - 1$ divise P et enfin que $P(-2) = 0$ (ou, si on préfère, que $P = X^6(X + 2) - (X + 2)$) donc que $X + 2$ divise P. On conclut que $\mathrm{PGCD}(P, Q) = (X - 1)(X + 2)$.

3) On supposera que $n \geq 1$, l'énoncé n'étant pas très clair si $n = 0$. Là encore, on teste si les diviseurs irréductibles de Q divisent ou non P : ce n'est pas le cas de X, ce n'est pas le cas de $X - 2$ ($P(2)$ est un entier impair, donc pas nul) et c'est le cas de $X - 1$ puisque $P(1) = 0$. On calcule ensuite P' puis $P'(1) = 0$ et on voit que 1 est racine multiple de P. Tout cela permet de conclure que $\mathrm{PGCD}(P, Q) = (X - 1)^2$.

4) Par l'exercice 13 1), on sait factoriser :
$-P(-X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X - j)(X - j^2)(X + j)(X + j^2)$,
dont on déduit la factorisation de $P = (X - 1)(X - j)(X - j^2)(X + j)(X + j^2)$.
On teste chacune des racines de P sur le polynôme Q. On constate que $Q(1) \neq 0$, que $Q(j) = j + j^2 + 8j + 1 + 8j^2 + 8 = 9(1 + j + j^2) = 0$ et que $Q(-j) = -j - j^2 + 8j - 1 + 8j^2 + 8 = 7(1 + j + j^2) = 0$; pour les deux racines restantes elles sont conjuguées de celles qu'on vient de tester et Q est à coefficients réels, donc elles sont aussi racines de Q. On conclut que $\mathrm{PGCD}(P, Q) = (X - j)(X - j^2)(X + j)(X + j^2)$.

Exercice 15

On sait factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ chacun des deux polynômes (voir la question 1 de l'exercice précédent). Chacun n'a que des racines simples, et leur PGCD sera donc le polynôme unitaire dont les facteurs sont les $X - \omega$, où ω parcourt l'ensemble des racines communes de $X^m - 1$ et $X^n - 1$. Une telle racine commune est un nombre

complexe ω qui vérifie les deux équations $\omega^m = 1$ et $\omega^n = 1$. Notons $d = \mathrm{PGCD}(m,n)$, on va montrer que les solutions du système de deux équations $z^m = 1$ et $z^n = 1$ sont exactement les solutions de $z^d = 1$.
Soit ω une racine d-ème de l'unité. Comme d est diviseur commun de m et n il existe deux entiers strictement positifs e et f tels que $m = de$ et $n = df$. On constate alors que $\omega^m = (\omega^d)^e = 1^e = 1$ et $\omega^n = (\omega^d)^f = 1^f = 1$. Le complexe ω est bien simultanément racine m-ème et racine n-ème de l'unité.
Réciproquement, soit ω un complexe qui est simultanément racine m-ème et racine n-ème de l'unité. L'identité de Bézout assure l'existence de deux entiers relatifs u et v pour lesquels $d = mu + nv$. On peut alors calculer $\omega^d = \omega^{mu+nv} = (\omega^m)^u \cdot (\omega^n)^v = 1^u \cdot 1^v = 1$, et s'apercevoir que ω est racine d-ème de l'unité.
On conclut que les facteurs irréductibles du PGCD à calculer sont exactement les $X - \omega$ où ω est racine d-ème de l'unité, chacun figurant avec multiplicité 1 et finalement que le PGCD demandé est $X^{\mathrm{PGCD}(m,n)} - 1$.

Exercice 16
Chacun des deux polynômes proposés admet dans $\mathbf{R}[X]$ une décomposition en facteurs irréductibles, et on sait que les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont de degré 1 ou 2. Un produit de facteurs tous de degré deux est de degré pair, ce que ne sont aucun des deux polynômes proposés. C'est donc que chacun admet au moins un facteur irréductible du premier degré. Ce facteur irréductible admet alors une racine réelle, qui est aussi racine du polynôme décomposé.

Exercice 17
On rappelle que les racines de $X^2 + X + 1$ sont $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, traditionnellement noté j, et son conjugué $\overline{j}$.
Soit $n \geq 1$. Si $X^2 + X + 1$ divise P_n, le complexe j est alors racine de P_n. Supposons que j soit racine de P_n. Comme P_n est à coefficients réels, le complexe conjugué $\overline{j}$ est également racine de P_n. Mais alors les deux polynômes du premier degré $X - j$ et $X - \overline{j}$ sont tous deux diviseurs de P_n. Ils apparaissent donc tous deux dans la décomposition en irréductibles de P_n, et celui-ci est donc divisible par leur produit qui est $X^2 + X + 1$.
Cette discussion a montré que pour tout entier $n \geq 1$, $X^2 + X + 1$ divise P_n si et seulement si $P_n(j) = 0$. Soit $n \geq 1$ un entier. Si n est divisible par 3, j^{2n} et j^n valent tous deux 1 donc $P_n(j) = 3 \neq 0$. Si n est congru à 1 modulo 3, on constate que $j^{2n} = j^2$ et $j^n = j$, donc $P_n(j) = j^2 + j + 1 = 0$. Enfin si n est congru à -1 modulo 3, on constate que $j^{2n} = j^{-2} = j$ et que $j^n = j^{-1} = j^2$, donc $P_n(j) = j + j^2 + 1 = 0$.
Finalement il y a divisibilité entre les polynômes si et seulement si l'entier n n'est pas un multiple de 3.

Exercice 18

1) On écrit la condition $P(-1) = 0$ et on obtient : $1 - 4 + 8 - 10 + \alpha - 4 + 1 = 0$ donc $\alpha = 8$.

2) On calcule $P' = 6X^5 + 20X^4 + 32X^3 + 30X^2 + 16X + 4$ puis $P'' = 30X^4 + 80X^3 + 96X^2 + 60X + 16$. On constate alors que $P'(-1) = -6 + 20 - 32 + 30 - 16 + 4 = 0$ et que $P''(-1) = 30 - 80 + 96 - 60 + 16$ finit par un 2 en base 10 donc n'est pas nul. On conclut que -1 est racine double de P.

3) En ayant en tête que $j^6 = j^3 = 1$, que $j^5 = j^2$ et que $j^4 = j$, on calcule $P(j) = 1 + 4j^2 + 8j + 10 + 8j^2 + 4j + 1 = 12(j^2 + j + 1) = 0$ puis $P'(j) = 6j^2 + 20j + 32 + 30j^2 + 16j + 4 = 36(j^2 + j + 1) = 0$ et on conclut que j est racine au moins double de P.

4) Le polynôme P est à coefficients réels ; le conjugué j^2 de sa racine j est donc également une racine, et elle est également multiple. On sait donc que -1 est racine double de P, j est racine au moins double et $-j$ est racine au moins double. Comptées avec multiplicité, les racines de P sont au nombre de six, ceci entraîne que j et j^2 sont exactement doubles. Enfin le coefficient dominant de P est 1. On obtient la décomposition en irréductibles de $\mathbf{C}[X]$:

$$P = (X + 1)^2 (X - j)^2 (X - j^2)^2.$$

Pour obtenir celle dans $\mathbf{R}[X]$, on regroupe ensemble les facteurs correspondant aux racines non réelles conjuguées, ici à j et j^2 et on conclut que :

$$P = (X + 1)^2 (X^2 + X + 1)^2.$$

Exercice 19
Soit $a \in \mathbf{C}$.
1) Dans un premier temps on calcule $P'_a = 6(X^2+X+1)$, dont les racines sont j et j^2. Pour chacune d'entre elles, on discute si elle est ou non racine de P_a. Le complexe $P_a(j)$ est nul si et seulement si $2+3j^2+6j+a=0$ c'est-à-dire si et seulement si $a = -2-6j-3j^2 = -2-6j-3(-1-j) = 1-3j = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$; ensuite $P_a(j^2)$ est nul si et seulement si $P_{\overline{a}}(\overline{j}^2) = 0$ c'est-à-dire $P_{\overline{a}}(j) = 0$ soit $\overline{a} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$ ou encore $a = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.
Il ressort de ces calculs que :
* si $a \neq \dfrac{5}{2} \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, le PGCD demandé est 1 ;
* si $a = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, le PGCD demandé est $X - j$;
* si $a = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, le PGCD demandé est $X - j^2$.
NB : on peut aussi faire avec l'algorithme d'Euclide ; on commence de la même façon en calculant P'_a puis, pour éviter de subir des fractions abrutissantes, on constate que $\mathrm{PGCD}(P_a, P'_a) = \mathrm{PGCD}(P_a, \frac{1}{6}P'_a)$. On effectue ensuite la division euclidienne de P_a par X^2+X+1 dont le reste se révèle être $3X+(a-1)$ et on sait donc que $\mathrm{PGCD}(P_a, P'_a) = \mathrm{PGCD}(P_a, X^2+X+1) = \mathrm{PGCD}(X^2+X+1, 3X+(a-1))$. Là on ne croît plus trop à la pertinence de poursuivre les divisions euclidiennes et on s'interroge comme on l'a fait plus haut quant à savoir si j ou j^2 est la racine du polynôme $3X+(a-1)$. Si tout va bien, on a la satisfaction de retrouver les mêmes solutions.
2)
* Si $a \neq \dfrac{5}{2} \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, les polynômes P_a et P'_a n'ont aucune racine commune, donc P_a n'a pas de racine multiple, donc pas de racine double.
* Si $a = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, j est racine commune de P_a et P'_a, donc racine multiple de P_a ; vu le coefficient dominant de P_a il existe donc un nombre complexe c tel que $P_a = 2(X-j)^2(X-c)$. Le coefficient de X^2 dans ce dernier polynôme est $-4j-2c$ qui est donc égal à 3. On en tire $2c = -3-4j$ et finalement $c = -\dfrac{1}{2} - i\sqrt{3}$.
On en conclut la factorisation :

$$P_a = 2(X-j)^2(X + \frac{1}{2} + i\sqrt{3}).$$

* Si $a = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, on prend la factorisation du paragraphe précédent, et on applique la conjugaison à tous les complexes qui y interviennent. On conclut que :

$$P_a = 2(X-j^2)^2(X + \frac{1}{2} - i\sqrt{3}).$$

Exercice 20
On va résoudre la question dans $\mathbf{C}[X]$ dans un premier temps. Soit P un polynôme non constant qui répond à la question. Notons d son degré. Le degré de P' est $d-1$, puis le degré de $(P')^2$ est $2(d-1)$. On en déduit que $2(d-1) = d$ et donc $d = 2$. Par ailleurs, toute racine de P est une racine de $(P')^2$, qui a le même ensemble de racines que P' ; ainsi toute racine de P est une racine de P' et toute racine de P est donc au moins double. Comme on a décidé de travailler dans $\mathbf{C}[X]$, le polynôme P se factorise et a forcément la formue $\lambda(X-r)^2$ pour des constantes $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et $r \in \mathbf{C}$. Enfin en comparant les coefficients dominants on montre que $\lambda = 1$; le polynôme P a donc la forme $(X-r)^2$ pour un $r \in \mathbf{C}$. Réciproquement, on constate que de tels polynômes vérifient la condition proposée. Enfin parmi les polynômes constants, on constate que seul le polynôme nul y répond. Les polynômes complexes qui répondent à la condition proposée sont donc le polynôme nul et les $(X-r)^2$, $r \in \mathbf{C}$. On revient alors à la question initiale en conservant uniquement ceux de ces polynômes qui sont à coefficients réels : ce sont le polynôme nul et les $(X-r)^2$, $r \in \mathbf{R}$.

Exercice 21
Soit a, b et c trois réels. Le polynôme P admet 1 pour racine multiple si et seulement si $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $a + b + c = 0$ et $(n + 1)a + nb = 0$ c'est-à-dire si et seulement si il existe un t réel tel que $(a, b, c) = (nt, -nt - t, t)$. Il existe des t réels, donc il existe des polynômes P qui répondent à la question, et il en existe même des pas nuls, car si on accepte le polynôme nul la question est de peu d'intérêt. Dans la suite on supposera $t \neq 0$. On calcule P'', on a à traiter un cas particulier pour $n = 1$, dans ce cas, $P'' = 2a = 2t$ est une constante non nulle, et donc $P''(1) \neq 0$. Hors de ce cas particulier, $P'' = n(n+1)[aX^{n-1} + bX^{n-2}]$ donc $P''(1) = n(n+1)(a+b) = -n(n+1)t$ n'est pas davantage nul. On conclut que 1 est racine double de P.

Exercice 22
1) Soit x un réel. Alors $P(x)$ est la somme du réel $x^3 + 3x^2 + 2x$ et du non réel i, et n'est donc pas réel. En particulier $P(x)$ n'est pas nul, et x n'est donc pas racine de P.
2) En remarquant que son coefficient dominant est 1, on écrit :

$$P = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma.$$

En isolant les coefficients de X^2 on obtient dans un premier temps la relation :

$$\alpha + \beta + \gamma = -3.$$

Avec ceux de X on obtient :

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 2.$$

Pour la deuxième question il suffit alors de développer :

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

d'où on tire :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = (-3)^2 - 2 \times 2 = 5.$$

Pour la somme des cubes le plus ingénieux est de remarquer que pour ω variant dans l'ensemble des trois racines, et vu la relation $P(\omega) = 0$ on a :

$$\omega^3 = -3\omega^2 - 2\omega - i$$

puis de sommer ça sur les trois valeurs de ω et conclure que :

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha + \beta + \gamma) - 3i = -3 \times 5 - 2 \times (-3) - 3i = -9 - 3i.$$

Exercice 23
Notons α et β deux nombres complexes qui soient racines de P et dont la somme est 2. Le polynôme P est scindé dans $\mathbf{C}[X]$ et est unitaire, on peut donc prendre deux nombres complexes γ et δ pour lesquels :

$$P = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)(X - \delta) = (X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta)(X^2 - (\gamma + \delta)X + \gamma\delta).$$

Si on compare le coefficient de X^3 de cette expression à celui de l'expression originelle de P on obtient : $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$; si on se souvient que la somme $\alpha + \beta$ vaut 2, la somme $\gamma + \delta$ vaut -2.
Posons alors $p = \alpha\beta$ et $q = \gamma\delta$. Le polynôme P se factorise donc sous la forme :

$$P = (X^2 - 2X + p)(X^2 + 2X + q).$$

Si on compare le coefficient de X^2 de cette expression à celui de l'expression originelle de P on obtient : $p + q - 4 = 0$ donc $p + q = 4$; si on compare les termes constants, on obtient : $pq = -5$.

Vu ces somme et produit, $\{p, q\}$ est l'ensemble des racines du polynôme $X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5)$, donc $\{p, q\} = \{-1, 5\}$.
Si on compare enfin les coefficients de X dans les deux expressions de P on obtient $2p - 2q = 12$ donc c'est p qui vaut 5 et c'est q qui vaut -1.
On les reporte dans la factorisation de P qui les contenait, on obtient :

$$P = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 2X - 1).$$

Le premier des deux facteurs n'a pas de racine réelle, donc est irréductible dans $\mathbf{R}$. Le second, en revanche, se laisse factoriser en facteurs du premier degré et, lorsque c'est fait, on a fini de décomposer P en irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ en ayant écrit :

$$P = (X^2 - 2X + 5)(X + 1 - \sqrt{2})(X + 1 + \sqrt{2}).$$

Exercice 24

1) On évalue l'identité $(*)$ en 0 : on obtient $3P(0) = 0P(1)$ donc $P(0) = 0$. Ceci montre que X divise P.

2) On évalue ensuite $(*)$ en -1 et on obtient $2P(-1) = -P(0) = 0$ d'où, compte tenu de $P = XQ$ on déduit $-2Q(-1) = 0$ puis $Q(-1) = 0$.
On recommence en -2 et on obtient $P(-2) = -2P(-1) = 0$ puis $Q(-2) = 0$.

3) Si P est le polynôme nul, il a la forme cherchée (avec $a = 0$, $m = n = p = 1$). Supposons pour la suite que P n'est pas nul.
Soit c une racine complexe de P. On va montrer que nécessairement $P \in \{-2, -1, 0\}$. Pour ce faire, supposons d'abord que c n'est pas élément de $\{-2, -1, 0\} \cup \mathbf{N}^*$. En s'y prenant comme au 2), on montre alors sans mal par récurrence sur $n \geq 0$ que l'énoncé "$P(c - n) = 0$" est toujours vrai. Ceci prouve que P a une infinité de racines, donc est nul, ce qu'on lui a interdit d'être. C'est donc que c est élément de $\{-2, -1, 0\} \cup \mathbf{N}^*$. Supposons maintenant que c soit dans $\mathbf{N}^*$; en s'y prenant un peu comme au 2) on montre toujours par récurrence que l'énoncé "$P(c + n) = 0$" est toujours vrai ; là encore P a trop de racines. Il ne reste plus que la possibilité $c \in \{-2, -1, 0\}$.
Vu cette information et celle, vue aux 1 et 2, selon laquelle -2, -1 et 0 sont des racines de P, on obtient bien la forme proposée pour la décomposition en irréductibles de P.

4) Comme on l'a déjà dit au 3, si P est nul il a bien la forme proposée ; on le supposera non nul pour la suite de la question. Au vu de la forme désormais connue pour P, l'identité $(*)$ se réécrit :

$$aX^m(X+1)^n(X+2)^p(X+3) = aX(X+1)^m(X+2)^n(X+3)^p.$$

On peut simplifier par a puisqu'on a supposé P non nul, l'unicité de la décomposition en irréductibles donne alors $1 = m = n = p = 1$.
Réciproquement, il est immédiat de vérifier qu'un polynôme de la forme $aX(X+1)(X+2)$ vérifie $(*)$.

Exercice 25

Soit $n \geq 1$.
Avant de commencer, il est utile de remarquer -ça servira tout à la fin- que pour tout entier relatif k :

$$(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}})(X - e^{\frac{-2i\pi k}{n}}) = X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1.$$

On a déjà factorisé un certain nombre de fois $X^n - 1$, notamment au 14 6 dans le cas particulier $n = 5$ puis, sans écrire explicitement la factorisation, à l'exercice 15. Sans plus de commentaire ici, partons donc de la factorisation désormais familière :

$$(*) \qquad X^n - 1 = \prod_{a=0}^{n-1}(X - e^{\frac{2i\pi a}{n}}) = (X-1)\prod_{a=1}^{n-1}(X - e^{\frac{2i\pi a}{n}}).$$

Dans ce dernier produit, on fait le changement de variable $b = n - a$, et donc $a = n - b$; quand a varie entre 1 et $n - 1$, b en fait autant, mais à rebours.

On a donc après changement de variable :

$$(**) \qquad X^n - 1 = (X-1)\prod_{b=1}^{n-1}(X - e^{\frac{2i\pi(n-b)}{n}}) = (X-1)\prod_{b=1}^{n-1}(X - e^{\frac{-2ib}{n}}).$$

On multiplie entre elles les identités $(*)$ et $(**)$, en renommant au passage l'indice k dans chacune. On obtient alors :

$$\begin{aligned}(X^n-1)^2 &= (X-1)^2\prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}})\prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{\frac{-2ik}{n}}) = (X-1)^2\prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}})(X - e^{\frac{-2ik}{n}}) \\ &= (X^2-2X+1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2 - 2X\cos(2k\pi/n)+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(X^2 - 2X\cos(2k\pi/n)+1)\end{aligned}.$$

Exercice 26

Notons B un polynôme tel que $P = BQ$.

La solution qui suit peut paraître parachutée, tentons de la rendre un peu "naturelle". Les expressions qui apparaissent dans l'énoncé évoquent les formules de dérivation d'un quotient. Si on avait la possibilité de diviser P par Q -ce qu'on ne peut pas pour l'instant- on pourrait écrire $B = P/Q$. Si on pouvait ensuite dériver cette expression comme on dérive les fonctions d'une variable réelle, on pourrait ensuite écrire que $B' = (P'Q - PQ')/Q^2$ d'où on tirerait $B'Q^2 = P'Q - PQ'$. Tout le milieu de cette idée de preuve est informel et ne peut être sauvé en l'état, mais elle nous a fourni une formule non démontrée, mais qui pourrait bien être vraie quand même. On se fixe donc cette formule pour objectif. Revenons donc à la preuve formelle.

Faute de quotients, on peut quand même dériver la relation $P = BQ$; on obtient $P' = B'Q + BQ'$. En comparant cette formule à celle qu'on s'est fixée comme objectif, on peut être tenté de multiplier par Q dans l'égalité qui précède, on obtient alors $P'Q = B'Q^2 + BQQ'$; si on se souvient opportunément que $BQ = P$, on peut réécrire ceci comme $P'Q = B'Q^2 + PQ'$ qu'on regroupe en $(PQ' - P'Q) = (Q^2)\cdot(-B')$. Cette dernière expression montre alors que Q^2 divise $PQ' - P'Q$.