Université Lyon 1 Année 2015-2016
Licence Mathématiques 3ème année
Équations différentielles

Feuille 5 - Etude qualitative des équations différentielles non linéaires

On rappelle les définitions suivantes concernant la stabilité des équilibres.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $v \in U$ tel que $f(v) = 0$. Alors la fonction constante $x : t \mapsto v$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)).$$

On dit que v est un point d'équilibre pour cette équation.

On dit que v est équilibre stable *s'il existe un voisinage V_0 de v dans U tel que*

1. *pour tout $w \in V_0$, la solution maximale x au problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(x(t)) \\ x(0) & = & w \end{array} \right.$ est définie sur un intervalle ouvert contenant $[0, +\infty[$. On note $x(t) = \phi_t(w)$.*
2. *pour tout voisinage W de v dans U, il existe un voisinage $V \subset V_0$ tel que $\phi_t(w) \in W$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $w \in V$.*

Si de plus,

3. *il existe $V_1 \subset V_0$ tel que : pour tout $t \in V_1$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi_t(w) = v$, alors le point fixe est dit* asymptotiquement stable.

On dit d'un point non stable qu'il est instable.

Exercice 1. (*Equilibre asymptotiquement stable*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. On suppose que $x_0 \in \Omega$ est un équilibre pour le système différentiel

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1}$$

i.e. $f(x_0) = 0$.

Quitte à translater, on peut supposer $x_0 = 0$. On note A la matrice jacobienne de f au point x_0. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant (vu en cours) :

Théorème. *Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0, alors l'équilibre x_0 est aymptotiquement stable pour le système* (1).

On suppose dans la suite que toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0.

1. La preuve du théorème repose sur le résultat suivant d'algèbre linéaire : *il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$ tels que*
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax, x \rangle_A \leq -\alpha \|x\|_A^2,$$
où $\| \cdot \|_A$ désigne la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.
Montrer ce résultat dans le cas où A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. *On admettra que le résultat est encore vrai si A n'est pas diagonalisable.*
2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$\|x\|_A < \delta \Longrightarrow \langle f(x), x \rangle_A \leq -\frac{\alpha}{2} \|x\|_A^2.$$

3. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\|_A < \delta$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale x à (1) telle que $x(0) = v$, définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. Montrer qu'il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$, $\|x(t)\|_A < \delta$.
4. Montrer que pour tout $t \in [0, T]$,
$$\|x(t)\|_A^2 \leq e^{-\alpha t}\|v\|_A^2.$$
5. En déduire que l'intervalle I contient $[0, +\infty[$ et que $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.
6. Conclure.

Exercice 2. (*Dynamique des populations*)

1. *Une population en milieu limité.* On étudie ici un modèle simplifié de dynamique des populations : l'équation logistique. Notons $N(t)$ la population d'une espèce à un temps t. On modélise l'évolution de la population par l'équation différentielle suivante :
$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right)$$
où l'inconnue est la fonction N de la variable réelle t, $r > 0$ étant une constante reflétant le taux de croissance et $k > 0$ la "capacité limite" du milieu.

   Faire une étude qualitative de ce problème (portrait de phase, points d'équilibre, limites, tracé des trajectoires) et interpréter les résultats.
2. *Deux populations en compétition pour une même ressource.* On modélise la dynamique de deux populations en compétition pour la même ressource, disponible en quantité limitée, par le système différentiel suivant
$$\begin{cases} x' = x(1 - x - ay) \\ y' = ry(1 - bx - y) \end{cases}$$
où $a, b, r > 0$ et pour tout temps t,
$$\begin{aligned} x(t) &= \text{nombre d'individus de la population 1 au temps t} \\ y(t) &= \text{nombre d'individus de la population 2 au temps t.} \end{aligned}$$
On suppose $ab \neq 1$.
   (a) Déterminer en fonction des paramètres a et b les points d'équilibre et leur type de stabilité. *On ne s'intéressera qu'aux équilibres "biologiquement réalistes", i.e. dont les coordonnées sont positives.*
   (b) Esquisser un portrait de phase dans les différents cas trouvés. Interpréter.

Exercice 3. (*Pendule simple et pendule amorti*)

L'équation du pendule simple est
$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \sin\big(x(t)\big) = 0. \tag{2}$$
et celle du pendule amorti
$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + k\frac{dx}{dt}(t) + \sin\big(x(t)\big) = 0. \tag{3}$$
où $k > 0$.

On réécrit ces équations du second ordre sous la forme de systèmes de deux équations du premier ordre :
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = v(t) \\ \dfrac{dv}{dt}(t) = -\sin\big(x(t)\big) \end{cases} \tag{4}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = v(t) \\ \dfrac{dv}{dt}(t) = -kv(t) - \sin\big(x(t)\big) \end{cases} \tag{5}$$

avec les conditions initiales $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$, où x_0 et v_0 sont deux réels donnés.

On souhaite étudier le comportement des solutions de ces deux systèmes. Pour ça, on va tracer leurs portraits de phase.

1. *Eléments pour tracer les portraits de phase "à la main".*
   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution globale (définie sur $\mathbb{R}$ tout entier) aux systèmes (4) et (5) pour toute donnée initiale (x_0, v_0).
   (b) Déterminer les points d'équilibre des systèmes.
   (c) On note pour tout $(x, v) \in \mathbb{R}^2$, $H(x, v) = \dfrac{1}{2}v^2 - \cos x$.
      i. Montrer que si $t \mapsto (x(t), v(t))$ est solution de (4), $H(x(t), v(t))$ ne dépend pas du temps. Autrement dit, H est une intégrale première pour (4).
      ii. Montrer que $H(x(t), v(t))$ est décroissante le long des trajectoires du système amorti (5).
   (d) Tracer le portrait de phase du pendule simple. *On pourra étudier les ensembles de niveau de* H : $\mathcal{E}_a = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, H(x, v) = a\}$ *pour* $a \in \mathbb{R}$.
   (e) Décrire le comportement des solutions de (4) en fonction de la valeur initiale de l'hamiltonien $H(x_0, v_0)$.
   (f) On s'intéresse maintenant au pendule amorti.
      i. Montrer que le système (5) n'admet pas de solutions périodiques non constantes.
      ii. Montrer que l'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable pour (5), *i.e.* pour des données initiales (x_0, v_0) dans un voisinage de $(0, 0)$, les solutions associées $(x(t), v(t))$ convergent vers $(0, 0)$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 4. (*Equations de Lokta-Volterra*)

On présente dans cet exercice un système proie-prédateur. Désignons par

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{nombre de proies au temps t} \\ y(t) &= \text{nombre de prédateurs au temps t.} \end{aligned}$$

L'évolution de ces fonctions se modélise par le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (cx - d)y \end{cases} \tag{6}$$

où a, b, c, d sont des paramètres strictement positifs.

Le choix de telles équations s'explique simplement : pour la première, les proies sont mangées proportionnellement au nombre des prédateurs. On peut voir a/b comme le nombre de prédateurs à ne pas dépasser pour que l'espèce des proies se maintienne ; le taux de croissance x'/x de celles-ci est alors proportionnel à la différence $a/b - y$.

Pour la seconde équation, on peut voir d/c comme le nombre minimal de proies à manger pour que l'espèce des prédateurs se maintienne. Le taux de croissance des prédateurs y'/y est alors proportionnel à la différence $x - d/c$; lorsqu'il est positif, tout va bien, mais s'il est négatif ...

1. Déterminer les points d'équilibre du système différentiel (6) et si possible, déterminer leur type de stabilité.
2. Montrer que les axes sont invariants par le système (6), *i.e.* si $x(0) = 0$ (respectivement $y(0) = 0$) alors la solution associée vérifie $x(t) = 0$ (respectivement $y(t) = 0$) pour tout t dans son intervalle de définition.

3. Montrer que le quart de plan $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, y > 0\}$ est invariant par (6), *i.e.* si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$, alors la solution associée vérifie $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t dans son intervalle de définition.
4. Représenter l'orientation du champ de vecteurs associé à (6) dans quatre zones caractéristiques de Q. Montrer que chaque courbe intégrale rencontre successivement chacune de ces zones.
5. Déterminer une fonction $L : \Omega \to \mathbb{R}$ de la forme
$$L(x,y) = F(x) + G(y)$$
telle que pour toute solution (x,y), $L(x(t),y(t)) = L(x(0),y(0))$ pour tout t.
6. En déduire que toutes les solutions pour lesquelles $(x(0),y(0)) \in Q$ sont périodiques.
7. Esquisser un portrait de phase du système (6).

Exercice 5. (*Extrait contrôle final juin 2014*)

On considère le système dynamique non linéaire suivant
$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x} &= \quad x\,(1-(x^2+y^2)) + y, \\ \dot{y} &= \; -x + y\,(1-(x^2+y^2)). \end{cases}$$

1. Montrer que le système (S) admet $(0,0)$ comme unique équilibre.
2. Etudier la stabilité et le type de cet équilibre.
3. On s'intéresse maintenant au problème de Cauchy pour (S) :
$$\begin{cases} \dot{x} &= \quad x\,(1-(x^2+y^2)) + y, & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= \; -x + y\,(1-(x^2+y^2)), & y(0) &= y_0. \end{cases}$$
On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Justifier l'existence d'une unique solution maximale (x,y) au problème de Cauchy ci-dessus, définie sur un intervalle ouvert J.
4. Montrer que si $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ alors pour tout $t \in J$, $(x(t),y(t)) \neq (0,0)$.
5. On suppose désormais $(x_0,y_0) \neq (0,0)$. On définit
$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}, \quad \text{pour tout } t \in J.$$
Montrer que r est solution de l'équation différentielle
$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1-r^2), \\ r(0) &= r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \end{cases} \tag{7}$$
6. En séparant les cas $r_0 = 1$, $r_0 \in]0,1[$, et $r_0 > 1$, étudier le comportement qualitatif de la solution de (7). *On justifiera en particulier que r est définie jusqu'en $+\infty$, on étudiera sa monotonie, et sa limite quand $t \to +\infty$.*
7. En déduire que J contient $[0,+\infty[$ et que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)^2 + y(t)^2 = 1$.
8. Pour compléter l'étude, on écrit la solution en polaires : pour tout $t \in J$,
$$x(t) = r(t)\cos(\theta(t)), \;\; y(t) = r(t)\sin(\theta(t)),$$
où $\theta : J \to \mathbb{R}$. On suppose que θ est dérivable sur J. Montrer que pour tout $t \in J$,
$$\dot{\theta} = -1$$
9. Décrire le comportement des solutions de (S) quand $t \to +\infty$ suivant les valeurs de (x_0,y_0). Dessiner quelques orbites représentatives dans le plan de phase (x,y).
10. (BONUS) Répondre à la question 9 pour le système qui s'écrirait en coordonnées polaires de la façon suivante :
$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1-r)(r-2), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{cases}$$
en considérant toutefois les cas $r_0 = 0, 1$ et 2 ainsi que les cas où $r_0 \in]0,1[,]1,2[$ et $]2,+\infty[$.