Université Lyon 1 Année 2015-2016
Licence Mathématiques $3^{\text{ème}}$ année
Équations différentielles

Feuille 1 - Résolution explicite

Exercice 1. (*Ordre et linéarité*)

Donner l'ordre de chacune des équations différentielles suivantes et établir si elles sont linéaires ou non-linéaires, et autonomes ou non-autonomes.

(a) $x^2y''(x) - 4xy'(x) + y(x) = \sin x$

(b) $y^{(3)}(x) - \left(1 + y(x) + \dfrac{(y'(x))^2}{3}\right) y'(x) + 5y(x) = 0$

(c) $(y(x)^3 + y(x) - 1) - xy'(x) = 0$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

Exercice 2. (*Equations linéaires scalaires du premier ordre*)

On s'intéresse ici aux équations différentielles de la forme suivante

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t), \quad t \in I \tag{1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur I données, et $y : I \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

1. Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction y définie sur I par :

$$\forall t \in I,\ y(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} f(s)ds \tag{2}$$

   est solution de (1) sur I et vérifie $y(t_0) = y_0$.
   Cette formule est appelée *formule de Duhamel.*

2. Retrouver la formule de Duhamel en utilisant la méthode de variation de la constante pour résoudre (1).

3. *Des exemples.*

   (a) Donner la solution au problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{y(t)}{t^2} = -\dfrac{1}{t^3},\ t \in]0, +\infty[\\ y(1) = 1 \end{cases}$$

   (b) Résoudre les équations différentielles suivantes. Dans les deux cas, on précisera l'intervalle de définition des solutions maximales.

      i. $(1 - t^2)y'(t) + ty(t) = 3t,\ t \in \mathbb{R}.$

      ii. $(\sin t)y'(t) + (\cos t)y(t) = 1,\ t \in] - \pi, \pi[.$

Exercice 3. (*Equations linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients constants*)

Dans tout l'exercice, a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

1. On s'intéresse tout d'abord aux équations différentielles de la forme suivante

$$\text{(H)} \qquad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{S}_{\text{H}}$ l'ensemble des solutions de H.

   (a) Montrer que $\mathcal{S}_{\text{H}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

   (b) On admet le résultat suivant : *Pour tout* $t_0 \in \mathbb{R}$ *et tout couple* $(y_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$*, il existe une unique solution* y *de* (H) *sur* $\mathbb{R}$ *qui vérifie* $y(t_0) = y_0$ *et* $y'(t_0) = v_0$.
   En considérant l'application :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{S}_{\text{H}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ y & \longmapsto & (y(0), y'(0)), \end{array} \right.$$

   donner la dimension $\mathcal{S}_{\text{H}}$.

   (c) Pour décrire l'ensemble des solutions de (H), on cherche à exhiber une base de l'espace $\mathcal{S}_{\text{H}}$. Pour cela, on cherche les solutions (éventuellement à valeurs complexes) de la forme $t \mapsto e^{rt}$ où $r \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, et r pour que y soit solution de (H).

   (d) Trouver une base de $\mathcal{S}_{\text{H}}$ composée de fonctions **réelles**. *Indication : on pourra distinguer trois cas en partant de la question précédente.*

2. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On s'intéresse maintenant à l'équation non homogène suivante

$$\text{(E)} \qquad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \quad t \in I.$$

On note $\mathcal{S}_{\text{E}}$ l'ensemble des solutions de (E).

   (a) Soit $y_{\text{E}} \in \mathcal{S}_{\text{E}}$. Montrer que pour toute fonction y solution de (E) sur I, il existe une fonction $y_{\text{H}} \in \mathcal{S}_{\text{H}}$ telle que $y = y_{\text{E}} + y_{\text{H}}$ sur I.

   (b) *(Variation des constantes)* On cherche une solution particulière de (E). Soit (y_1, y_2) une base de $\mathcal{S}_{\text{H}}$. Soient $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ deux fonctions dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in I, \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda'(t) y_1(t) + \mu'(t) y_2(t) = 0, \\ \lambda'(t) y_1'(t) + \mu'(t) y_2'(t) = \dfrac{f(t)}{a}. \end{array} \right.$$

   Montrer que la fonction $y(t) = \lambda(t) y_1(t) + \mu(t) y_2(t)$ est une solution de (E).

3. *Exemple.* On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t) = f(t), \quad t \in I. \tag{3}$$

   (a) En utilisant la méthode que l'on vient de décrire montrer que les solutions de l'équation différentielle (3) sont de la forme

$$y(t) = \lambda e^{t - t_0} + \mu e^{-(t - t_0)} + \int_{t_0}^{t} \operatorname{sh}(t - s) f(s) ds, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, t_0 \in I. \tag{4}$$

   (b) Montrer que y est solution de (3) si, et seulement si, $X = (y, y')^T$ est solution de

$$(\mathcal{E}) \qquad X'(t) = AX(t) + F(t), \quad t \in I,$$

   où A est une matrice carrée et F une fonction de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ que l'on déterminera.

   (c) Montrer que A est diagonalisable, et l'écrire sous la forme $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale. Calculer e^{tA} pour tout réel t.

(d) Montrer que la résolution de $(\mathcal{E})$ se ramène à la résolution de deux équations différentielles linéaires du **premier ordre** non couplées. Résoudre ces équations.

(e) Soit $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^2$. Déduire des questions précédentes que la solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant $X(t_0) = X_0$ est donnée par

$$\forall t \in I,\ X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}F(s)ds. \tag{5}$$

Remarque : en fait, la formule de Duhamel (5) *pour les solutions de l'équation* $(\mathcal{E})$ *est valable pour tout matrice* A, *y compris en dimension plus grande que 2.*

(f) Vérifier que l'on retrouve bien l'expression (4) pour $y(t)$ avec la formule de Duhamel (5).

Exercice 4. (*Séparation des variables*)
Résoudre les équations différentielles ci-dessous. Donner les solutions maximales et indiquer si elles sont globales.

(a) $y(t)y'(t) = -t,\ t \in \mathbb{R}$

(b) $y'(t) = \dfrac{1}{t^2}\, y(t)\big(y(t) - 1\big),\ t > 0$

(c) $y'(t) = (y(t) + 3t)^3 - 3,\ t \in \mathbb{R}$

Pour les équations (b) et (c), trouver la (les) solution(s) maximale(s) satisfaisant l'égalité supplémentaire : $y(1) = 3$.

Exercice 5. (*Equations de Bernouilli*)
Résoudre les équations de Bernouilli suivantes :

(a) $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$,

(b) $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$.

Exercice 6. (*Equation de Ricatti*)
L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

(où P, Q et R sont des fonctions données) est connue sous le nom d'équation de Ricatti.

1. Une équation de Ricatti peut être résolue par une succession de deux substitutions pourvu que nous connaissions une solution particulière y_1 de l'équation. Indiquer comment résoudre cette équation en utilisant le changement d'inconnue $y = y_1 + u$.

2. *Application.* Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2.$$

Exercice 7. (*Equations aux différentielles totales*)
Montrer que les équations différentielles suivantes peuvent s'écrire comme des équations aux différentielles totales et les résoudre :

1. $(x^2 - 1)y'(x) + 2xy(x) = 0$
2. $y(x)(1 - x^2)y'(x) = x\big(y(x)\big)^2 - \sin x \cos x$.

Exercice 8. (*Facteurs intégrants*)

1. Trouver la valeur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour laquelle l'équation différentielle suivante est aux différentielles totales :

$$(y^3 + \alpha x y^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0.$$

   Résoudre ensuite cette équation.

2. Résoudre l'équation différentielle suivante en trouvant un facteur intégrant approprié :

$$(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0.$$

Exercice 9. (*Equation présentant une homogénéité*)

1. On considère une équation différentielle générale de la forme

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

   avec $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Indiquer comment résoudre ce problème en utilisant le changement d'inconnue $y(t) = tu(t)$.
2. *Exemple.* Résoudre l'équation différentielle

$$y' = \frac{y^2 + ty - t^2}{t^2}.$$

Exercice 10. (*Solution maximale, globale*)

On se donne deux fonctions continues et strictement positives $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = \varphi(x(t))\psi(t) \tag{6}$$

1. On suppose dans cette partie qu'on a

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\varphi(y)}\, dy = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(y)}\, dy = +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\, dy < +\infty.$$

   Montrer que toute solution maximale est globale et possède deux asymptotes horizontales distinctes.
2. On suppose ici que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(y)}\, dy < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\, dy < +\infty$$

   avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(y)}\, dy > \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\, dy.$$

   Montrer que l'équation différentielle (6) possède une infinité de solutions globales ainsi qu'une infinité de solutions maximales non globales.
3. *Un exemple.* Considérons l'équation différentielle suivante :

$$x' = \left(\frac{x^2+1}{t^4+1}\right)^{1/3}.$$

   Que peut-on dire des solutions de cette équation ?