Feuille 9 : Polynômes

Exercice 9-1
On note $P_n = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)...(1+X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n.

CORRECTION
On montre par récurrence que les coefficients de P_n sont tous égaux à 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $A(n)$ la proposition "$P_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{2^{n+1}-1}$".

$P_0 = 1 + X$ donc $A(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons $A(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n(1+X^{2^{n+1}}) &= P_n + X^{2^{n+1}}(1 + X + X^2 + \ldots + X^{2^{n+1}-1}) \\ &= 1 + X + X^2 + \ldots + X^{2^{n+1}-1} + X^{2^{n+1}} + \ldots + X^{2^{n+1}-1+2^{n+1}} \\ &= 1 + X + X^2 + \ldots + X^{2^{n+2}-1}, \end{aligned}$$

d'où $A(n+1)$ est vraie. On en déduit que $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9-2
Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :
1. $P(X^2+1) = P(X)$
2. $P(2X+1) = P(X)$

CORRECTION
On cherche des polynômes $P \neq 0$. Donc, on pose $\deg P = n \geq 0$.

1. En supposant l'égalité, et en regardant les degrés, on trouve que
$$\deg P(X^2+1) = 2n = n = \deg P\,.$$
Cela implique que $n = 0$ et donc $P(X) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$. D'autre côté, si P est un polynôme constant, la rélation est facilement vérifiée.
Donc, la rélation est vérifiée pour tous et seuls les polynômes constants.
2. Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, avec $a_j \in \mathbb{R}$ pour tout $0 \leq j \leq n$. Le coefficient dominant du polynôme composé $P(2X+1)$ est alors a_n2^n. Par égalité, il faut alors $a_n = a_n2^n$; cela est vrai si et seulement si $2^n = 1$, et donc si et seulement si $n = 0$ (autrement dit, $a_k = 0$ pour tout $k \geq 1$). Encore une fois, on trouve que tous et seuls les polynômes qui vérifient l'égalité sont les polynômes constants : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = a$.

Exercice 9-3
Pour a, b réels, on note $P_{a,b} = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $P_{a,b}$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

CORRECTION
Si $P = Q^2$ est le carré d'un polynôme, alors Q est nécessairement de degré 2, et son coefficient dominant est égal à 1 ou est égal à -1. Dans le premier cas, on peut donc écrire $Q(X) = X^2 + cX + d$. On a alors $Q^2(X) = X^4 + 2cX^3 + (2d+c^2)X^2 + 2cdX + d^2$. Par identification, on doit avoir $2c = 2a$, $2d + c^2 = b$, $2cd = 2$ et $d^2 = 1$. On trouve donc $c = a$ et $d = \pm 1$. Si $d = 1$, alors $c = 1$, et donc $a = 1$ et $b = 3$. Si $d = -1$, alors $c = -1$, $a = -1$ et $b = -1$. Les deux solutions sont donc $P_1(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2$ et $P_2(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1 = (X^2 - X - 1)^2$.

Dans le deuxième cas, on écrit $Q(X) = -R(X)$ avec $R(X) = X^2 + cX + d$, de sorte que $Q^2(X) = R^2(X)$ et on retrouve en réalité le cas précédent.

Exercice 9-4
On considère l'équation suivante dans $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

1. On note P une solution non nulle de cette équation, δ son degré et a son coefficient dominant.
   a) Quel est le degré de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de δ.
   b) Quel est le coefficient dominant de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de a.
   c) Déterminer P.
2. Conclure.

CORRECTION

1. Soient $\delta = \deg P \geq 0$ et $a \in \mathbb{C}$ le coefficient dominant de P.
   a) $\deg P(2X) = \delta$, tandis que $\deg P' = \delta - 1$ et $\deg P'' = \delta - 2$. Donc $\deg\big(P'P''\big) = 2\delta - 3$. Il faut donc $\delta = 2\delta - 3$, qui implique $\delta = 3$.
   b) En vue de la question précédente, le coefficient dominant de $P(2X)$ est $8a$, celui de P' est $3a$ et celui de P'' est $6a$. Le coefficient dominant de $P'P''$ est alors $3a \cdot 6a = 18a^2$: pour avoir l'égalité, il faut donc que $8a = 18a^2$, c'est-à-dire
   $$a\,\big(9a - 4\big) = 0\,.$$
   La solution $a = 0$ n'est pas acceptable (sinon, $\deg P < 3$), et alors $a = 4/9$.
   c) De façon analogue, si on écrit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et on calcule explicitement les polynômes $P(2X)$ et $\big(P'P''\big)(X)$, on trouve les égalités
   $$\begin{cases} 4b = 18ab \\ 2c = 6ac + 4b^2 \\ d = 2bc\,, \end{cases}$$
   qui impliquent $b = c = d = 0$.
2. Donc, le seul polynôme qui vérifie l'égalité donnée est le polynôme $P(X) = (4/9)X^3$.

Exercice 9-5
Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) des polynômes suivants ?

1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ 2. $X^6 - 4$ 3. $X^4 - 13X^2 + 36$ 4. $X^4 + 6X^2 + 25$.

CORRECTION

1. 1 est racine évidente de $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$. On factorise donc $X^3 - 7X^2 + 14X - 8 = (X-1)(X^2 - 6X + 8)$ et on calcule les racines de $X^2 - 6X + 8$ qui sont 2 et 4.
2. $X^6 - 4 = (X^3)^2 - 4 = (X^3 - 2)(X^3 + 2)$. Dans $\mathbb{R}$ chacun de ces facteurs a une unique racine, on trouve donc deux racines réelles : $\sqrt[3]{2}$ et $-\sqrt[3]{2}$. Dans $\mathbb{C}$ on calcule les racines 3-ièmes de 2 et -2. On trouve au total 6 racines complexes distinctes : $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{i2\pi}{3}}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{-i2\pi}{3}}$, $-\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{3}}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{i5\pi}{3}}$.
3. On factorise $Y^2 - 13Y + 36 = (Y - 9)(Y - 4)$ et on pour chaque racine y de ce polynôme on résout $X^2 = y$. On a donc que $3, -3, 2, -2$ sont les racines de $X^4 - 13X^2 + 36$.
4. On trouve les racines complexes de $Y^2 + 6Y + 25$ qui sont $y_1 = 3 + 4i$ et $y_2 = 3 - 4i$ et on calcule les racines carrées de chacun de ces deux nombres complexes. On trouve finalement 4 racines complexes (non réelles) : $2 + i, -2 - i, 2 - i, -2 + i$.

Exercice 9-6

1. Soit $m \geq 1$ un entier. Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) du polynôme $X^m - 1$?
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) du polynôme $X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1$?

CORRECTION

1. Du chapitre sur les complexes, on sait que les racines complexes du polynôme $X^m - 1$ sont les m racines m-ièmes de l'unité :
$$\left\{e^{2\pi i\, k/m}\right\}_{k=0,\ldots,m-1}.$$
De ça, on déduit que :
– si m est impaire, la seule racine réelle est 1 ;
– si m est paire, il y a deux racines réeles, 1 et -1.
2. Soit $Q(X) = X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1$. On sait que $(X-1)Q(X) = X^{n+1} - 1$. Grâce à la question précédente, on déduit que les racines complexes de Q sont
$$\left\{e^{2\pi i\, k/m}\right\}_{k=1,\ldots,m-1}.$$
Pour les racines réelles :
– si n est paire, Q n'a pas de racines réelles ;
– si n est impaire, la seule racine réelle de Q est -1.

Exercice 9-7
Montrer que le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a au moins une racine sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{163} + 24x^{57} - 6$. Elle est continue sur son domaine. Puisque $f(0) = -6$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ par le théroème des valeurs intermédiaires on déduit qu'il existe un réel $x > 0$ tel que $f(x) = 0$. Le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a donc au moins une racine sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9-8
Deux polynômes U et V réels vérifient $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

CORRECTION

Pour tout $x > 0$ et $x \neq n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, grâce à l'égalité précédente, on peut écrire
$$U(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} V(x).$$
On en déduit que U a un nombre infini de racines : notamment, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le nombre réel $x = \pi/2 + k\pi$ est une racine de U. Par le théorème fondamental de l'algèbre, U est donc le polynôme nul. Un raisonnement analogue montre que aussi V est le polynôme nul.

Exercice 9-9
On définit une suite de polynômes $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.
1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2\cos\theta)$.
4. Donner les racines de P_n.

CORRECTION

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $H(n)$ la proposition : P_n est de degré n et son coefficient dominant est 1. On calcule $P_2 = X^2 - 2$. Les propositions $H(1)$ et $H(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et supposons $H(k)$ vraie pour tout $k \leq n$. Le degré de XP_n est donc $n+1$ et le degré de P_{n-1} est $n-1$, donc le degré de P_{n+1} est $n+1$. Le coefficient dominant de P_{n+1} est celui de XP_n donc c'est 1. On en déduit que $H(n+1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $A(n)$ la proposition : “pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.”
   Les propositions $A(1)$ et $A(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et supposons $A(k)$ vraie pour tout $k \leq n$. On calcule

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z + \frac{1}{z}) &= (z + \frac{1}{z})P_n(z + \frac{1}{z}) - P_{n-1}(z + \frac{1}{z}) \\ &= (z + \frac{1}{z})(z^n + \frac{1}{z^n}) - (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}) \\ &= z^{n+1} + z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{1}{z^{n+1}} - (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}) \\ &= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

   On en déduit que $A(n+1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $B(n)$ la proposition : “$P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$”
   Les propositions $B(0)$ et $B(1)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et supposons $B(k)$ vraie pour tout $k \leq n$. On calcule

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2\cos\theta) &= (2\cos\theta)P_n(2\cos\theta) - P_{n-1}(2\cos\theta) \\ &= 2(\cos\theta)2\cos(n\theta) - 2\cos(n-1)\theta \\ &= 2(\cos\theta)2\cos(n\theta) - 2\cos(n\theta - \theta) \\ &= 2(\cos\theta)2\cos(n\theta) - 2\cos(n\theta)\cos\theta - 2\sin(n\theta)\sin\theta \\ &= 2\cos((n+1)\theta) \end{aligned}$$

   On en déduit que $B(n+1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Puisque P_n est de degré n et $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$, on déduit que ses racines (pour $n \geq 1$) sont les réels $x_k = 2\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n})$ pour $k = 0, 1 \ldots, n-1$.

Exercice 9-10

1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

CORRECTION

1. Ça suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_1 - P_2$ divise $\big(P_1\big)^n - \big(P_2\big)^n$. Pour $n = 0$, la dernière expression est le polynôme nul, donc il n'y a rien a montrer. Pour $n \geq 1$, cela est une conséquence immédiate du fait que

$$X^n - Y^n \;=\; (X - Y)\,\Big(X^{n-1} + X^{n-2}Y + \ldots + X^{n-1-k}Y^k + \ldots + XY^{n-2} + Y^{n-1}\Big)\,.$$

2. On peut écrire

$$P\big(P(X)\big) - X \;=\; \Big(P\big(P(X)\big) - P(X)\Big) \,+\, \Big(P(X) - X\Big)\,.$$

   Bien sûr, $P(X) - X$ divise soi-même. D'autre côté, $P(X) - X$ divise aussi $P\big(P(X)\big) - P(X)$, par le point précédent (l'appliquer avec $Q = P$, $P_1 = P$ et $P_2(X) = X$).

Exercice 9-11

Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes le divisant dans l'anneau de polynômes précisé :
1. $X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ 2. $X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ 3. $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ 4. $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

CORRECTION

1. 1, $X+1$.
2. 1,$X-1$, $X+1$, X^2-1.
3. 1, $X-i$, $X+i$, X^2+1.
4. 1, X^2+1.

Exercice 9-12 Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par X^5-1.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99}+2X^{42}-3X^{35}-2X^{27}+3$ par X^5-1.

CORRECTION

1. Après avoir calculer explicitement les cas $n=0$ et $n=1$, pour lesquels on a
$$1 \,=\, 0\cdot(X^5-1)+1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad X^5 \,=\, 1\cdot(X^5-1)+1\,,$$
on va prouver par récurrence que le reste est toujours égal au polynôme constant 1.
Il suffit l'hérédité, l'initialisation ayant été faite pour $n=0$. Soit donc $n \geq 1$; on suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$X^{5n} \,=\, K(X)\,(X^5-1) \,+\, 1\,.$$
On peut alors écrire $X^{5(n+1)} \,=\, X^5\,X^{5n}$, d'où
$$\begin{aligned} X^{5(n+1)} &= X^5\,\Big(K(X)\,(X^5-1)\,+\,1\Big) \\ &= X^5\,K(X)\,(X^5-1)\,+\,X^5 \,=\, X^5\,K(X)\,(X^5-1)\,+\,X^5\,-\,1\,+\,1 \\ &= (X^5-1)\,\Big(X^5\,K(X)\,+\,1\Big)\,+\,1\,. \end{aligned}$$
L'hérédité est donc vérifiée. On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.
2. Comme $99 \equiv 4\ [5]$, $42 \equiv 2\ [5]$, $35 \equiv 0\ [5]$ et $27 \equiv 2\ [5]$, de la question précédente on trouve que le reste est $X^4\,+\,2X^2\,-\,3\,-\,2X^2\,+\,3\,=\,X^4$.

Exercice 9-13
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de sa division euclidienne par $X-7$. Montrer que $R=P(7)$.

CORRECTION
On écrit la division euclidienne de P par $X-7$: $P=Q(X-7)+R$. On en déduit que R est de degré 0, donc une constante. On évalue les fonctions polynômiales $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto Q(x)(x-7)+R$ en 7 et on trouve $P(7)=R$.

Exercice 9-14
Soient a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. On pose $A=(X\sin a+\cos a)^n$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de A par X^2+1.

CORRECTION

Soit $A_n(X) \,:=\, (X\sin a+\cos a)^n$ Un calcul direct montre que
$$\begin{aligned} A_0(X) &= 0\cdot(X^2+1)\,+\,1 \\ A_1(X) &= 0\cdot(X^2+1)\,+\,\Big(X\,\sin a\,+\,\cos a\Big) \\ A_2(X) &= \sin^2 a\,(X^2+1)\,+\,\Big(X\,\sin(2a)\,+\,\cos(2a)\Big)\,. \end{aligned}$$

Si on appelle le reste de la division $R_n(X)$, on va alors montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$R_n(X) \,=\, X\,\sin(na) \,+\, \cos(na)\,.$$

L'initialisation est le cas $n = 0$, déjà traité ci-dessus. On montre l'hérédité. On suppose alors la propriété connue pour un certain $n \geq 1$ et on va la montrer pour $n+1$.

Pour cela, on écrit $A_{n+1}(X) \,=\, A_n(X)\,\big(X\sin a \,+\, \cos a\big)$: en utilisant l'hypothèse de récurrence, on voit tout de suite que le reste de la division est donné par le produit $R_n(X)\,\big(X\sin a \,+\, \cos a\big)$. Si on calcule ce produit, on trouve

$$\begin{aligned}
R_n(X)\,\big(X\sin a \,+\, \cos a\big) \,&=\, X^2\,\sin a\,\sin(na) \,+\, X\,\big(\sin a\,\cos(na) \,+\, \cos a\,\sin(na)\big) \,+\, \cos a\,\cos(na) \\
&=\, \sin a\,\sin(na)\,(X^2+1) \,+\, X\,\sin\big((n+a)a\big) \,+\, \cos a\,\cos(na) \,-\, \sin a\,\sin(na) \\
&=\, \sin a\,\sin(na)\,(X^2+1) \,+\, X\,\sin\big((n+a)a\big) \,+\, \cos\big((n+1)a\big)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que le reste est donc bien

$$R_{n+1}(X) \,=\, X\,\sin\big((n+a)a\big) \,+\, \cos\big((n+1)a\big)\,,$$

comme voulu. L'hérédité est donc vérifiée. On peut alors affirmer que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9-15
Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de
1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.

CORRECTION

1. $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X + 3X + 16) - 41X - 47$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^3 + X + 2)(3X^2 + 2X - 3) - 9X^2 - X + 7$.

Exercice 9-16
Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$ et $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$. Déterminer le PGCD de P et Q puis déterminer deux polynômes U et V tels que $PU + QV = \mathrm{PGCD}(P, Q)$.

CORRECTION

On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
P(X) \,&=\, 1 \cdot Q(X) \,-\, \big(5X^3 - 7X^2 + 10X - 14\big) \\
Q(X) \,&= =\, \frac{1}{25}\,\big(5X + 7\big) \cdot \big(5X^3 - 7X^2 + 10X - 14\big) \,+\, \frac{24}{25}\,\big(X^2 + 2\big) \\
5X^3 - 7X^2 + 10X - 14 \,&=\, \big(5X - 7\big)\,\big(X^2 + 2\big)\,.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{PGCD}(P, Q) \,=\, X^2 + 2$. En remontant les égalités précédentes, on trouve

$$\begin{aligned}
X^2 + 2 \,&=\, \frac{25}{24}\,Q(X) \,-\, \frac{1}{24}\,\big(5X + 7\big) \cdot \big(5X^3 - 7X^2 + 10X - 14\big) \\
&=\, \frac{25}{24}\,Q(X) \,+\, \frac{1}{24}\,\big(5X + 7\big) \cdot \Big(P(X) - Q(X)\Big) \\
&=\, \frac{1}{24}\,\big(5X + 7\big) \cdot P(X) \,-\, \frac{1}{24}\,\big(5X - 18\big)\,Q(X)\,.
\end{aligned}$$

Donc $U(X) \,=\, (1/24)\big(5X + 7\big)$ et $V(X) \,=\, -(1/24)\big(5X - 18\big)$.

Exercice 9-17
Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :
1. $X^n + X^{n-1} + \cdots X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^4 - j$ dans $\mathbb{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

CORRECTION

1. Puisque $X^{n+1}-1=(X-1)(X^n+X^{n-1}+\cdots X+1)$, les racines de $X^n+X^{n-1}+\cdots X+1$ sont toutes les racines $n+1$-ièmes de l'unité sauf 1. On peut donc factoriser sur $\mathbb{C}[X]$:
$$X^n+X^{n-1}+\cdots X+1=\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{\frac{i2k\pi}{n+1}}).$$
2. $X^{11}+2^{11}$ a une unique racine réelle : -2, la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles est
$$X^{11}+2^{11}=(X+2)(X^{10}-2X^9+4X^8-\ldots+2^{10}).$$
Dans $\mathbb{C}[X]$ on calcule les racines 11-ièmes de -2^{11} on trouve $X^{11}+2^{11}=\prod_{k=0}^{11}(X-2e^{\frac{i(1+2k)\pi}{11}})$.
3. Dans $\mathbb{R}[X]$ on a la factorisation $X^4+4=(X^2+2)^2-4X^2=(X^2+2X+2)(X^2-2X+2)$. Dans $\mathbb{C}[X]$ on a $X^4+4=(X-1-i)(X-1+i)(X+1-i)(X+1+i)$.
4. On calcule les 4 racines 4-ièmes de j et on obtient
$$X^4-j=\prod_{k=0}^{3}(X-e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})})=(X-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})(X+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})(X+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(X-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$
5. $X^8+X^4+1=(X^4+1)^2-x^4=(X^4+1-X^2)(X^4+1+X^2)$.
D'autre part $X^4+1+X^2=(X^2+1)^2-X^2=(X^2+1+X)(X^2+1-X)$ et $X^4+1-X^2=(X^2+1)^2-3X^2=(X^2+1-\sqrt{3}X)(X^2+1+\sqrt{3})$. D'où
$$X^8+X^4+1=(X^2+1+X)(X^2+1-X)(X^2+1-\sqrt{3}X)(X^2+1+\sqrt{3}).$$
Ces quatres facteurs sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (discriminant négatif).
6. X^5-1 a une unique racine réelle $X=1$. Les autres racines sont conjuguées On factorise d'abord dans $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irr2́ à 2. On calule les racines 5-ièmes de 1 et on regroupe les facteurs de la forme $(X-z)(X-\bar{z})$. On obtient finalement
$$X^5-1=(X-1)\left(X^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)X+1\right)\left(X^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)X+1\right).$$

Exercice 9-18
Calculer le pgcd des couples de polynômes (P,Q) suivants :

1. $P=6(X-1)^2(X+2)^3(X^2+1)^4$ et $Q=15(X-1)(X+7)^3(X^2+1)$,
2. $P=X^7+2X^6-X-2$ et $Q=X^3+X^2-2X$,
3. $P=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ et $Q=X(X-1)^2(X-2)$,
4. $P=X^5-X^4+X^3-X^2+X-1$ et $Q=X^7+X^5+8X^4+X^3+8X^2+8$.

CORRECTION

1. Les deux polynômes sont déjà décomposés en produit de facteurs irreductibles (sur $\mathbb{R}$) : on a alors
$$\mathrm{PGCD}(P,Q)\;=\;(X-1)\,(X^2+1)\,.$$
2. On voit facilement que
$$\begin{aligned}P(X)\;&=\;X^6\,(X+2)\;-\;(X+2)\;=\;(X+2)\,(X^6-1)\;=\;(X+2)\,(X^3-1)\,(X^3+1)\\&=\;(X+2)\,(X-1)\,(X^2+X+1)\,(X+1)\,(X^2-X+1)\\Q(X)\;&=\;X\,(X^2+X-2)\;=\;X\,(X+2)\,(X-1)\,.\end{aligned}$$
On en déduit que $\mathrm{PGCD}(P,Q)\;=\;(X-1)\,(X+2)$.

3. On a $P(0) = 1 \neq 0$ et $P(2) = (n-1)2^n + 1 \neq 0$, tandis que $P(1) = 0$. Il reste à voir si 1 est racine double de P. Pour cela, on calcule

$$P'(X) \;=\; n\,(n+1)\,X^n \;-\; n\,(n+1)\,X^{n-1}\,.$$

   Alors, si $n = 1$, on a $P'(1) \neq 0$, d'où $\mathrm{PGCD}(P,Q) \;=\; (X-1)$. Au contraire, si $n \geq 2$ on trouve $P'(1) = 0$, et donc $\mathrm{PGCD}(P,Q) \;=\; (X-1)^2$.

4. On pourrait utiliser l'algorithme d'Euclide. Par contre, ici c'est simple à voir que

$$\begin{aligned} P(X) \;&=\; X^4(X-1) + X^2(X-1) + (X-1) \;=\; (X-1)\,(X^4+X^2+1) \\ Q(X) \;&=\; X^3\,(X^4+X^2+1) + 8(X^4+X^2+1) \;=\; (X^4+X^2+1)\,(X^3+8)\,. \end{aligned}$$

   À noter que ça n'est pas la décomposition en facteurs irréductibles de P et Q, mais c'est suffisant pour calculer le PGCD : on a $\mathrm{PGCD}(P,Q) = X^4 + X^2 + 1$.

Exercice 9-19
Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer α.
2. Montrer que -1 est une racine double de P.
3. Montrer que j est une racine multiple de P.
4. Factoriser P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

CORRECTION

1. $P(\alpha) = 0$ donc $\alpha = 8$.
2. $X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1 = (X+1)^2(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1)$
3. j est une racine simple de $X^2 + X + 1$ et on remarque que $(X^2+X+1)^2 = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$, donc j est racine double de P.
4. D'après la question ci-dessus on a la factorisation en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$: $P = (X+1)^2(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1) = (X+1)^2(X^2+X+1)^2$ et dans $\mathbb{C}[X]$ on a $P = (X+1)^2(X-j)^2(X-\bar{j})^2$.

Exercice 9-20
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

CORRECTION

Calculons $P'(X) \;=\; a(n+1)X^n + nbX^{n-1}$. Alors 1 est racine multiple de P si et seulement si $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$: ces deux conditions impliquent que

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ (n+1)a+nb=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a \;=\; -\dfrac{n}{n+1}\,b \\ c \;=\; -\dfrac{1}{n+1}\,b\,. \end{cases}$$

Alors, si $n = 1$, en posant $b = -2$ on a $P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Si $n \geq 2$, en posant $b = -(n+1)$ comme avant, on a

$$P(X) \;=\; nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 \qquad \text{et} \qquad P'(X) \;=\; n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}\,.$$

La dérivée seconde est $P''(X) \;=\; n^2(n+1)X^{n-1} - n(n+1)(n-1)X^{n-2}$, ce qui montre que $P''(1) \neq 0$. Donc, 1 est toujours une racine double.

Exercice 9-21
Pour tout complexe a, on pose $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le PGCD de P_a et P'_a.
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

CORRECTION

1. $P'_a = 6X^2 + 6X + 6 = 6(X - j)(X - j^2)$ avec $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$. Donc $PGCD(P_a, P'_a) \neq 1$ seulement si j ou j^2 sont parmi les racines de P_a. Par ailleurs j et j^2 ne sont pas simultanément racine de P_a, sinon $X^2 + X + 1$ diviserai P_a ce qui n'est pas possible puisque $P_a = (X^2 + X + 1)(2X + 1) + 3X + a - 1$ et on voit bien que ce reste n'est nul pour aucune valeur de a. Si $P_a(j) = 0$ alors $\text{PGCD}(P_a, P'_a) = X - j$ et si $P_a(j^2) = 0$, $\text{PGCD}(P_a, P'_a) = X - j^2$.
2. Si $P_a(j) = 0$, j est donc racine double de P_a. Ce sera le cas si $2j^3 + 3j^2 + 6j + a = 0$ donc si
$$a = -3j^2 - 6j - 2 = -3(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) - 6(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) - 2 = \frac{5}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$
De la même façon on trouve que j^2 est racine double de P_a si $a = -\frac{5}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 9-22
On considère l'équation suivante dans $\mathbb{R}[X]$: $(P')^2 = 4P$.

1. Déterminer toutes les solutions constantes de l'équation.
2. Soit P une solution non constante. Déterminer le degré de P, puis montrer que P possède au moins une racine multiple.
3. Conclure.

CORRECTION

1. Si P est constant, alors P' est le polynôme nulle, et donc, pour avoir l'égalité, il faut forcement que $P \equiv 0$ soit le polynôme nulle.
2. On pose $\deg P = n \geq 1$. On a $\deg(P') = n - 1$, et donc il faut avoir $2(n-1) = n$, ce qui donne $n = 2$. D'autre côté, grâce à l'égalité, on a que
$$\Big(P'(X)\Big)^2 = 4\,P(X)\,.$$
Alors, toute racine *alpha* de P est une racine aussi de P' et *viceversa*, et donc α est une racine double. Maintenant, P' a degré égal à 1, donc il a une racine réelle, qui est donc la seule racine double de P.
3. Comme conséquence de la question précédente, on écrit $P(X) = a\,(X - b)^2$, d'où $P'(X) = 2a\,(X - b)$. De l'égalité précédente, on trouve
$$4a^2(X - b)^2 = 4a(X - b)^2\,.$$
Cela donne $a = 1$, tandis que $b \in \mathbb{R}$ peut être un réel quelconque.

Exercice 9-23
Soient α, β, γ les racines de l'équation $X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer la valeur exacte de
$$\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma}\ .$$

CORRECTION
Puisque $X^3 - 5X^2 + 6X - 1 = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ on en déduit en développant $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 6$ et $\alpha+\beta+\gamma = 5$. De plus en évaluant en $X = 1$ on a aussi $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1$. On calcule maintenant

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma} &= \frac{(1-\alpha)(1-\beta) + (1-\alpha)(1-\gamma) + (1-\beta)(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \\ &= 3 - 2(\alpha+\beta+\gamma) + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma \\ &= 3 - 2\cdot 5 + 6 = -1.\end{aligned}$$

Exercice 9-24
Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P. Calculer $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ et $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

CORRECTION

1. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ racine de P. Alors $P(\alpha) = 0$, d'où on déduit
$$i \;=\; -2\alpha - 3\alpha^2 - \alpha^3 \;\in\; \mathbb{R} \;:$$
absurde. Donc P n'a pas de racines réelles.
2. On écrit
$$\begin{aligned}P(X) \;&=\; (X-\alpha)\,(X-\beta)\,(X-\gamma) \\ &=\; X^3 \;-\; (\alpha+\beta+\gamma)X^2 \;+\; (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X \;-\; \alpha\beta\gamma\,.\end{aligned}$$
Par identification, on trouve alors $\alpha+\beta+\gamma \;=\; -3$. Aussi, on a $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \;=\; 2$ et $\alpha\beta\gamma = -i$. De ces rélations, on déduit avant tout que
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \;=\; \big(\alpha+\beta+\gamma\big)^2 - 2\big(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\big) \;=\; 9-4 \;=\; 5\,.$$
En plus, on a
$$\big(\alpha+\beta+\gamma\big)\,\big(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\big) \;=\; \alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+3\alpha\beta\gamma\,,$$
ce qui donne
$$\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2 \;=\; 3i-6\,.$$
Maintenant on calcule
$$\big(\alpha+\beta+\gamma\big)^3 \;=\; \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \;+\; 3\big(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\big) \;+\; 6\alpha\beta\gamma\,,$$
d'où on trouve
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \;=\; (-3)^3 \;-\; 3\,(3i-6) \;-\; 6\,(-i) \;=\; -9 \;-\; 3i\,.$$

Exercice 9-101
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que Q divise P. Montrer que Q^2 divise $PQ' - P'Q$.

CORRECTION
Il existe $A \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(A) \geq 1$ tel que $P = QA$. On a donc $P' = Q'A + QA'$. On calcule $PQ' - P'Q = (QA)Q' - (Q'A + QA')Q = Q^2A'$. Puisque $A \neq 0$, alors Q^2 divise bien $PQ' - P'Q$.

Exercice 9-102
Soit a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X-a$ et par $X-b$.

1. Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda = \mu = 0$?

CORRECTION

1. On écrit $P(X) = (X-a)\,Q(X) + \lambda$: on a alors $\lambda = P(a)$. De façon analogue, on a aussi $\mu = P(b)$. Si maintenant on écrit
$$P(X) = (X-a)\,(X-b)\,Q_1(X) + R(X)\,, \qquad \text{avec} \qquad R(X) = \alpha X + \beta\,,$$
en évaluant cette expression en a et b on trouve
$$\begin{cases} P(a) = \lambda = \alpha a + \beta \\ P(b) = \mu = \alpha b + \beta \end{cases}$$
L'hypothèse $a \neq b$ garantit qu'il existe une unique solution (α, β) de cette équation : des calculs explicits montrent que
$$\alpha = \frac{\mu - \lambda}{a-b} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\mu b + \lambda a}{a-b}\,.$$
2. En particulier, si $\lambda = \mu = 0$, on déduit que $\alpha = \beta = 0$, c'est-à-dire $R \equiv 0$, et donc $(X-a)(X-b)$ divise P.

Exercice 9-103

On définit une suite de polynômes $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_nP_{n+2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Etablir que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :
$$P_{m+n} = P_nP_{m+1} - P_{n-1}P_m\ .$$
4. Monter que $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :
$$Pgcd(P_{m+n}, P_n) = Pgcd(P_m, P_n)\ .$$
5. Conclure que $Pgcd(P_m, P_n) = P_{Pgcd(m,n)}$.

CORRECTION

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $H(n)$ la propriété : $P_{n+1}^2 = 1 + P_nP_{n+2}$.
On a $P_2 = XP_1 - P_0 = X$ et $P_1^2 = 1 = 1 + 0 \cdot X$, donc $H(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $H(k)$ vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. On calcule
$$\begin{aligned} 1 + P_{n+1}P_{n+3} &= 1 + P_{n+1}(XP_{n+2} - P_{n+1}) \\ &= 1 + XP_{n+1}P_{n+2} - P_{n+1}^2 \\ &= 1 + XP_{n+1}(XP_{n+1} - P_n) - 1 - P_n(XP_{n+1} - P_n) \\ &= X^2P_{n+1}^2 - 2XP_nP_{n+1} + P_n^2 \\ &= (XP_{n+1} - P_n)^2 = P_{n+2}^2. \end{aligned}$$
La proposition $H(n+1)$ est vraie et donc $H(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2} = 1$ le théorème de Bézout implique que P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $A(n)$ la propriété : $P_{m+n} = P_nP_{m+1} - P_{n-1}P_m$.
On a $P_{m+1} = 1P_{m+1} - 0 \cdot P_m$, donc $A(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On suppose $A(k)$ vraie pour tout $1 \leq k \leq n$. On calcule
$$\begin{aligned} P_{n+1}P_{m+1} - P_nP_m &= (XP_n - P_{n-1})P_{m+1} - P_nP_m \\ &= X(P_{m+n} + P_{n-1}P_m) - P_{n-1}P_{m+1} - P_nP_m \\ &= XP_{m+n} + XP_{n-1}P_m - (P_{m+n-1} + P_{n-2}P_m) - P_nP_m \\ &= XP_{m+n} - P_{m+n-1} + (XP_{n-1} - P_{n-2})P_m - P_nP_m \\ &= XP_{m+n} - P_{m+n-1} = P_{m+n+1}. \end{aligned}$$
La propriété $A(n+1)$ est vraie et donc $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

4. Notons $Q = \mathrm{PGCD}(P_n, P_m)$ et $T = \mathrm{PGCD}(P_{m+n}, P_n)$. D'après (3), $Q \mid P_{m+n}$ et donc Q divise T. D'autre part, puisque $T \mid P_{m+n}$ et $T \mid P_n$, encore par (3), $Q \mid P_{n-1}P_m$. Mais P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux, donc T est premier avec P_{n-1} et alors par le lemme de Gauss $T \mid P_m$. On en déduit $T \mid Q$ et donc $T = Q$.
5. On déduit facilement de (4) que pour $k, d \in \mathbb{N}^*$, $(P_{m+nk}, P_n) = (P_m, P_n)$ et $(P_{dn}, P_n) = P_n$. On calcule le $\mathrm{pgcd}(m, n)$ via l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} m &= nq_1 + r_1 \\ n &= r_1q_2 + r_2 \\ &\vdots \\ r_{k-1} &= r_kq_{k+1} + 0, \end{aligned}$$

où r_k est le dernier reste non nul (donc $\mathrm{pgcd}(m, n) = r_k$.) On a donc

$$\mathrm{pgcd}(P_m, P_n) = \mathrm{pgcd}(P_{nq_1+r_1}, P_n) = \mathrm{pgcd}(P_{r_1}, P_n) = \mathrm{pgcd}(P_{r_1}, P_{r_2}) = \ldots = \mathrm{pgcd}(P_{r_k}, P_{q_{k+1}r_k}) = P_{r_k}.$$

Exercice 9-104
Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $X^2 + X + 1$?

CORRECTION
Vu que $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$, on a que les racines complexes de $X^2 + X + 1$ sont $j = e^{i2\pi/3}$ et $\overline{j}$. Pour un théorème du cours, ça suffit de vérifier que j est racine aussi de P_n. Après avoir remarqué que

$$j^3 = \overline{j}^3 = 1\,, \qquad j^2 = -j - 1 \qquad \text{et aussi} \qquad j^2 = \overline{j}\,,$$

on a que $P_n(j) = \overline{j}^n + j^n + 1$.

Trois cas sont alors possibles.

1. $n \equiv 0$ [3] : on a alors que $j^n = \overline{j}^n = 1$, et donc $P_n(j) = 3$. Alors $X^2 + X + 1$ ne divise pas P_n.
2. $n \equiv 1$ [3] : on a alors que $j^n = j$ et $\overline{j}^n = \overline{j}$, d'où on trouve
$$P_n(j) = \overline{j} + j + 1 = 0\,.$$
Dans ce cas, $X^2 + X + 1$ divise P_n.
3. $n \equiv 2$ [3] : on a alors que $j^n = j^2 = \overline{j}$ et $\overline{j}^n = \overline{j}^2 = j$; on en déduit (comme dans le cas précédent) que $X^2 + X + 1$ divise P_n.

Exercice 9-105
Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Calculer le PGCD des polynômes $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

CORRECTION
On applique l'algorithme d'Euclide. On suppose par exemple $n > m$, et on écrit $n = mq + r$, avec $0 \leq r < m$. Alors on a :

$$X^n - 1 = X^{mp+r} - 1 = X^r(X^{mp} - 1) + X^r - 1.$$

Le point crucial est que $X^{mp} - 1$ est divisible par $X^m - 1$. En effet, $X^{mp} - 1 = (X^m - 1)(X^{m(p-1)} + X^{m((p-1)-1)} + \cdots + X^m + 1)$. Ainsi, $\mathrm{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = \mathrm{pgcd}(X^m - 1, X^r - 1)$. Mais puisque $\mathrm{pgcd}(n, m) = \mathrm{pgcd}(m, r)$, on en déduit finalement que $\mathrm{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = X^{\mathrm{pgcd}(n,m)} - 1$.

Exercice 9-106
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

CORRECTION

On note que, pour tout k fixé entre 0 et $n-1$, on a

$$2\cos(2k\pi/n) \,=\, 2\Re\left(e^{i2k\pi/n}\right) \,=\, e^{i2k\pi/n} \,+\, e^{-i2k\pi/n} \qquad \text{et} \qquad 1 \,=\, e^{i2k\pi/n}\, e^{-i2k\pi/n}\,.$$

Donc on peut décomposer

$$X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1 \,=\, \left(X - e^{i2k\pi/n}\right)\left(X - e^{-i2k\pi/n}\right)\,.$$

En d'autres termes, pour chaque k fixé, le terme $X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1$ s'écrit comme le produit entre une racine n-ième de l'unité et son complexe conjugué. Mais son complexe conjugué est aussi une racine n-ième de l'unité, et en faisant varier k on prend toutes les racines. On en déduit que

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}(X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) \,&=\, \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i2k\pi/n}\right)\left(X - e^{-i2k\pi/n}\right) \\ &=\, \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i2k\pi/n}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{-i2k\pi/n}\right) \\ &=\, \left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i2k\pi/n}\right)\right)^2 \,=\, (X^n - 1)^2\,.\end{aligned}$$

Exercice 9-107
Pour $n \geq 1$, on note $P_n = (1+iX)^n - (1-iX)^n$ pour $n \geq 1$. Factoriser le polynôme P_n et en déduire les valeurs de $\sum\limits_{k=0}^{p} \tan^2(\frac{k\pi}{2p+1})$ et de $\sum\limits_{k=0}^{p-1} \tan^2(\frac{k\pi}{2p})$. On regroupera les termes dont les racines sont opposées.

CORRECTION

Exercice 9-108
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $a_i = a_{n-i}, \forall i \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}^*$ est racine alors $\frac{1}{z}$ est racine.
2. Factoriser $6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6$.

CORRECTION

1. On calcule

$$P(1/z) \,=\, \sum_{i=0}^{n} a_i (1/z)^i \,=\, \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{1}{z^i} \,=\, \frac{1}{z^n}\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}\,,$$

   où on a calculé le dénominateur en commun. Maintenant, par hypothèse de symmétrie sur les coefficients, on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i} \,=\, \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{n-i} \,=\, \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \,=\, P(z)\,.$$

   Donc on a trouvé que $P(1/z) = P(z)/z^n$. Du moment que z est racine, $P(z) = 0$, et alors aussi $P(1/z) = 0$.
2. On cherche une racine non-triviale ($\neq 0, \pm 1$) pour pouvoir appliquer le résultat précédent. On voit tout de suite que 2 est racine du polynôme. On sait alors que aussi $1/2$ l'est. Autrement dit, $X-2$ et $2X-1$ divisent le polynôme donné. Par division euclidienne, on a

$$6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6 \,=\, (X-2)\,(2X-1)\,(3X^2 - 10X + 3)\,.$$

Maintenant, le polynôme $3X^2 - 10X + 3$ vérifie l'hypothèse de symmétrie précédente. C'est facile à voir que 3 est une racine, et donc aussi 1/3. On en déduit que $3X^2 - 10X + 3 = (X-3)(3X-1)$ (la vérification est immédiate). Finalement, on trouve

$$6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6 = (X-2)(2X-1)(X-3)(3X-1).$$

Exercice 9-109

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(X+1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{deg(P)} \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$.

CORRECTION

On écrit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_dX^d$. Alors

$$\begin{aligned} P(X+1) = &(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_dX^d) + \\ &a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \ldots + da_dX^{d-1} + \\ &a_2 + 3a_3X + \ldots + \binom{d}{2} a_dX^{d-2} + \\ &\vdots \\ &a_{d-1} + da_dX + \\ &a_d. \end{aligned}$$

Donc $P(X+1) = P(X) + P'(X) + \dfrac{P^{(2)}(X)}{2} + \ldots + \dfrac{P^{(d)}(X)}{d}$.

Exercice 9-110

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et d son degré. Pour n entier naturel, on définit u_n commme étant la somme (avec multiplicité) des racines de $P^{(n)}$. Montrer que $(u_n)_{0 \leq n \leq d}$ est une suite arithmétique.

CORRECTION

Soit $P(X) = X^d + a_1X^{d-1} + \ldots$. Par les rélations coefficients- racines, on sais que $u_0 = a_1$. De façon analogue, $P'(X)\, dX^{d-1} + a_1(d-1)X^{d-2} + \ldots$, d'où on a $u_1 = a_1\,(d-1)/d$. De la dérivée seconde, on trouve $u_2 = a_1\,(d-2)/d$. En général, pour tout $k \in [0,d]$, on a

$$u_k = a_1 \frac{d-k}{d}.$$

Donc, on calcule

$$u_{k-1} - u_k = a_1 \frac{d-k+1}{d} - a_1 \frac{d-k}{d} = \frac{a_1}{d}(d-k+1-d+k) = \frac{a_1}{d},$$

qui est constant en k.

Exercice 9-111

Soit $P = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines complexes dont la somme vaut 2.

CORRECTION

Notons $a, b \in \mathbb{R}$ les deux racines dont la somme vaut 2. Alors il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $P = (X-a)(X-b)(X^2 + cX + d) = (X^2 - 2X + ab)(X^2 + cX + d)$. On développant et en identifiant les coefficients on trouve $c = 2$, $d = 4 - ab$ et $2ab - 2d = 12$. On en déduit $ab = 5$ et $d = -1$. On a finalement

$$P = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 2X - 1) = (X^2 - 2X + 5)(X + 1 - \sqrt{2})(X + 1 + \sqrt{2}).$$

Exercice 9-112

Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui satisfont à l'identité $(*)$:

$$(X+3)P(X) = XP(X+1).$$

1. Soit P un polynôme vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$.
2. Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.
3. En déduire que P est nécessairement de la forme $aX^m(X+1)^n(X+2)^p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}^*$.
4. Démontrer finalement que P vérifie $(*)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX(X+1)(X+2)$.

CORRECTION

1. De $(*)$, on trouve tout de suite que $3P(0) = 0$, donc 0 est une racine de P, et alors $P(X) = X\,Q(X)$, pour un certain polynôme Q.
2. La rélation $(*)$ devient alors $(**)$:
$$(X+3)\,X\,Q(X) \;=\; X\,(X+1)\,Q(X+1)\,.$$
Le polynôme à droite s'annulle si calculé en -1, d'où $Q(-1) = 0$ (parce que le membre de gauche aussi doit s'annuler). En utilisant cette dernière propriété, le membre de droite s'annulle aussi si calculé en -2, d'où $Q(-2) = 0$ (parce que le membre de gauche aussi doit s'annuler).
3. De la question précédente, on déduit que $X+1$ et $X+2$ divisent Q, et donc aussi P. On peut alors écrire
$$P(X) \;=\; a\,X^m\,(X+1)^n\,(X+2)^p\,R(X)\,,$$
avec $a \in \mathbb{R}$ et $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ unitaire. Aussi, on peut supposer que X, $X+1$ et $X+2$ ne divisent pas R. La rélation $(*)$ devient alors
$$(X+3)\,a\,X^m\,(X+1)^n\,(X+2)^p\,R(X) \;=\; X\,a\,(X+1)^m\,(X+2)^n\,(X+3)^p\,R(X+1) \qquad (1)$$
L'égalité précédente implique déjà que $m = 1$ (à cause des puissances de X), et alors $n = 1$ (puissances de $X+1$) et $p = 1$ (puissances de $X+2$). Cela implique que $X+3$ ne divise pas R, autrement dit que -3 n'est pas racine de R, et donc de P non plus.
Il nous reste à prouver que $R(X) = 1$.
Maintenant, si $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0, -1, -2, -3$ est une autre racine de P, donc α est une racine de R. De l'égalité précédente, calculée en α, on trouve alors
$$0 \;=\; \alpha\,a\,(\alpha+1)^m\,(\alpha+2)^n\,(\alpha+3)^p\,R(\alpha+1)\,.$$
Cela implique $R(\alpha+1) = 0$, et donc $\alpha+1$ est une autre racine de R. Cela implique que $\alpha \neq -4$; en itérant (il faudrait faire une récurrence), on trouve que $\alpha \neq -k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre côté, le même argument montre que $\alpha + k$ est une racine de R, pour tout $k \in \mathbb{N}$. R aurait donc une infinité de racine, et le théorème fondamental de l'algèbre impliquerait que $R \equiv 0$, d'où $P \equiv 0$: absurde. L'absurde vient de supposer que R admettait une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ différente de celles qu'on a déjà trouvées, et alors la seule possibilité est que $R \equiv 1$ (on avait choisi R unitaire).
4. On a prouvé que, forcement, il faut avoir $P(X) = a\,X\,(X+1)\,(X+2)$. D'autre côté, si P est de la forme précédente, P vérifie $(*)$. La preuve est alors complète.

Exercice 9-113

Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racines α, β, γ. Calculer :

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\alpha}\ .$$

CORRECTION

Puisque $X^3 + aX^2 + bX + c = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ on en déduit $\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = b$, $-(\alpha+\beta+\gamma) = a$ et $\alpha\beta\gamma = c$. De ces trois identités on peut aussi en déduire $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 - 2b$. Finalement en mettant sur le même dénominateur l'expression $S = \frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\alpha}$ et faisant apparaître les termes identifiés ci-dessus on trouve

$$S = \frac{a(a^2 - 2b) + 3c}{ab + c}.$$