Université Lyon 1 Année 2015-2016
Licence Mathématiques 3ème année
Équations différentielles

Feuille 4 - Equations différentielles linéaires à coefficients périodiques

Equations différentielles linéaires à coefficients périodiques en dimensions 1 et 2

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique (avec $T > 0$). On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire suivante

$$u'(t) = f(t)u(t). \tag{1}$$

1. Trouver $b \in \mathbb{R}$ et $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ une application continue et T-périodique telle que u est solution de (1) si et seulement si $v : t \mapsto q(t)u(t)$ est solution de $v' = bv$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que les solutions de (1) soient toutes bornées.

Exercice 2.

1. On considère le système différentiel $u'(t) = A(t)u(t)$ où

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

   (a) Trouver une équation différentielle satisfaite par $r(t) = \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2}$ où $(u_1(t), u_2(t))$ sont les composantes de $u(t)$.

   (b) En déduire que les solutions de $u'(t) = A(t)u(t)$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$.

2. On considère le système différentiel $u'(t) = A(t)u(t)$ où la matrice $A(t)$ est cette fois-ci donnée par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

   (a) Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une application $Q : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ 4π-périodique (où $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices orthogonales réelles de dimension 2) telles que :

$$A(t) = Q(t)MQ(t)^T, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   (b) Soient $e_1(t)$ et $e_2(t)$ les vecteurs colonnes de $Q(t)^T$. Montrer que e_1 et e_2 sont dérivables et calculer e_1' et e_2' en fonction de e_1 et e_2.

   (c) Soit u une solution de $u'(t) = A(t)u(t)$ et soit $v(t) = Q(t)^T u(t)$. Montrer que v est solution d'un système linéaire à coefficients constants $v' = Bv$, où $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice que l'on déterminera.

   (d) Réciproquement, soit v une solution de $v' = Bv$. Montrer que $u : t \mapsto Q(t)v(t)$ est solution de $u'(t) = A(t)u(t)$.

   (e) Les solutions de $u'(t) = A(t)u(t)$ sont-elles bornées sur $\mathbb{R}^+$? sur $\mathbb{R}^-$? sur $\mathbb{R}$? *Indication : on pourra étudier le spectre de B.*

Etude du cas général.

L'étude menée dans les exercices 1 et 2 sur des cas particuliers en dimension $n \leq 2$ peut en fait être généralisée à une dimension n quelconque. On a en effet les deux résultats suivants, connus sous le nom de théorèmes de Floquet-Lyapunov, et dont la démonstration fait l'objet de l'exercice 3 :

Théorème 1 : *Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une application T-périodique. Il existe une application T-périodique $Q : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que u est solution de $u'(t) = A(t)u(t)$ si et seulement si $v : t \mapsto Q(t)u(t)$ est solution de $v'(t) = Bv(t)$.*

Théorème 2 : *Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application T-périodique. Il existe une application $2T$-périodique $Q : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que u est solution de $u'(t) = A(t)u(t)$ si et seulement si $v : t \mapsto Q(t)u(t)$ est solution de $v'(t) = Bv(t)$.*

Exercice 3.

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une application T-périodique. On considère l'équation linéaire $u'(t) = A(t)u(t)$ et sa résolvante qui est l'unique application $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{K})$ telle que pour tous $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, s) = A(t)R(t, s), \qquad R(s, s) = I_n.$$

   (a) Montrer que $R(t + T, s + T) = R(t, s)$ pour tout couple $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   (b) Montrer qu'il existe une solution T-périodique *non triviale* à l'équation différentielle $u'(t) = A(t)u(t)$ si et seulement si la matrice $R(T, 0)$ admet 1 comme valeur propre.

2. On se place dans le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On admet le résultat suivant :

Pour tout $C \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $e^B = C$.

   (a) Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $e^{TB} = R(T, 0)$.

   (b) Soit $Q(t) = e^{tB}R(0, t)$. Montrer que Q est T-périodique. *Indication : on pourra utiliser la question 1 et les propriétés élémentaires de la résolvante.*

   (c) En déduire une preuve du Théorème 1.

3. On se place dans le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On admet le résultat suivant :

Pour tout $C \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $e^B = C^2$.

   (a) Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $e^{2TB} = R(T, 0)^2$.

   (b) En s'inspirant du cas complexe, donner la preuve du Théorème 2.

4. On admet le résultat suivant :

   Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $C \in GL_n(\mathbb{K})$ s'écrit $C = e^B$, alors les valeurs propres de C coïncident avec les exponentielles des valeurs propres de B, avec les mêmes multiplicités.

   Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur la matrice $R(T, 0)$ pour que les solutions de $u'(t) = A(t)u(t)$ soient bornées sur $\mathbb{R}^+$, *resp.* sur $\mathbb{R}^-$, *resp.* sur $\mathbb{R}$.