

Feuille 10. Dérivabilité

Exercice 10-1 Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, calculer la fonction dérivée f' :

- | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|--|--------------------------------|
| 1) $x^4 + 3x^2 - 6$ | 2) $6x^{7/2} + 4x^{5/2} - 2x$ | 3) $\sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$ | 4) $x(x+3)e^x$ |
| 5) $\frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$ | 6) $\frac{\sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{x}}$ | 7) $\frac{\ln x}{x^3}$ | 8) $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ |
| 9) $\sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ | 10) $\sin(\cos(3x))$ | 11) $\ln(\sin^2 x)$ | 12) e^{-x^2} |
| 13) $(1-x)^{7/3}$ | 14) $\ln(2x)$ | 15) $e^{2i\pi x}$ | 16) $2^{\ln x}$ |

Exercice 10-2 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

soit dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .

Exercice 10-3

- Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & \text{si } x < 0, \\ \cos^2(\pi x), & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- Même question avec f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x|}$.

Exercice 10-4 Préciser pour chacune des fonctions suivantes de \mathbb{R} vers \mathbb{R} en quels points elles sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et les valeurs de leurs dérivées, dérivées à droite, dérivées à gauche.

- $f : x \mapsto \cos(\cos(x))$.
- $g : x \mapsto \sqrt{1 + \cos(x)}$.
- $h : x \mapsto \sqrt{|\sin x|}$.

Exercice 10-5 Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x + \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0, \\ \sin x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- Pourquoi f est-elle dérivable en tout point de \mathbb{R}^* ? Calculer sa dérivée.
- f est-elle dérivable en 0?
- f' est-elle continue en 0?
- f est-elle deux fois dérivable en 0?

Exercice 10-6 Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de n , f_n est-elle continue ?
2. Pour quelles valeurs de n , est-elle f_n dérivable ?
3. Pour quelles valeurs de n , est-elle f'_n continue ?
4. Pour quelles valeurs de n , est-elle f'_n dérivable ?

Exercice 10-7 Appliquer le théorème des accroissements finis pour démontrer les inégalités suivantes :

1. $|\sin x| \leq |x|$ pour $x \geq 0$;
2. $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$.

Remarque : Ces résultats peuvent aussi se démontrer par des arguments de concavité.

Exercice 10-8 Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x - x$.

1. En appliquant à f le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\ln n \leq f(n+1) - f(n) \leq \ln(n+1).$$

2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \leq f(n+1) + 1 \leq \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1).$$

3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Exercice 10-9

1. Montrer que pour tous réels x et y : $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$.
2. Montrer que pour tous réels x et y tels que $x \neq y$: $|\cos y - \cos x| < |y - x|$.

Exercice 10-10 Soit f de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} une fonction trois fois dérivable.

1. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et que $f(1) = 0$. Montrer que f''' s'annule sur l'intervalle $]0, 1[$.
2. On suppose ici que $f(0) = f(1/3) = f(2/3) = f(1) = 0$. Montrer le même résultat. Généralisez à une fonction k fois dérivable ayant n zéros, pour tous entiers $k < n$.
3. On suppose ici que $f(0) = f'(0) = 0$ et que $f(1) = f'(1) = 0$. Montrer le même résultat.

Exercice 10-11 On considère $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire qu'il existe des nombres réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que $a_n \neq 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

Par des arguments de monotonie stricte, montrer qu'il existe au plus n solutions réelles à l'équation $P(x) = 0$. (On pourra entreprendre une récurrence sur le degré).

Exercice 10-12 Montrer que $100 + \frac{1}{200}$ est une approximation par excès de $\sqrt{10001}$, et que l'erreur d'approximation est inférieure à $\frac{1}{4 \cdot 10^6}$.

Exercice 10-13 Montrer que pour tout entier $k \geq 1$: $\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(n)$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$ où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

Exercice 10-14

1. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que pour $\alpha \leq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \infty.$$

2. On suppose maintenant $\alpha > 1$. Pour $k \geq 2$, comparer $\frac{\alpha-1}{k^\alpha}$ et $\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}$.

3. Toujours pour $\alpha > 1$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \ell, \text{ avec } \ell < \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Exercice 10-15 Soit $n \geq 1$ un nombre entier et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Montrer que l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

a au moins une solution x dans l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 10-16 On considère deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f soit deux fois dérivable et g continue.

1. Soit $c \in \mathbb{R}$ un maximum local de f . Montrer que $f''(c) \leq 0$.
2. De même, si $c \in \mathbb{R}$ est un minimum local de f , montrer que $f''(c) \geq 0$.
3. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + g(x)f'(x) - f(x) = 0.$$

On suppose de plus qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Exercice 10-101 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a f(x) - x f(a)}{x - a}$, pour un $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 10-102 Montrer que la fonction P de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $P(x) = x^{100} + ax^7 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) a au plus 4 racines réelles.

Exercice 10-103 On définit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(1+x^2) - \arctan x \end{aligned} .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est un polynôme de degré n qui satisfait les identités
 - (a) $P_1(x) = 2x - 1$,
 - (b) $P_{n+1}(x) = (x^2 + 1)P'_n(x) - 2xP_n(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n a n racines distinctes.

Exercice 10-104 Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Montrer que f est dérivable à droite en a et $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$, en supposant que cette limite est finie.

Exercice 10-105 Soient $a < b$ deux réels. Existe-t-il une fonction dérivable f de $]a, b[$ vers \mathbb{R} telle que l'on ait simultanément le comportement asymptotique $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ et la majoration $|f'| \leq 1$?

Exercice 10-106 Soit f de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} une application continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 et que l'on a $f'(0) = f'(1) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un α dans $]0, 1[$ tel que

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} .$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha$. [Indication : étudier la fonction $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$.]

2. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un β dans $]0, 1[$ tel que $|f''(\beta)| \geq 4$. [Indication : raisonner par l'absurde et étudier les fonctions $x \mapsto f(x) - 2x^2$ et $x \mapsto 1 - f(x) - 2(1-x)^2$.]