Université Lyon 1 — Année 2015-2016

Licence Mathématiques 3$^{\text{ème}}$ année

Équations différentielles

Feuille 3 - Equations et systèmes linéaires

Systèmes linéaires à coefficients constants

Exercice 1.

1. Trouver toutes les solutions (x_1, x_2) du système linéaire homogène

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) + 4x_2(t) \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   On précisera leur intervalle de définition.

2. Trouver la solution de (1) satisfaisant en plus : $x_1(1) = 4,\ x_2(1) = 0$.
3. Trouver la solution maximale (y_1, y_2) du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_1(t) + y_2(t) \qquad\qquad ,t \in \mathbb{R} \\ y_2'(t) & = & -2y_1(t) + 4y_2(t) + e^t \\ y_1(0) & = & 2 \\ y_2(0) & = & 0. \end{array} \right.$$

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

1. Mettre (2) sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 à deux inconnues.
2. Donner toutes les solutions de (2).
3. Trouver la solution du problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = t,\ t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = \frac{27}{25}, \\ x'(0) = 0. \end{array} \right.$$

Exercice 3.

Donner toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$x^{(3)}(t) + 3x''(t) - 4x(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. (*L'oscillateur harmonique*)

Considérons l'équation différentielle homogène de second ordre

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = c \sin(\omega t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et ω_0, ω deux constantes strictement positives telles que $\omega \neq \omega_0$.
Cette équation modélise le mouvement d'un corps attaché à un ressort élastique sous l'action d'une force périodique de pulsation ω, en l'absence de frottement ; l'inconnue $y(t)$ représente la position du corps au moment t.

1. Donner une solution particulière y_p de (3).
2. Donner toutes les solutions de (3).
3. Montrer que si $\omega \to \omega_0$ alors $\sup_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| \to +\infty$ pour toute solution y de (3) (ce phénomène est appelé la *résonance*).

Deux exemples de systèmes à coeffcients variables

Exercice 5. (*Un système à coefficients non constants*)

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = tx(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + ty(t) \end{cases}$$

où $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles de la variable t.

Résoudre le problème de Cauchy de donnée initiale (x_0, y_0) en $t = 0$.

Indication : on pourra poser $z = x + iy$.

Exercice 6.

Soit $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable, *i.e.* $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\theta(t)|dt < \infty$. On considère l'équation différentielle linéaire

$$x''(t) + (1 + \theta(t))x(t) = 0$$

On suppose que f est une solution de cette équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+$. On pose pour tout $t \geq 0$,

$$g(t) = f(t) + \int_0^t \theta(s)f(s)\sin(t-s)ds.$$

1. Vérifier que $g''(t) + g(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.
2. En déduire qu'il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $t \geq 0$,
$$|f(t)| \leq A + \int_0^t |\theta(s)| \cdot |f(s)|ds$$
3. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Systèmes linéaires à coefficients variables : définition et premières propriétés de la résolvante

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite de cette feuille, on s'intéresse à un système différentiel de la forme

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{4}$$

où $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$.

Exercice 7. (*Cas homogène*)

1. Soit $t_0 \in I$. Montrer qu'il existe une unique solution $M \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, définie sur I tout entier, au problème de Cauchy
$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t), \ t \in I \\ M(t_0) = I_n \end{cases} \tag{5}$$
où I_n désigne la matrice identité de dimension n.
On notera $M(t) = R(t, t_0)$ pour tout $t \in I$. *L'application $R : I \times I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (t, t_0) \mapsto R(t, t_0)$ est appelée résolvante du système différentiel $x'(t) = A(t)x(t)$.*
2. Montrer que pour tout $t_0, t_1, t \in I$, $R(t, t_0) = R(t, t_1)R(t_1, t_0)$.

3. Montrer que pour tout $t, t_0 \in I$, $R(t, t_0)$ est une matrice inversible et que $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$.
4. *Cas particuliers.*
   (a) En dimension $n = 1$, calculer explicitement $R(t, t_0)$.
   (b) En dimension $n \geq 1$ quelconque, on suppose que $A(t) = A$ pour tout t (cas à coefficients constants). Que vaut $R(t, t_0)$?
5. Soit $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la solution de

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t), \; t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

   s'écrit $x(t) = R(t, t_0)x_0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 8. (*Formule de Duhamel*)

On reprend les notations de l'exercice précédent. Montrer que la solution du problème

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \; t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

s'écrit pour tout $t \in I$,

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)ds.$$