Université Lyon 1 Année 2015-2016
Licence Mathématiques 3ème année
Équations différentielles

Feuille 2 - Autour du théorème de Cauchy-Lipschitz

Exercice 1. (*Pas d'unicité*)
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Construire une solution non nulle au problème (1).
2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ici ? Pourquoi ?

Exercice 2. (*Lemme de comparaison*) Soient $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(t,x) < g(t,x). \tag{2}$$

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On considère les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), \\ y(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3}$$

1. *Cas Lipschitz.* On suppose que f et g sont des fonctions globalement lipschitziennes sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
   (a) Justifier qu'il existe deux fonctions $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions des problèmes de Cauchy (3).
   (b) Montrer que pour tout $t > t_0$, on a $x(t) < y(t)$.
   Indication : on pourra étudier la fonction $w = x - y$.
   (c) Que peut-on dire pour $t < t_0$?
   (d) Montrer que si l'inégalité (2) est large, alors pout tout $t \geq t_0$, $x(t) \leq y(t)$. Qu'en est-il pour $t \leq t_0$?
2. *Cas continu.* On suppose maintenant que les fonctions f et g sont seulement continues, et qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que $t_0 \in I$, et $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ solutions des problèmes de Cauchy (3).
   Montrer que pour tout $t \in I \cap]t_0, +\infty[$, $x(t) < y(t)$.
   Indication. Considérer $J = \{c \in I \,;\, c > t_0, \ \forall t \in]t_0, c[, \ x(t) < y(t)\}$.

Exercice 3. (*Conséquences du théorème "des bouts"*)
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $n \geq 1$. Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction vérifiant les hypothèses suivantes :
(H1) f continue sur $I \times \mathbb{R}^n$,
(H2) f localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, *i.e.* pour tout $(t_1, x_1) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage V de (t_1, x_1) dans $I \times \mathbb{R}^n$ et $L > 0$ tels que : pour tout $(t, x), \ (t, y) \in V$, $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$.
Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale au problème (4), définie sur un intervalle ouvert $J \subset I$: $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$.
2. Montrer que si $\sup J < \sup I$ (*i.e. la solution maximale x n'est pas globale*), alors
$$\lim_{t \to \sup J} \|x(t)\| = +\infty.$$
3. Montrer que si la solution maximale $x : J \to \mathbb{R}^n$ est bornée sur J alors $J = I$, *i.e.* la solution est globale.
4. Plus généralement, montrer que si la solution maximale $x : J \to \mathbb{R}^n$ est bornée sur tout intervalle borné inclus dans J, alors elle est globale.
5. *Cas f bornée.* Montrer que si $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifie (H1)-(H2) et si de plus f est bornée sur $I \times \mathbb{R}^n$, alors toute solution maximale est globale.
6. *Cas f sous-linéaire.* Montrer que si $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifie (H1)-(H2) et si de plus il existe $\lambda, \mu > 0$ tels que
$$\forall t \in I, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(t,x)\| \leq \lambda \|x\| + \mu$$
(où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$), alors toute solution maximale est globale.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x > 0, f(t,x) = -\frac{1}{x}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.
2. Soit $x_0 > 0$. On considère le problème de Cauchy
$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{x(t)}, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5}$$
3. Calculer explicitement la solution maximale au problème (5). On note $J =]t_*, T^*[$ son intervalle de définition, avec t_* et T^* finis ou infinis.
4. Etudier le comportement de $x(t)$ quand $t \to T^*$. Faire le lien avec le théorème "des bouts" (ou théorème de sortie de tout compact) ?

Exercice 5.
On considère le problème de Cauchy suivant
$$\begin{cases} v'(t) = -v(t)^2,\ t \in \mathbb{R} \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{6}$$

1. Montrer que pour toute donnée initiale $v_0 \in \mathbb{R}$ le problème (6) admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle de la forme $]-T, T^*[$ où $T, T^* \in]0, +\infty]$.
2. Montrer que si $v_0 \neq 0$ alors la solution correspondante ne s'annule pas sur $]-T, T^*[$.
3. Calculer explicitement cette solution ainsi que T et T^* en fonction de v_0.

Exercice 6.
Pour $y_0 \in \mathbb{R}$, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :
$$\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{7}$$

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que le problème (7) admet une unique solution maximale y. Montrer que cette solution est globale, *i.e.* définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Montrer de plus que cette solution est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Quelles sont les solutions stationnaires de (7) (*i.e.* les fonctions constantes solutions) ?
3. On suppose que $0 < y_0 < \pi$. Montrer que

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall t \in \mathbb{R},\ 0 < y(t) < \pi, \\ (ii) & \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0,\ \lim_{t\to+\infty} y(t) = \pi \end{array}$$

Exercice 7.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}, x \neq 0, xf(t,x) < 0$. Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ sont définies jusqu'à $+\infty$ et admettent une asymptote horizontale.
2. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -\nabla F(x(t)), t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{8}$$

où ∇F désigne le gradient de F et est défini par

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

On suppose de plus que

$$\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = +\infty$$

(a) Montrer que le problème de Cauchy (8) admet une unique solution maximale x définie sur un intervalle ouvert $]t_-, t_+[$, $t_\pm$ finis ou non.

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto F(x(t))$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que $t_+ = +\infty$.

(c) En considérant le cas $n = 1$ et $F(x) = x^4/4$, montrer que l'on peut avoir $t_- > -\infty$.

Exercice 8. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = x\, y(x)^2,\ x \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{9}$$

1. Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale au problème (9) $y : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I.
2. On suppose que $y_0 = 0$. Quelle est alors la solution maximale du problème (9) ?
3. On suppose que $y_0 \neq 0$. Notant (y, I) la solution maximale associée, montrer que soit y est strictement positive sur I, soit strictement négative sur I.
4. Résoudre l'équation dans le cas où $y_0 \neq 0$.

Exercice 9.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + x(t)^2,\ t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale (x, I) à ce problème.

2. Montrer que x est impaire, et étudier sa monotonie, sa concavité.
3. Montrer que l'intervalle I est borné, puis étudier les limites de x aux bornes de I.

Exercice 10.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1}{1+tx(t)} \\ \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale (x, I) à ce problème.
2. Montrer que x est impaire et strictement croissante.
3. Montrer que la solution est globale, i.e que $I = \mathbb{R}$. Etudier les limites de x en $\pm\infty$.

Exercice 11.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = \cos(tx(t)), \; t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{12}$$

où $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Justifier l'existence d'une unique solution maximale au problème de Cauchy (12), et montrer qu'une telle solution est globale (définie sur $\mathbb{R}$ tout entier).