Feuille 7
Fonctions usuelles

Exercice 1.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(x_0) = \frac{1}{4}$
3. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f.

Exercice 3.

On note f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$ et g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0,1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Etudier les variations de g sur $]0,1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer les limites éventuelles à gauche et à droite de $f(x)$ en 0. La fonction f est-elle prolongeable en une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$?
2. Pour x dans $\mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$, puis déterminer la limite à gauche éventuelle de $f'(x)$ en 0.
3. Dresser le tableau de variations de f, puis tracer sommairement le graphe de f.

Exercice 5.

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Dresser le tableau de variations de cette fonction, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$, déteminer x_0.
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Déterminer les asymptotes au graphe de f.
5. Tracer ce graphe et son asymptote en faisant figurer les tangentes remarquables.

Exercice 6. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

1. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer sommairement la courbe représentative de f.

Exercice 7. Montrer que pour tous x et y réels distincts :

$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}$$

Exercice 8. Discuter en fonction de la valeur du réel x de l'existence de la valeur éventuelle de la limite de x^n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9.

Etablir la formule suivante :

$$\tan(x-y) + \tan(y-z) + \tan(z-x) = \tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x)$$

Où x, y, z sont trois réels pour lesquels les trois tangentes apparaissant dans la formule sont définies.

Indication : on pourra appliquer judicieusement la formule

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Exercice 10.

u et v étant deux réels, établir les formules suivantes :

$$\mathrm{ch}^2(u) + \mathrm{sh}^2(v) = \mathrm{sh}^2(u) + \mathrm{ch}^2(v) = \mathrm{ch}(u+v)\,\mathrm{ch}(u-v)$$
$$\mathrm{ch}^2(u) - \mathrm{ch}^2(v) = \mathrm{sh}^2(u) - \mathrm{sh}^2(v) = \mathrm{sh}(u+v)\,\mathrm{sh}(u-v)$$

Exercice 11. Soit f la fonction numérique définie par

$$f(u) = \frac{4 - 5\,\mathrm{ch}(u)}{\mathrm{sh}(u)}$$

1. Montrer que f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Est-elle paire, impaire ?
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en 0^+.
3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$. On veillera à donner une expression très simple les points où f' s'annule.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer sommairement son graphe.

Exercice 12.

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\mathrm{ch}^3(x) - \mathrm{sh}^3(x)$$
$$\lim_{x\to+\infty} (x - \ln(\mathrm{ch}(x)))$$

Exercice 13.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) - 3 = 0$

Exercice 14.

1. Calculer

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$$

2. A l'aide de la formule $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$

Déterminer les solutions de l'équation :

$$2\,\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \sqrt{3}\,\mathrm{ch}(5x)$$

Exercice 15.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{8\,\mathrm{ch}(x)}{4e^x - 3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 16. Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(u) = \frac{3 + 4\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)}$$

1. Préciser son domaine de définition.
2. Préciser ses limites quand u tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
3. Etudier les variations de f. On veillera à fournir une expression très simple de la valeur u_0 pour laquelle $f'(u_0) = 0$ (l'expression attendue n'utilise pas de fonctions hyperboliques réciproque (Hors programme)).
4. Tracer le graphe de f.

Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2016-2017
Fondamentaux des mathématiques 1

Feuille 7
Fonctions usuelles

Exercice 1.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Correction exercice 1.

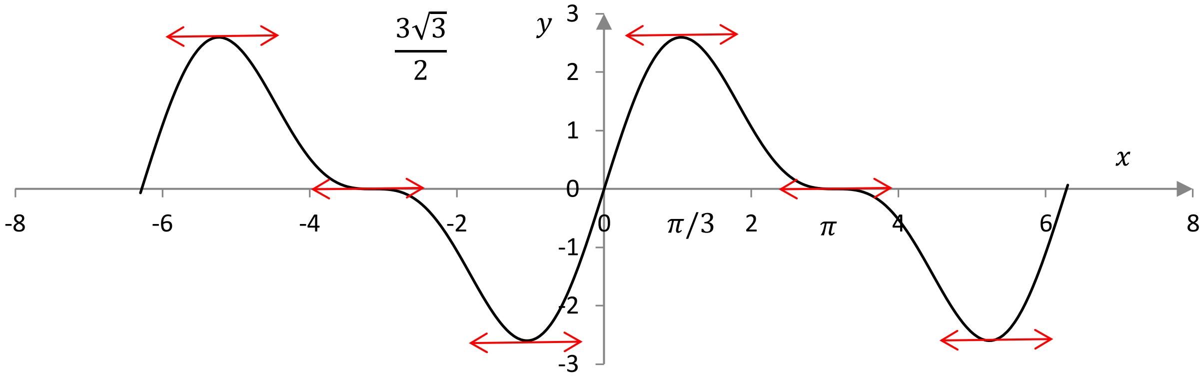
1. f est définie (continue et dérivable) sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et impaire (ce sont des évidences qu'il n'est pas nécessaire de développer), on étudiera f sur l'intervalle $[0,\pi]$, par parité on connaitra les variation de f sur $[0,2\pi]$, puis par périodicité sur $\mathbb{R}$.
2. $$f'(x) = 2\cos(x) + 2\cos(2x) = 2(\cos(x) + 2\cos^2(x) - 1) = 2(2\cos^2(x) + \cos(x) - 1)$$
   Le polynôme $2X^2 + X - 1$ admet $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ comme racine donc
   $2X^2 + X - 1 = 2(X+1)(X - \frac{1}{2})$, on en déduit que $f'(x) = 4(\cos(x) + 1)(\cos(x) - \frac{1}{2})$
   Dressons un tableau de signe :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos(x) + 1$		$+$		$+$	0
$\cos(x) + \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0

   f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
3. On en déduit le tableau de variation de f.
   $$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

4.



Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(x_0) = \frac{1}{4}$
3. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f.

Correction exercice 2.

1. f est paire et 2π périodique, on étudie f sur $[0, \pi]$
2. $f'(x) = 2\cos(x)\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x) = 2\sin(x)\left(\cos(x) - \frac{1}{4}\right)$

$$\forall x \in [0, \pi], \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Il y a deux valeurs qui annulent $\sin(x)$ dans $[0, \pi]$, ce sont 0 et π.

Pour $x \in [0, \pi]$, la fonction $\cos: [0, \pi] \mapsto [-1,1]$ étant strictement décroissante, il s'agit d'une bijection, $\frac{1}{4}$ admet un unique antécédent x_0, sur le signe de $\cos(x) - \frac{1}{4}$ est positif sur $[0, x_0]$ et négatif sur $[x_0, \pi]$.

x	0		x_0		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x) - \frac{1}{4}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

f est croissante sur $[0, x_0]$

f est décroissante sur $[x_0, \pi]$

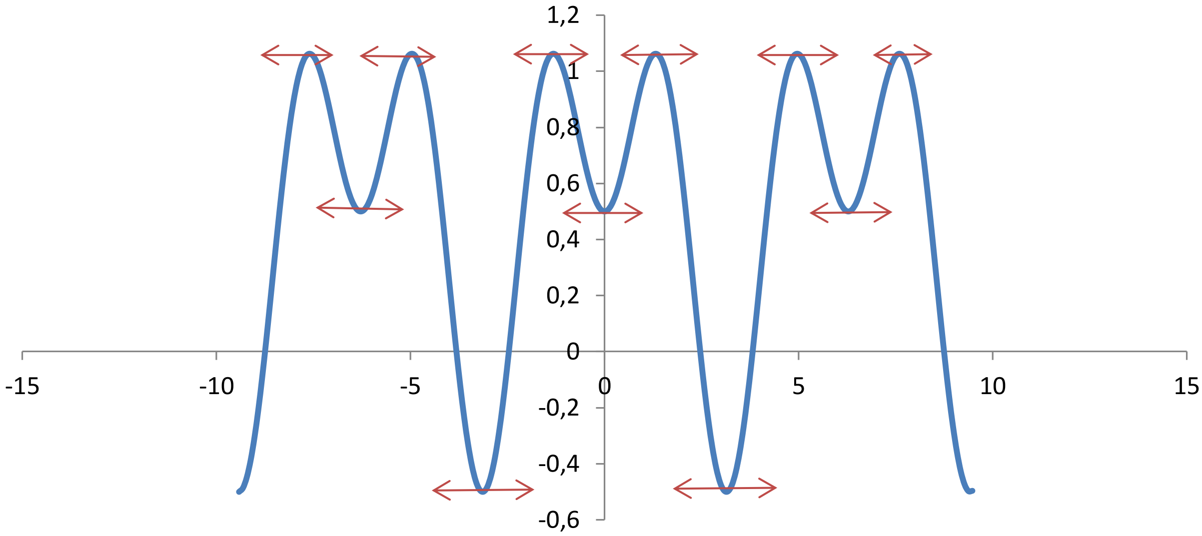
3.

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(x_0) = \sin^2(x_0) + \frac{1}{2}\cos(x_0) = 1 - \cos^2(x_0) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{16 - 1 + 2}{16} = \frac{17}{16}$$

$$f(\pi) = -\frac{1}{2}$$

x	0		x_0		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{17}{16}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$



Exercice 3.

On note f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$ et g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0,1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Etudier les variations de g sur $]0,1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Correction exercice 3.

1. $0 \leq x < 1 \Rightarrow -1 < -x \leq 0 \Rightarrow 0 < 1-x \leq 1$

   Ce qui montre que f est définie, continue et dérivable sur $[0,1[$

$$\forall x \in [0,1[, f'(x) = -\ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x} + 1 = -\ln(1-x)$$

   Ce qui montre que $f'(x)$ est strictement négative pour $0 < x < 1$ et nulle pour $x = 0$ et donc que f est strictement croissante.

   Comme $f(0) = (1-0)\ln(1-0) + 0 = \ln(1) = 0$, pour tout $x > 0$ (et $x < 1$, bien sûr)

$$f(x) > f(0) = 0$$

2. Pour tout $x \in]0,1[$

$$g'(x) = -\frac{\frac{-1}{1-x} \times x - 1 \times \ln(1-x)}{x^2} = -\frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x^2} = \frac{x+(1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x^2}$$
$$= \frac{f(x)}{(1-x)x^2}$$

   Le dénominateur est strictement positif et $f(x)$ aussi donc pour tout $x > 0$ et $x < 1$, $g'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0,1[$ donc g est strictement croissante sur cet intervalle.

3. En 1, il s'agit d'une limite indéterminée, on pose $X = 1 - x \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$

$$g(x) = X\ln(X) + 1 - X \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 0$$

   Car $X\ln(X) \to 0$ lorsque $X \to 0$ est une limite indéterminée connue

   En 0, on rappelle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

   On pose $h = -x$, alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer les limites éventuelles à gauche et à droite de $f(x)$ en 0. La fonction f est-elle prolongeable en une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$?
2. Pour x dans $\mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$, puis déterminer la limite à gauche éventuelle de $f'(x)$ en 0.
3. Dresser le tableau de variations de f, puis tracer sommairement le graphe de f.

Correction exercice 4.

1.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow +\infty$$

Donc f n'est pas prolongeable en 0 par une fonction continue en 0, elle est simplement prolongeable à gauche en 0 par une fonction continue à gauche en 0, par $f(0) = 0$.

2. Pour tout $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

Lorsque $x \to 0^-$, on pose $X = \frac{1}{x} \xrightarrow[x-0^-]{} -\infty$

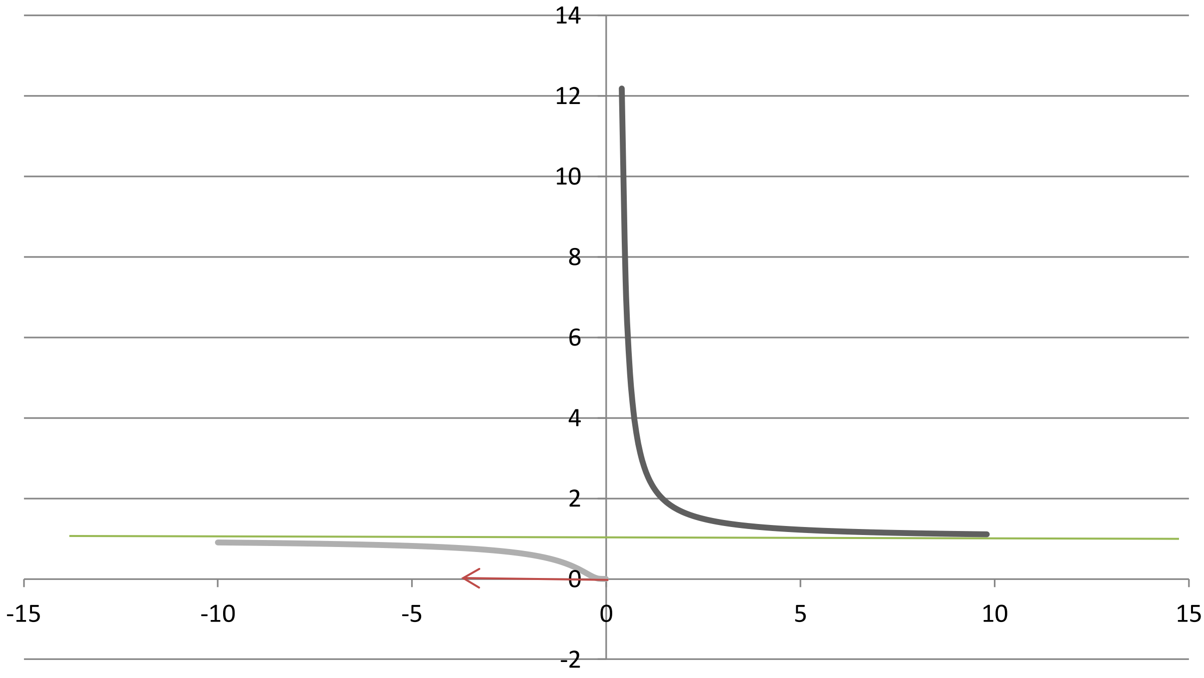
$$f'(x) = -X^2 e^X \underset{-\infty}{\longrightarrow} 0$$

Car il s'agit d'une limite indéterminée donc le résultat est connue en $-\infty$.

3.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1;\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0\ ;\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 ||	$-$	
$f'(x)$	1	$\searrow$	0 || $+\infty$	$\searrow$	1



Exercice 5.

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Dresser le tableau de variations de cette fonction, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$, déteminer x_0.
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Déterminer les asymptotes au graphe de f.
5. Tracer ce graphe et son asymptote en faisant figurer les tangentes remarquables.

Correction exercice 5.

1. g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \text{ car } x > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que g est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc 0 admet un unique antécédent x_0, comme $x_0 = 1$ convient, c'est le seul.

2. f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - (1 - \ln(x))}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

Car

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

N'est pas une forme indéterminée.

$$f(1) = 1 - \frac{\ln(1)}{1} = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

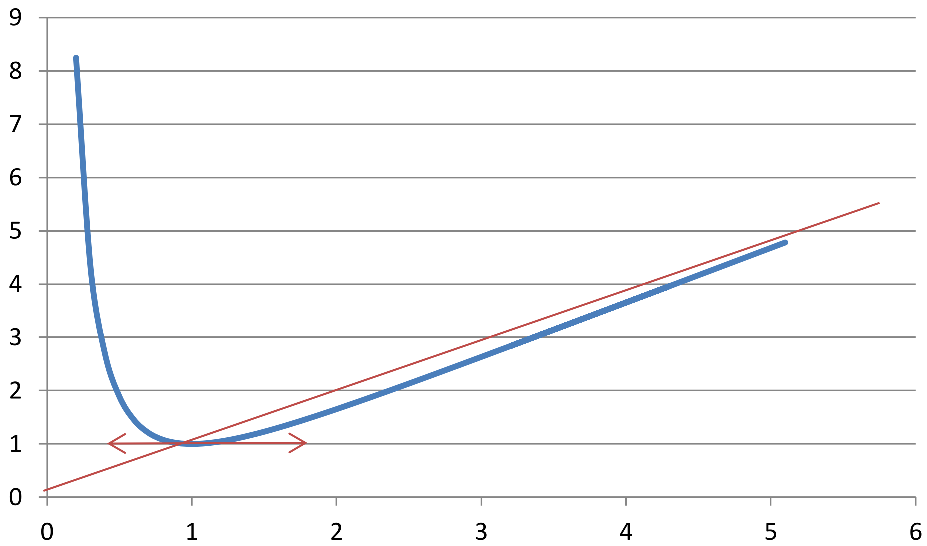
3. Voir 2.
4. Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$$

Ce qui montre que la droite d'équation $y = x$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

5.



Et même si ce n'est pas clair sur le graphe, il y a un point d'inflexion pour $x > 1$, point qui annule la dérivée seconde.

Exercice 6.

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

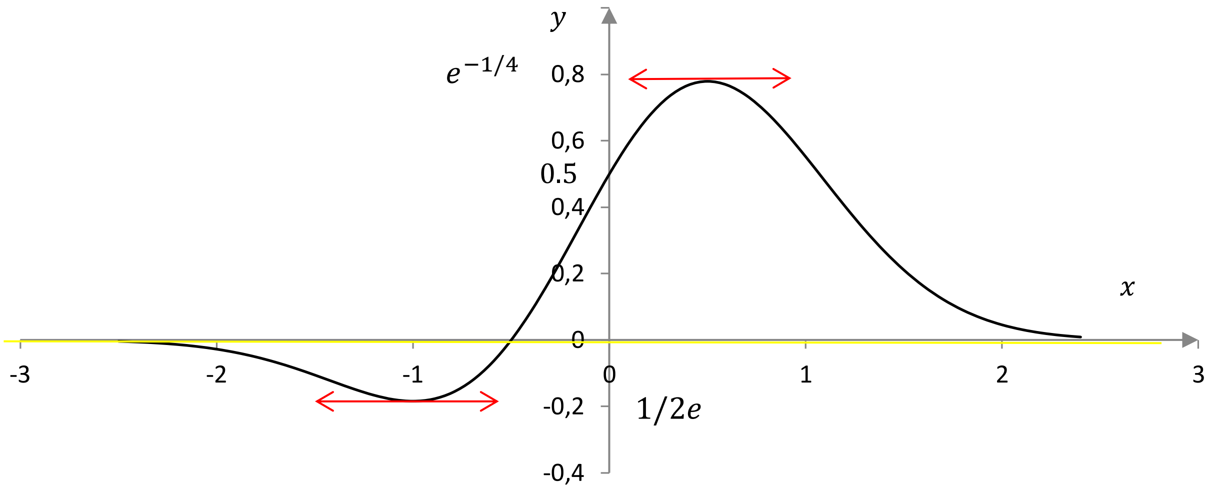
1. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer sommairement la courbe représentative de f.

Correction exercice 6.

1. Si $x < 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = -\sqrt{X}$, donc $f(x) = (-\sqrt{X} + \frac{1}{2})e^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
Si $x > 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = \sqrt{X}$, donc $f(x) = (\sqrt{X} + \frac{1}{2})e^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
Ceci dit dans ce cas les limites sont presque évidentes.
2. $f'(x) = e^{-x^2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2} = (-2x^2 - x + 1)e^{-x^2}$
Le polynôme $-2X^2 - X + 1$ admet $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ comme racines donc
$-2X^2 - X + 1 = -2(X + 1)(X - \frac{1}{2})$
Donc $f'(x) = -2(x + 1)(x - \frac{1}{2})e^{-x^2}$
On en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{2e}$	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{4}}$	$\searrow$	0

3. $\frac{-1}{2e} \approx -0{,}2$ en gros et $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0{,}8$ en gros.



Exercice 7.

Montrer que pour tous x et y réels distincts :

$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}$$

Correction exercice 7.

Pour tous x et y réels distincts

$$\frac{e^x + e^y}{2} - e^{\frac{x+y}{2}} = \frac{e^x - 2e^{\frac{x+y}{2}} + e^y}{2} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{y}{2}} + \left(e^{\frac{y}{2}}\right)^2}{2} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{y}{2}}\right)^2}{2} > 0$$

Car $x \neq y$

On a bien

$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}$$

Exercice 8.

Discuter en fonction de la valeur du réel x de l'existence de la valeur éventuelle de la limite de x^n quand n tend vers $+\infty$.

Correction exercice 8.

Si $x < -1$ alors x^n n'a pas de limite mais $\lim_{n\to+\infty}|x|^n = +\infty$

Si $x = -1$ alors $x^n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Si $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$

Si $x = 1$ alors $x^n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} x^n = 1$

Si $x > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} x^n = +\infty$

Etablir la formule suivante :

$$\tan(x-y) + \tan(y-z) + \tan(z-x) = \tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x)$$

Où x, y, z sont trois réels pour lesquels les trois tangentes apparaissant dans la formule sont définies.

Indication : on pourra appliquer judicieusement la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Correction exercice 9.

$$\tan(z-x)=\tan\big((z-y)+(y-x)\big)=\frac{\tan(z-y)+\tan(y-x)}{1-\tan(z-y)\tan(y-x)}$$
$$\Leftrightarrow\ \tan(z-x)\,(1-\tan(z-y)\tan(y-x))=\tan(z-y)+\tan(y-x)$$
$$\Leftrightarrow\ \tan(z-x)\,\big(1-(-\tan(-z+y))(-\tan(-y+x))\big)=-\tan(-z+y)-\tan(-y+x)$$
$$\Leftrightarrow\ \tan(z-x)\,(1-\tan(y-z)\tan(x-y))=-\tan(y-z)-\tan(x-y)$$
$$\Leftrightarrow \tan(z-x)-\tan(z-x)\tan(y-z)\tan(x-y)=-\tan(y-z)-\tan(x-y)$$
$$\Leftrightarrow \tan(z-x)+\tan(y-z)+\tan(x-y)=\tan(z-x)\tan(y-z)\tan(x-y)$$

Exercice 9.

u et v étant deux réels, établir les formules suivantes :

$$\mathrm{ch}^2(u)+\mathrm{sh}^2(v)=\mathrm{sh}^2(u)+\mathrm{ch}^2(v)=\mathrm{ch}(u+v)\,\mathrm{ch}(u-v)$$
$$\mathrm{ch}^2(u)-\mathrm{ch}^2(v)=\mathrm{sh}^2(u)-\mathrm{sh}^2(v)=\mathrm{sh}(u+v)\,\mathrm{sh}(u-v)$$

Correction exercice 10. Pour tout u et v deux réels.

$$\mathrm{ch}^2(u)+\mathrm{sh}^2(v)=\left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^v-e^{-v}}{2}\right)^2=\frac{e^{2u}+2+e^{-2u}+e^{2v}-2+e^{-2v}}{4}$$
$$=\frac{e^{2u}+e^{-2u}+e^{2v}+e^{-2v}}{4}$$
$$\mathrm{sh}^2(u)+\mathrm{ch}^2(v)=\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^v+e^{-v}}{2}\right)^2=\frac{e^{2u}-2+e^{-2u}+e^{2v}+2+e^{-2v}}{4}$$
$$=\frac{e^{2u}+e^{-2u}+e^{2v}+e^{-2v}}{4}$$
$$\mathrm{ch}(u+v)\,\mathrm{ch}(u-v)=\frac{e^{u+v}+e^{-u-v}}{2}\times\frac{e^{u-v}-e^{-u+v}}{2}$$
$$=\frac{e^{u+v+u-v}-e^{u+v-u+v}+e^{-u-v+u-v}-e^{-u-v-u+v}}{4}=\frac{e^{2u}+e^{-2u}+e^{2v}+e^{-2v}}{4}$$

On a bien

$$\mathrm{ch}^2(u)+\mathrm{sh}^2(v)=\mathrm{sh}^2(u)+\mathrm{ch}^2(v)=\mathrm{ch}(u+v)\,\mathrm{ch}(u-v)$$
$$\mathrm{ch}^2(u)-\mathrm{ch}^2(v)=\left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^v+e^{-v}}{2}\right)^2=\frac{e^{2u}+2+e^{-2u}-(e^{2v}+2+e^{-2v})}{4}$$
$$=\frac{e^{2u}+e^{-2u}-e^{2v}-e^{-2v}}{4}$$
$$\mathrm{sh}^2(u)-\mathrm{sh}^2(v)=\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^v-e^{-v}}{2}\right)^2=\frac{e^{2u}-2+e^{-2u}-(e^{2v}-2+e^{-2v})}{4}$$
$$=\frac{e^{2u}+e^{-2u}-e^{2v}-e^{-2v}}{4}$$
$$\mathrm{sh}(u+v)\,\mathrm{sh}(u-v)=\frac{e^{u+v}-e^{-u-v}}{2}\times\frac{e^{u-v}+e^{-u+v}}{2}$$
$$=\frac{e^{u+v+u-v}+e^{u+v-u+v}-e^{-u-v+u-v}-e^{-u-v-u+v}}{4}=\frac{e^{2u}+e^{-2u}-e^{2v}-e^{-2v}}{4}$$

On a bien

$$\mathrm{ch}^2(u)-\mathrm{ch}^2(v)=\mathrm{sh}^2(u)-\mathrm{sh}^2(v)=\mathrm{sh}(u+v)\,\mathrm{sh}(u-v)$$

Exercice 10.

Soit f la fonction numérique définie par

$$f(u)=\frac{4-5\,\mathrm{ch}(u)}{\mathrm{sh}(u)}$$

1. Montrer que f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Est-elle paire, impaire ?

2. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en 0^+.
3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$. On veillera à donner une expression très simple les points où f' s'annule.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer sommairement son graphe.

Correction exercice 11.

1. f est définie, continue et dérivable si et seulement si $\operatorname{sh}(u) \neq 0$, donc sur $\mathbb{R}^*$.
$$f(-u) = \frac{4 - 5\operatorname{ch}(-u)}{\operatorname{sh}(-u)} = \frac{4 - 5\operatorname{ch}(u)}{-\operatorname{sh}(u)} = -f(u)$$
De plus l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 donc f est impaire.
2.
$$\begin{cases} \lim\limits_{u\to 0^+} (4 - 5\operatorname{ch}(u)) = -1 \\ \lim\limits_{u\to 0^+} \operatorname{sh}(u) = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{u\to 0^+} f(u) = -\infty$$
Limite en $+\infty$
Première méthode, on pose $X = e^u$
$$f(u) = \frac{4 - 5\frac{e^u + e^{-u}}{2}}{\frac{e^u - e^{-u}}{2}} = \frac{8 - 5\left(e^u + \frac{1}{e^u}\right)}{e^u - \frac{1}{e^u}} = \frac{8 - 5X - \frac{5}{X}}{X - \frac{1}{X}} = \frac{8X - 5X^2 - 5}{X^2 - 1} = \frac{-5X^2 + 8X - 5}{X^2 - 1}$$
$$\lim_{u\to+\infty} f(u) = \lim_{X\to+\infty} \frac{-5X^2 + 8X - 5}{X^2 - 1} = -5$$
Deuxième méthode
$$f(u) = \frac{4}{\operatorname{sh}(u)} - 5\frac{\operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}(u)} = \frac{4}{\operatorname{sh}(u)} - 5\frac{1}{\operatorname{th}(u)}$$
$$\begin{cases} \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{4}{\operatorname{sh}(u)} = 0 \\ \lim\limits_{u\to+\infty} \operatorname{th}(u) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{u\to+\infty} f(u) = -5$$
3. Pour tout $u > 0$.
$$f'(u) = \frac{-5\operatorname{sh}(u) \times \operatorname{sh}(u) - (4 - 5\operatorname{ch}(u)) \times \operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)} = \frac{-5\operatorname{sh}^2(u) - 4\operatorname{ch}(u) + 5\operatorname{ch}^2(u)}{\operatorname{sh}^2(u)}$$
$$= \frac{5(\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{sh}^2(u)) - 4\operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)} = \frac{5 - 4\operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)}$$
On cherche la ou les valeur(s) de $u > 0$ qui annule $f'(u)$ et on pose $X = e^u$
$$5 - 4\operatorname{ch}(u) = 0 \Leftrightarrow 5 - 4\frac{e^u + e^{-u}}{2} = 0 \Leftrightarrow 5 - 2X - \frac{2}{X} = 0 \Leftrightarrow -2X^2 + 5X - 2 = 0$$
Le discriminant vaut
$$\Delta = 25 - 4(-2)(-2) = 9$$
Il y a donc deux solutions
$$X_1 = \frac{-5 - 3}{-4} = 2 \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{-5 + 3}{-4} = \frac{1}{2}$$
On revient en « u »
$$u_1 = \ln(2) > 0 \qquad \text{et} \qquad u_2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) < 0$$
Ensuite comme $u \to 4 - 5\operatorname{ch}(u)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$
$$0 < u < \ln(2) \Rightarrow 4 - 5\operatorname{ch}(u) > 4 - 5\operatorname{ch}(ln(2)) = 0 \Rightarrow f'(u) > 0$$
$$\ln(2) < u \Rightarrow 4 - 5\operatorname{ch}(\ln(2)) < 4 - 5\operatorname{ch}(u) = 0 \Rightarrow f'(u) < 0$$
4.

u	0 $\qquad$ $\ln(2)$ $\qquad$ $+\infty$

$f'(u)$	||	$+$	0	$-$	
$f(u)$	||	$-\infty$ $\nearrow$	$f(\ln(2))$	$\searrow$	-5

Avec

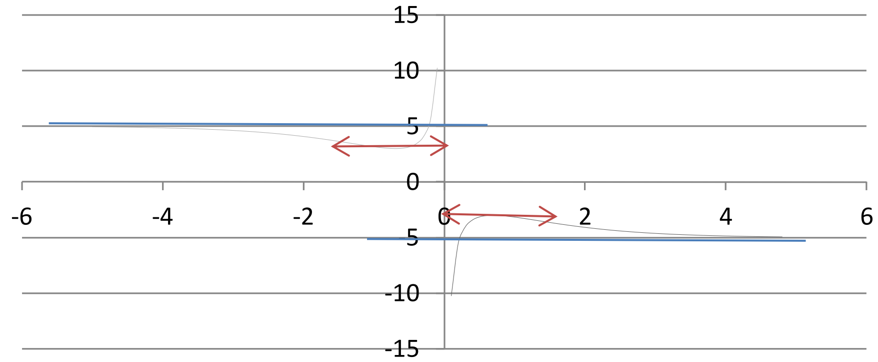
$$f(\ln(2)) = \frac{4 - 5\operatorname{ch}(\ln(2))}{\operatorname{sh}(\ln(2))}$$

$$\operatorname{ch}(\ln(2)) = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{sh}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

Par conséquent

$$f(\ln(2)) = \frac{4 - 5 \times \frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{9}{3} = -3$$



Exercice 11.

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x) - \operatorname{sh}^3(x))$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \ln(\operatorname{ch}(x)))$$

Correction exercice 12.

$$e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x) - \operatorname{sh}^3(x)) = e^{-x}\left(\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3\right)$$

$$= \frac{e^{-x}}{8}\left(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x} - (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x})\right)$$

$$= \frac{e^{-x}}{8}(6e^x + 2e^{-3x}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4x}$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x)) - \operatorname{sh}^3(x)) = \frac{3}{4}$$

$$x - \ln(\operatorname{ch}(x)) = x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = x - \ln\left(e^x \frac{1 + e^{-2x}}{2}\right) = x - \ln(e^x) - \ln\left(\frac{1 + e^{-2x}}{2}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{1 + e^{-2x}}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln(\operatorname{ch}(x))) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

Exercice 12.

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$3\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) - 3 = 0$$

Correction exercice 13.

On pose $X = e^x$

$$3\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow 3\frac{X+\frac{1}{X}}{2} - \frac{X-\frac{1}{X}}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(X^2+1) - (X^2-1) - 6X = 0$$

$$\Leftrightarrow 2X^2 - 6X + 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \quad \text{ou} \quad X = 2 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2)$$

Exercice 13.

1. Calculer

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$$

2. A l'aide de la formule $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$

   Déterminer les solutions de l'équation :

$$2\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = \sqrt{3}\operatorname{ch}(5x)$$

Correction exercice 14.

1.

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} + e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3+1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} - e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2.

$$2\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = \sqrt{3}\operatorname{ch}(5x) \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{ch}(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sh}(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}\operatorname{ch}(5x)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)\operatorname{sh}(x) = \operatorname{ch}(5x) \Leftrightarrow \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)+x\right) = \operatorname{ch}(5x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(3) + x = 5x \\ \frac{1}{2}\ln(3) + x = -5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{1}{2}\ln(3) \\ 6x = -\frac{1}{2}\ln(3) \end{cases}$$

$$S = \left\{\frac{1}{8}\ln(3), -\frac{1}{12}\ln(3)\right\}$$

Exercice 14.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{8\operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f.

4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer le graphe de f.

Correction exercice 15.

1. f est définie, continue et dérivable si et seulement si $4e^x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \neq \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$$

2.

En $-\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty}(4e^x - 3) = -3$$
$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{ch}(x) = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8\,\mathrm{ch}(x)}{4e^x - 3} = -\infty$$

En $+\infty$

On pose $X = e^x$

$$f(x) = \frac{8\,\mathrm{ch}(x)}{4e^x - 3} = \frac{8\,\frac{X + \frac{1}{X}}{2}}{4X - 3} = \frac{8(X^2 + 1)}{2X(4X - 3)} = \frac{8X^2 + 8}{8X^2 - 6X}$$
$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty}\frac{8X^2 + 8}{8X^2 - 6X} = \lim_{X\to+\infty}\frac{8X^2}{8X^2} = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$

En $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^-$, $\mathrm{ch}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) > 1 > 0$

$$\lim_{x\to\ln\left(\frac{3}{4}\right)^-}(4e^x - 3) = 0^-$$
$$\lim_{x\to\ln\left(\frac{3}{4}\right)^-}\frac{\mathrm{ch}(x)}{4e^x - 3} = -\infty$$

En $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^+$, $\mathrm{ch}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) > 1 > 0$

$$\lim_{x\to\ln\left(\frac{3}{4}\right)^+}(4e^x - 3) = 0^+$$
$$\lim_{x\to\ln\left(\frac{3}{4}\right)^+}\frac{\mathrm{ch}(x)}{4e^x - 3} = +\infty$$

3.

$$f'(x) = 8\,\frac{\mathrm{sh}(x)\,(4e^x - 3) - 4\,\mathrm{ch}(x)\,e^x}{(4e^x - 3)^2} = 8\,\frac{4e^x(\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x)) - 3\,\mathrm{sh}(x)}{(4e^x - 3)^2}$$

On pose $X = e^x$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4e^{x}(\operatorname{sh}(x)-\operatorname{ch}(x))-3\operatorname{sh}(x)=0 \Leftrightarrow 4X\left(\frac{X-\frac{1}{X}}{2}-\frac{X+\frac{1}{X}}{2}\right)-3\frac{X-\frac{1}{X}}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 4X\big((X^2-1)-(X^2+1)\big)-3(X^2-1)=0 \Leftrightarrow 8X(-2)-3X^2+3=0$$

$$\Leftrightarrow -3X^2-8X+3=0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta=(-8)^2+4\times 3\times 3=64+36=100$$

Les racines sont

$$X_1=\frac{8-10}{-6}=\frac{1}{3}$$

Et

$$X_2=\frac{8+10}{-6}=-3$$

Or $X=e^{x}>0$ donc $f'(x)=0$ n'a qu'une solution $e^{x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln(3)$

Il reste à déterminer le signe de $4e^{x}(\operatorname{sh}(x)-\operatorname{ch}(x))-3\operatorname{sh}(x)$, cette fonction est continue et ne s'annule qu'en $-\ln(3)$, on prends une valeur simple 0, $4e^{0}(\operatorname{sh}(0)-\operatorname{ch}(0))-3\operatorname{sh}(0)=-4<0$

Donc pour tout $x<-\ln(3)$ $4e^{x}(\operatorname{sh}(x)-\operatorname{ch}(x))-3\operatorname{sh}(x)<0$ et pour tout $x>-\ln(3)$, $4e^{x}(\operatorname{sh}(x)-\operatorname{ch}(x))-3\operatorname{sh}(x)>0$, il faut quand même faire attention au fait que f n'est pas définie en $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

Comme $\frac{1}{3}<\frac{3}{4}$ alors $\ln\left(\frac{1}{3}\right)<\ln\left(\frac{3}{4}\right)$, on déduit de tout cela que :

Pour tout $x\in\left]-\infty,\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right[$, f est décroissante.

Pour tout $x\in\left]\ln\left(\frac{1}{3}\right),\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right[$, f est croissante.

Pour tout $x\in\left]\ln\left(\frac{3}{4}\right),+\infty\right[$, f est croissante.

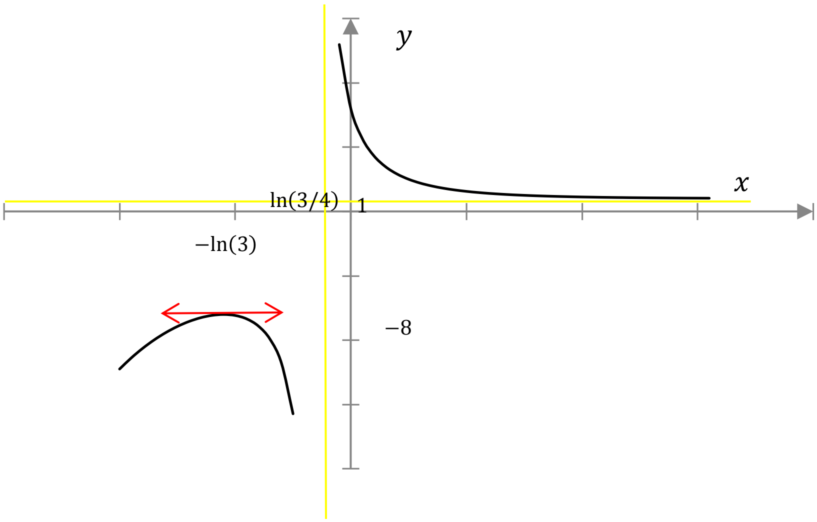
4.

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{1}{3}\right)$		$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

Car

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{8\operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\right)}{4e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}-3}=4\frac{e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}+e^{-\ln\left(\frac{1}{3}\right)}}{\frac{4}{3}-3}=4\frac{\frac{1}{3}+3}{-\frac{5}{3}}=\frac{40}{-5}=-8$$

5.



Exercice 15.

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(u) = \frac{3 + 4\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)}$$

1. Préciser son domaine de définition.
2. Préciser ses limites quand u tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
3. Etudier les variations de f. On veillera à fournir une expression très simple de la valeur u_0 pour laquelle $f'(u_0) = 0$ (l'expression attendue n'utilise pas de fonctions hyperboliques réciproque (Hors programme)).
4. Tracer le graphe de f.

Correction exercice 16.

1. $u \to 3 + 4\,\mathrm{sh}(u)$ est définie sur $\mathbb{R}$. $\mathrm{ch}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et ch est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2.

Première méthode

$$f(u) = \frac{3 + 4\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)} = \frac{3}{\mathrm{ch}(u)} + 4\,\mathrm{th}(u)$$

$\lim_{u\to+\infty} \mathrm{ch}(u) = +\infty$ donc $\lim_{u\to+\infty} \frac{3}{\mathrm{ch}(u)} = 0$ et $\lim_{u\to+\infty} \mathrm{th}(u) = 1$ donc $\lim_{u\to+\infty} f(u) = 4$

$\lim_{u\to-\infty} \mathrm{ch}(u) = +\infty$ donc $\lim_{u\to-\infty} \frac{3}{\mathrm{ch}(u)} = 0$ et $\lim_{u\to-\infty} \mathrm{th}(u) = -1$ donc $\lim_{u\to+\infty} f(u) = -4$

Deuxième méthode

$$f(u) = \frac{3 + 4\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)} = \frac{3 + 4\frac{e^u - e^{-u}}{2}}{\frac{e^u + e^{-u}}{2}} = \frac{6 + 4(e^u - e^{-u})}{e^u + e^{-u}} = \frac{6e^u + 4(e^{2u} - 1)}{e^{2u} + 1}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par 2, puis par e^u.

On pose $X = e^u$,

$$f(u) = \frac{6X + 4(X^2 - 1)}{X^2 + 1} = \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1}$$

si $u \to +\infty$ alors $X \to +\infty$

$$\lim_{u\to+\infty} f(u) = \lim_{X\to+\infty} \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{4X^2}{X^2} = 4$$

si $u \to -\infty$ alors $X \to 0$

$$\lim_{u \to -\infty} f(u) = \lim_{X \to 0} \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1} = -4$$

3.

Première méthode

$$f'(u) = \frac{4\operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(u) - (3 + 4\operatorname{sh}(u))\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)} = \frac{4\operatorname{ch}^2(u) - 3\operatorname{sh}(u) - 4\operatorname{sh}^2(u)}{\operatorname{ch}^2(u)}$$

$$= \frac{4(\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{sh}^2(u)) - 3\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)} = \frac{4 - 3\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)}$$

$$f'(u_0) = 0 \Leftrightarrow 4 - 3\operatorname{sh}(u_0) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh}(u_0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow u_0 = \operatorname{argsh}\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{4}{3} + \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + 1}\right) = \ln\left(\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{25}{9}}\right) = \ln\left(\frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right) = \ln(3)$$

Deuxième méthode

$$\operatorname{sh}(u_0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{e^{u_0} - e^{-u_0}}{2} = \frac{4}{3}$$

On pose $X_0 = e^{u_0}$

$$\operatorname{sh}(u_0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{X_0 - \frac{1}{X_0}}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow X_0 - \frac{1}{X_0} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow X_0^2 - 1 = \frac{8}{3}X_0 \Leftrightarrow X_0^2 - \frac{8}{3}X_0 - 1 = 0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = \frac{64}{9} + 4 = \frac{100}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$X_{0,1} = \frac{\frac{8}{3} - \frac{10}{3}}{2} = -\frac{1}{3} < 0$$

$$X_{0,2} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{10}{3}}{2} = 3$$

Donc

$$e^{u_0} = 3 \Leftrightarrow u_0 = \ln(3)$$

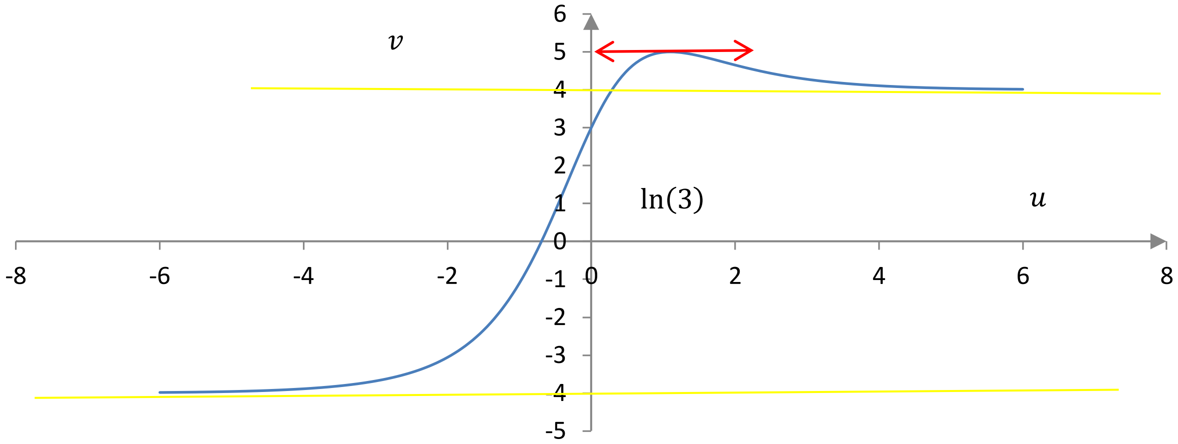
u	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	-4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4

$$\operatorname{ch}(\ln(3)) = \frac{e^{\ln(3)} + e^{-\ln(3)}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$$

$$f(\ln(3)) = \frac{3 + 4 \times \frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = 5$$

4.

Graphe de $v = f(u)$



v
u
$\ln(3)$
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8