Feuille 9. Limites et continuité des fonctions

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{3x-4}$ $b)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ $c)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ $d)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}\right)$

$e)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}$ $f)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+5}-x$ $g)\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+5}-x$

$h)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-(x+1)$ $i)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ $j)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

Exercice 2.

1. Quelle est la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$?
2. La fonction $f(x) = \sin(1/x)$ admet-elle une limite en 0 ?
3. Calculez $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$ $b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ $c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ $d)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$ $e)\ \lim_{x\to 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x}$

$f)\ \lim_{x\to 1/2} (2x^2+x-1)\tan(\pi x)$ $g)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ $h)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$ $i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$

$j)\ \lim_{x\to+\infty} \ln^2 x - \sqrt{x}$ $k)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ $l)\ \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln^3 x$ $m)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 5. Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.
4. $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2\sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 6. Soit $f :]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ si $x < 0$ et $f(x) = x - 1$ si $1 \leq x$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(y) = y$ si $y < 0$ et $g(y) = y + 1$ si $0 \leq y$.

1. Tracer leurs graphes respectifs, et constater qu'ils se déduisent l'un de l'autre par une symétrie.
2. Ces applications sont-elles réciproques l'une de l'autre ?
3. Pour chacune de ces applications, préciser si elle est continue sur son domaine de définition.

Exercice 7. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Exercice 8. Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0$$

Exercice 9.

1. Montrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.
2. Donner un contre-exemple de polynôme à coefficients réels et de degré pair qui n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[0, 1]$ et telle que

$$0 \leq f(x) \leq 1\,, \qquad \forall x \in [0, 1]$$

Montrer qu'il existe au moins un point $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 11. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq2}$ est décroissante et converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Exercice 12. Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est injective et continue, alors elle est strictement monotone. Même question avec une fonction définie sur un intervalle quelconque.

Exercice 13. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ vers $[a, b]$.

1. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$
Montrer que f est continue. En déduire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.
2. On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$
Montrer qu'il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 14. Vrai ou faux ?

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Exercice 15. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. A l'aide de la valeur absolue, trouver une formule explicite qui calcule la fonction $\sup(f, g)$.
2. Montrer que si f et g sont continues, alors $\sup(f, g)$ l'est aussi.

Exercice 16. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 17. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. en supposant f continue,
2. en supposant f croissante,
3. en supposant f continue en 0.

Exercice 18.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}$$

Feuille 9. Correction

Exercice 1.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+5}{3x-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\frac{5}{x}}{3-\frac{4}{x}} = \dfrac{2}{3}$.

2. $\forall\, x \neq 2$, $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$. Donc, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$.

3. $\forall\, x \neq 1$, $\dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{3}{2}$.

4. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;\, 1\}$, $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{x}{1-x^2}$.

   Donc, $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right) = +\infty$.

5. $\forall x \in [-1;\, 0[\cup]0;\, +\infty[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \dfrac{\sqrt{1+x}+1}{x}$.

   Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1} = -\infty$.

6. $\forall x > 0$, $\sqrt{x^2+2x+5} - x = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \dfrac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}$.

   Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+5} - x = 1$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+2x+5) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, soit par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+5} = +\infty$.

   Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+5} - x = +\infty$.

8. $\forall x > 0$, $\sqrt{x^2+x+1} - (x+1) = \dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2+x+1}+(x+1)} = \dfrac{x-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}$.

   Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+1) = +\infty$.

9. $\forall x > 3$, $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \dfrac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \dfrac{1}{x}\dfrac{8}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}$.

   Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 0$.

10. $\forall x > 0$, $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}$.

    Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (cours)
2. Non, la fonction f n'admet pas de limite en 0. En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$ et la fonction sinus n'a pas de limite en l'infini.
3. $\forall\, x \neq 0$, $-|x| \leq x\sin(1/x) \leq |x|$.
   Donc, par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$.

Exercice 3.

1. $\forall\, x > 0$, $\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\dfrac{\sin(2x)}{2x}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2\sqrt{x} = 0$.
   Donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = 0$.
2. $\forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{3}; 0\right[\cup \left]0; \dfrac{\pi}{3}\right[$, $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\sin(2x)}{2x}\,\dfrac{3x}{\sin(3x)}$.
   Donc, d'après la question 2.1, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \dfrac{2}{3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(0) = 1$.
4. $\dfrac{x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = \dfrac{x}{\sin(x)}\, x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   D'après l'exercice 2, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = 0$.
5. $\forall\, x \neq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x} = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\cos(\pi x) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{x - \dfrac{1}{2}}$.
   Donc, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x} = -\dfrac{1}{2}\,\pi\left(-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
6. $\forall\, x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}; 1\right]$, $(2x^2 + x - 1)\tan(\pi x) = \dfrac{2x-1}{\cos(\pi x)}\,(x+1)\sin(\pi x)$.
   D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (2x^2 + x - 1)\tan(\pi x) = -\dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{\pi}$.
7. $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \dfrac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$.
   Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

8. $\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{\ln\left(1-2\sin^2(x)\right)} = \dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)} \times \dfrac{-2\sin^2 x}{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)} \times \dfrac{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{-2\sin^2 x}$.

   Or, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-2\sin^2\left(\dfrac{3x}{2}\right)\right) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$, soit par composée, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)} = 1$.

   De même, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2 x}{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)} = 1$.

   Par la méthode de la question 2., on trouve $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{-2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin x}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$.

   Par suite, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \dfrac{9}{4}$.

9. $\forall x \in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$, $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \left(\dfrac{x}{\sin(x)}\right)^2\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$.

   Or, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$.

   Donc, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1$.

10. $\ln^2 x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\left(\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2 - 1\right)$.

    Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{4}}} = 0$.

    On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2 x - \sqrt{x} = -\infty$.

11. $\forall x > 0$, $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \dfrac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.

    On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln^3 x = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\frac{1}{6}}\ln x\right)^3 = 0$ par croissance comparée.

13. $\forall x > 0$, en posant $X = \ln x$ on a $\dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \dfrac{e^{X^2}}{e^{nX}} = e^{X^2-nX}$.

    Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X^2-nX} = +\infty$.

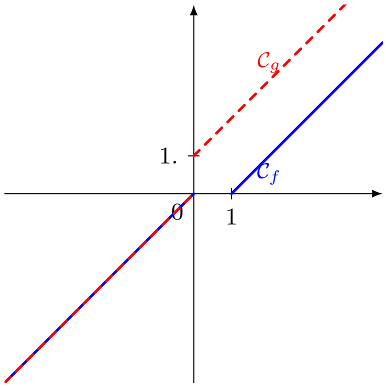
Exercice 4. Notons T une période strictement positive de f et l la limite de f en $+\infty$.
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x+nT)$.
On a donc pour tout réel x,
— d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+nT) = f(x)$
— d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+nT) = l$.

Par unicité de la limite, on en déduit que pour tout réel x, $f(x) = l$, ce qui signifie que f est une fonction constante.

Exercice 5.

1. En tant que fonctions polynômes, la fonction f est continue sur $[0;\ 1[$ et sur $]1;\ 2]$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2\times 1 - 1 = 1 = f(1)$, ce qui montre que f est continue en 1.
   Finalement, f est continue sur $[0;\ 2]$.
2. On peut aussi écrire $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$
   En tant que fonctions affines, la fonction f est continue sur $]-\infty;\ 0[$ et sur $]0;\ +\infty[$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$, ce qui montre que f n'est continue qu'à droite en 0.
3. On peut aussi écrire $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x\leq -1 \\ 0 & \text{si } x>1 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ nx & \text{si } \dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n}, \text{ où } n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1;0\} \end{cases}$
   En tant fonctions affines, la fonction f est continue sur $]-\infty;\ -1[$, sur $]1;\ +\infty[$ et $\left]\dfrac{1}{n+1};\ \dfrac{1}{n}\right[$, pour tout $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1;0\}$.
   De plus, pour tout $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1;0\}$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^-} nx = 1$ et $\lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^+} (n-1)x = \dfrac{n-1}{n}$.
   Donc, pour tout $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^+} f(x)$, ce qui montre que f n'est pas continue en $\dfrac{1}{n}$, pour tout $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1;0\}$.
   Ensuite, pour tout $x\neq 0$ on a $1/x \leq E(1/x) < 1/x+1$.
   Si $x>0$ alors $1\leq xE(1/x) < 1+x$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. De même si $x<0$ alors $1+x < xE(1/x) \leq 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, ce qui montre que f est continue en 0.
4. f est continue sur $[-2;\ 0[$ et sur $]0;\ 2]$.
   $\forall\, x\in[-2;\ 0[\cup]0;\ 2]$, $-x^2 \leq x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) \leq x^2$.
   Par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ce qui montre que f est continue en 0.
   Par suite, f est continue sur $[-2;\ 2]$.

Exercice 6. Soit $f:]-\infty,0[\cup[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x$ si $x<0$ et $f(x)=x-1$ si $1\leq x$. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(y)=y$ si $y<0$ et $g(y)=y+1$ si $0\leq y$.

1. 

   Les graphes de f et de g se déduisent l'une de l'autre par la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.
2. Non car l'ensemble de définition de la fonction f ne coïncide pas avec l'ensemble d'arrivée de g. Par contre, on a bien $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
3. La fonction f est continue sur son domaine de définition.
   La fonction g n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ et $f(0) = 1$.

Exercice 7. Comme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel y, il existe un réel x tel que $f(x) = y$. Autrement dit, f est surjective.

Exercice 8. La fonction $f : x \mapsto \tan x + \dfrac{x}{3}$ est continue sur l'intervalle $[3\pi/4, \pi]$ et $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1 + \dfrac{\pi}{4} < 0$ et $f(\pi) = \dfrac{\pi}{3} > 0$.

Comme 0 est une valeur intermédiaire entre $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et $f(\pi)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[3\pi/4, \pi]$.

Exercice 9.

1. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. On note $a_{2n+1}x^{2n+1}$ son terme de plus haut degré ($n \in \mathbb{N}$).
   Quitte à considérer $-P$, on peut toujours supposer a_{2n+1} strictement positif.
   On a alors $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$.
   De plus, P est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
   Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
   Autrement dit, P admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.
   Le choix de P étant arbitraire, le résultat reste valable pour tout polynôme à coefficients réels de degré impair.
2. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est une fonction polynôme de degré pair qui n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. On considère la fonction φ définie sur $[0;\ 1]$ par $\varphi(x) = f(x) - x$.

La fonction φ est continue sur $[0;\ 1]$ avec $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0;\ 1]$ tel que $\varphi(x_0) = 0$, soit $f(x_0) = x_0$.

Exercice 11.

1. La fonction f_n est dérivable sur $[1;\ +\infty[$ et pour tout $x \geq 1$, $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1$.
   Comme $n \geq 2$ et $x \geq 1$, f_n' est strictement positive sur $[1;\ +\infty[$ et f_n est strictement croissante sur $[1;\ +\infty[$.
   De plus, $f(1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
   Donc f_n réalise une bijection de $[1;\ +\infty[$ sur $[-1;\ +\infty[$ et comme $0 \in [-1;\ +\infty[$, il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1$.
   Or $f_n(x_n) = 0$, soit $x_n + 1 = x_n^n$.
   Donc $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1)$.
   Comme $x_n > 1$, on a $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. $f_{n+1}(x_n) > 0 \Leftrightarrow f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$.
   Or f_{n+1} est strictement croissante sur $[1;\ +\infty[$.
   Donc, $x_n > x_{n+1}$.
   Ceci étant vrai pour tout entier $n \geq 2$ la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
   Comme $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et minorée par 1, elle converge vers une limite $l \geq 1$.
4. Supposons $l > 1$.
   Pour tout entier $n \geq 2$, $x_n > l$, soit $x_n^n > l^n$.
   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} l^n = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^n = +\infty$.
   En contradiction avec $x_n^n = x_n + 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n + 1 = l + 1$.
   Donc, $l = 1$.

Exercice 12. Fait en cours.

Exercice 13.

1. Soit $x_0 \in [a;\ b]$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \epsilon > 0$ tel que
   $$\forall x \in [a;\ b], \quad |x - x_0| < \epsilon \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \epsilon$$
   Cela montre que f est continue en x_0.
   Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in [a;\ b]$, la fonction f est continue sur $[a;\ b]$.
   Soit φ la fonction définie sur $[a;\ b]$ par $\varphi(x) = f(x) - x$.
   On a $\varphi(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \in [a;\ b]$ et $\varphi(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \in [a;\ b]$.
   Comme la fonction φ est continue sur $[a;\ b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in [a;\ b]$ tel que $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$.
2. D'après la question 1., il existe $x \in [a;\ b]$ tel que $f(x) = x$.
   Montrons l'unicité de x.
   Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x_1 \in [a;\ b]$ et $x_2 \in [a;\ b]$ avec $x_1 \neq x_2$ tels que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$.
   On a donc $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$, soit $|x_2 - x_1| < |x_2 - x_1|$, ce qui est impossible.
   Donc, il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 14. Vrai ou faux ?

1. **Vrai** théorème des bornes atteintes.
2. **Faux** la fonction inverse est continue sur $]0;\, 1[$ à valeurs dans $]1;\, +\infty[$.
3. **Faux** la fonction sinus est continue sur $]0;\, 2\pi[$ à valeurs dans $[-1;\, 1]$.
4. **Vrai** théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 15.

1. Remarquons d'abord que $\sup(f, g) = f + \sup(g - f, 0)$. Il suffit donc de calculer $\sup(h, 0)$ pour une fonction h quelconque. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $h(x) + |h(x)| = 2h(x)$ si $h(x) \geq 0$, tandis que $h(x) + |h(x)| = 0$ si $h(x) < 0$. Donc
$$\sup(h, 0) = \frac{1}{2}(h + |h|)$$
pour toute fonction h, et par conséquent
$$\sup(f, g) = f + \frac{1}{2}(g - f + |g - f|) = \frac{1}{2}(f + g + |g - f|)$$
2. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$. Si f et g sont continues, il en va de même pour la composée $|g - f|$, ainsi que pour $\sup(f, g)$.

Exercice 16. Ce sont les fonctions constantes à valeur rationnelle. Par l'absurde, supposons que f soit une fonction continue, non constante et à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Il existe donc deux points x et y tels que $f(x) \neq f(y)$. On utilise alors le résultat bien connu qu'entre deux nombres rationnels $a = f(x)$ et $b = f(y)$ distincts, on peut toujours trouver au moins un nombre irrationnel (par exemple $a + (b - a)/\sqrt{2}$). Par le théorème des valeurs intermédiaires, f atteint donc une valeur irrationnelle, ce qui est contradictoire.

Exercice 17. Commençons par établir quelques conséquences de l'identité $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall (x, y)$, indépendamment de toute hypothèse de continuité ou de croissance sur f. D'abord $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ implique que nécessairement $f(0) = 0$. Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire
$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$$
d'où $f(-x) = -f(x)$, c'est-à-dire que f est impaire. Il suffit donc d'étudier $f(x)$ pour $x \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier positif et $x \in \mathbb{R}$. On a $f((n+1)x) = f(nx) + f(x)$, et comme $f(0) = 0$, une récurrence immédiate sur n donne
$$f(nx) = nf(x)\,, \qquad \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$$
Soit $x \in \mathbb{Q}$ un nombre rationnel positif. On peut écrire $x = p/q$ avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, et alors $pf(1) = f(p) = f(qx) = qf(x)$, ce qui montre que $f(x) = (p/q)f(1) = xf(1)$. Comme f est impaire, on en déduit
$$f(x) = xf(1)\,, \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$
Le calcul de $f(x)$ pour x irrationnel nécessite des hypothèses supplémentaires sur f :

1. Supposons f continue. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, il existe une suite (x_n) de nombres rationnels qui converge vers x, et la continuité de f implique

$$f(x) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n f(1) = x f(1)$$

   On a donc nécessairement $f(x) = \lambda x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avec $\lambda = f(1)$ constante. Réciproquement, toute fonction de la forme $f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est continue et vérifie l'identité $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall (x, y)$.

2. Supposons f croissante (mais pas forcément continue). Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, choisissons deux suites (x_n) et (y_n) de nombres rationnels qui convergent vers x, et telles que

$$x_n \leq x \leq y_n\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Comme f est croissante, on a

$$x_n f(1) = f(x_n) \leq f(x) \leq f(y_n) = y_n f(1)$$

   En passant à la limite $n \to \infty$, on obtient par encadrement $f(x) = x f(1)$. Donc nécessairement $f(x) = \lambda x$ avec $\lambda = f(1)$ (c'est une constante positive puisque $f(0) = 0$ et f est croissante). Réciproquement, toute fonction de la forme $f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est croissante et vérifie l'identité $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall (x, y)$. Remarquons qu'incidemment, f est aussi continue.

3. Supposons f continue en 0. On peut alors montrer que f est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$ et l'on est donc ramené au premier cas. En effet, regardant a comme constante et x comme variable dans l'égalité $f(a+x) = f(a) + f(x)$, la continuité de f en a est équivalente à la continuité de f en 0.

Exercice 18.

1. Soit $T > 0$ une période de f.
   Sur $[0; T]$, $|f|$ est minorée par un certain M car f est continue sur un intervalle fermé borné.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - nT \in [0; T]$ pour $n = \mathrm{E}\left(\frac{x}{T}\right)$.
   Donc $|f(x)| = |f(x - nT)| \leq M$, ce qui montre que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto \sin^8(x) + \cos^{14}(x)$ est continue, périodique sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
   Elle est donc bornée et il existe deux réels m et M strictement positifs tels que pour tout réel x, $m < \sin^8(x) + \cos^{14}(x) \leq M$.
   Donc pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{\ln x}{x\,M} < \dfrac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)} < \dfrac{\ln x}{x\,m}$.
   Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
   Donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)} = 0$.