# Feuille 2 : ensembles-Applications

Exercice 1.

1. Soient $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$.
2. Soient $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Soient $A = ]-\infty, 3]$, $B = ]-2,7]$ et $C = ]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
   Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$

Indication exercice 1
Correction exercice 1

Exercice 2. Soient $A$ et $B$ deux ensembles. Montrer l'équivalence

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

Indication exercice 2
Correction exercice 2

Exercice 3.

Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles.

1. L'implication suivante est-elle vraie.
   $$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C)\ ?$$
   Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).
2. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.

Indication exercice 3
Correction exercice 3

Exercice 4.

Enoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 < 0$.
4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y - x + x^2 > 0$.

Indication exercice 4
Correction exercice 4

Exercice 5.

En utilisant par la contraposée, montrer l'implication suivante pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(\forall \epsilon >, a \leq b + \epsilon) \Rightarrow a \leq b$$

Indication exercice 5
Correction exercice 5

Exercice 6.

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I$ à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :

1. $f$ s'annule.
2. $f$ est l'application nulle.

3. $f$ ne prend jamais deux fois la même valeur.
4. $f$ s'annule au plus une fois.

Indication exercice 6
Correction exercice 6

Exercice 7.

1. Soient les fonctions $f$ et $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tous $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'observe-t-on ?
2. A partir des expressions formelles suivantes, déterminer deux fonctions $u$ et $v$ telles que $h = u \circ v$ en précisant leurs ensembles de départ et d'arrivée :
   a. $h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
   b. $h(x) = \frac{1}{x+7}$.
   c. $h(x) = \sqrt{3x - 1}$.

Indication exercice 7
Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f \circ \ldots \circ f(x)$ où $f$ apparait $n$ fois, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Indication exercice 8
Correction exercice 8

Exercice 9.

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto x^2$
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
   $x \mapsto x^2$
3. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   $n \mapsto n$
4. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto 2x$
5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto x^2$
6. $f: \mathbb{R} \to \{14\}$
   $x \mapsto 14$
7. $f: \{17\} \to \{12,17\}$
   $x \mapsto 17$
8. $f: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto \frac{1}{x}$
9. $f: \{0\} \to \{0\}$
   $x \mapsto x^2$
10. $f: \{1\} \to \left\{\frac{1}{2}\right\}$
    $x \mapsto \frac{1}{x+1}$
11. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
    $x \mapsto n+1$
12. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
    $x \mapsto n+1$
13. $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$
    $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Indication exercice 9
Correction exercice 9

Exercice 10.

Soit $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ par $f(n,m) = mn$
Soit $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n,(n+1)^2)$

1. $f$ est-elle injective ?
2. $f$ est-elle surjective ?
3. $g$ est-elle injective ?
4. $g$ est-elle surjective ?

Indication exercice 10
Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $f: I \to J$ définie par $f(x) = x^2$

1. Donner des ensembles $I$ et $J$ tels que $f$ soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles $I$ et $J$ tels que $f$ soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles $I$ et $J$ tels que $f$ soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles $I$ et $J$ tels que $f$ soit injective et surjective.

Indication exercice 11
Correction exercice 11

Exercice 12.

1. Soient $q_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
   Montrer que :
$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$
2. Soit $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par :
$$f(p,q) = p + \frac{1}{q}$$
   Montrer que $f$ est injective, surjective ?

Indication exercice 12
Correction exercice 12

Exercice 13.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$

Soit $f: D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$

1. Représenter $D$ dans le plan.
2.
   a. Montrer que si deux couples de réels $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ vérifient
   $$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$
   Alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (autrement dit $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$).
   b. Montrer que $f$ est injective, on pourra se ramener au système du 2.a.
3. Est-ce que $f$ est surjective ?

Indication exercice 13
Correction exercice 13

Exercice 14.

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensemble et soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $f$ et $g$ sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si $f$ et $g$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si $f$ et $g$ sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors $f$ est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors $g$ est surjective.
6. Si à présent $f: E \to F$ et $g: F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
   a. $g \circ f = Id_E$
   b. $f \circ g = Id_F$
   c. $f \circ f = Id_E$

Indication exercice 14
Correction exercice 14

Exercice 15.

On considère l'application $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$

1. Existe-t-il $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$ ?
2. Existe-t-il $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ ?

**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**
Correction exercice 15

Exercice 16.

1. Soit $f$ l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :
   $$f(1) = 4, \quad f(2) = 1 \quad, f(3) = 2, \quad f(4) = 2.$$
   a. Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = \{1,3\}$, $A = \{3,4\}$ et $A = \emptyset$.
   b. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{2\}$, $B = \{1,2\}$ et $B = \{3\}$.
2. Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{1\}$, $B = [1,2]$, $B = [0,1]$

Indication exercice 16
Correction exercice 16

Exercice 17.

Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$.
2. $\sin^{-1}(\{2\})$.
3. $\exp(]-\infty, 2])$.
4. $\exp^{-1}([-1, e])$.
5. $\ln(\mathbb{R}^{+*})$.
6. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.
7. $f^{-1}([0,1])$ pour $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Indication exercice 17
Correction exercice 17

Exercice 18.

Soit $f$ une application de $E$ vers $E$ telle que : $f\big(f(E)\big) = E$. Montrer que $f$ est surjective.

Indication exercice 18
Correction exercice 18

Exercice 19.

Soit $f: X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a. $f$ est injective.
b. Pour tout $A_1, A_2$ parties de $X$, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Indication exercice 19
Correction exercice 19

Exercice 20. Montrer que chacune des applications suivantes est bijective en explicitant sa réciproque.

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 1$.
2. $g: ]e, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$.
3. $a: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $a(s, t) = (2s, 3t)$.
4. $b: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $b(s, t) = (s + t, s - t)$.
5. $F: [1,10[ \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $F(t, n) = t.10^n$.

Indication exercice 20
Correction exercice 20

Exercice 21.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection. On suppose que $f$ est strictement croissante. Montrer que sa bijection réciproque $f^{-1}$ est strictement croissante.

Indication exercice 21
Correction exercice 21

Exercice 22.

Soit $E, F$ et $G$ trois ensemble et soit $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications. On suppose $g$ et $g \circ f$ bijectives. En utilisant la bijection réciproque $g^{-1}$, montrer que $f$ est bijective.

Indication exercice 22
Correction exercice 22

Exercice 101.

Soit $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $f(2k) = k$ et $f(2k+1) = -k-1$

1. Soit $m$ un entier positif. Déterminer tous les antécédents de $m$.
2. Soit $m$ un entier strictement négatif. Déterminer tous les antécédents de $m$.
3. L'application $f$ est-elle une bijection ?

Indication exercice 101
Correction exercice 101

Exercice 102.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$, deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \to J$ une fonction strictement croissante.

1. Montrer que $f$ est injective.

On pourra montrer la contraposée (et on rappelle que $x_1 \neq x_2$ équivaut à $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$)

2. Déterminer l'ensemble $K$ tel que $f: I \to K$ soit bijective.

Indication exercice 102
Correction exercice 102

Exercice 103.

Soit $f: E \to F$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i. $\exists G \subset F$ telle que $f$ est une bijection de $E$ dans $G$.
ii. $f$ est injective.

Indication exercice 103
Correction exercice 103

Exercice 104.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Combien $y$ possède-t-il d'antécédents ? (On discutera selon les valeurs de $y$)
2. $f$ est-elle injective ? Surjective ?
3. Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
4.
   a. Soit $y$ un réel ayant exactement deux antécédents $x_1$ et $x_2$ par $f$. Déterminer la valeur du produit $x_1 x_2$, puis montrer qu'un et un seul des réels $x_1$ et $x_2$ appartient à l'intervalle $[-1,1]$.
   b. En déduire que la restriction $g: [-1,1] \to [-1,1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Correction exercice 104
Indication exercice 104

Exercice 105.

Soient $E$ et $F$ deux ensembles, et $f$ une application de $E$ dans $F$. Soient également $A_1$ et $A_2$ deux partie de $E$, et $B_1$ et $B_2$ deux partie de $F$

1. Montrer que $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Indication exercice 105
Correction exercice 105

Exercice 106.

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et soit $f$ une application de $E$ dans $F$ .

4. Montrer que pour toute partie $A$ de $E$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
5. Montrer que pour toute partie $B$ de $F$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
6. Montrer que $f$ est injective si et seulement si pour toute partie $A$ de $E$ on a $A = f^{-1}(f(A))$.
7. Montrer que $f$ est surjective si et seulement si pour toute partie $B$ de $F$ on a $f(f^{-1}(B)) = B$.

Indication exercice 106
Correction exercice 106

Exercice 107.

Soit $E$ un ensemble et $f: E \to E$ une application. On suppose que $f \circ f \circ f = Id_E$. Montrer que $f$ est bijective.

Indication exercice 107
Correction exercice 107

Correction exercice 1

Exercice 1

1. $A \cap B = \{1,2,3\}$ ;  $A \cup B = \{0,1,2,3\}$
   Remarque :
   Comme $A \subset B$ on a $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$
2. $A \cap B = [2,3]$ ;  $A \cup B = [1,4]$
3. $A \cap B = ]-2,3]; A \cup B = ]-\infty, 7]; B \cap C = ]-2,7]; B \cup C = ]-5, +\infty[$

Correction exercice 2

Exercice 2

Supposons que $A \subset B$ montrons que $A \cup B = B$
Soit $x \in A \cup B$ alors $x \in A \subset B$ ou $x \in B$ donc $x \in B$, cela montre que $A \cup B \subset B$
Soit $x \in B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$ donc $x \in A \cup B$, cela montre que $B \subset A \cup B$
On a bien $A \cup B = B$
Supposons $A \cup B = B$
Soit $x \in A$ alors $x \in A$ ou $x \in B$ donc $x \in A \cup B = B$, cela montre que $A \subset B$
L'équivalence est montrée.

Correction exercice 3

Exercice 3

1. La contraposée de cette implication est :
$$(A \subset C \quad \text{et} \quad B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C$$
   Cette implication est vraie.
2. Prenons $x \in B$.
   Alors $x \in A \cup B$, alors $x \in A \cup C$ d'après l'hypothèse.
   Si $x \in C$ c'est fini. Si $x \in A \setminus C$ alors $x \in A \cap B$ (puisque l'on a pris $x \in B$), d'après l'hypothèse $x \in A \cap C$ ce qui entraine que $x \in C$.
   On a bien montré que $B \subset C$.

Correction exercice 4

Exercice 4

1. La négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, (x \neq |x| \text{ et } x \neq -|x|)$, c'est l'énoncé qui est vrai.
2. La négation est : $(\exists x \in \mathbb{R}, x \neq |x|)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x \neq -|x|)$ c'est la négation qui est vraie.
3. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 \geq 0$. C'est la négation qui est vraie ($y = x - x^2 + 1$ par exemple).

4. La négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 \leq 0$. C'est l'énoncé qui est vrai, ($y = 1$ par exemple car pour tout $x$ réel $x^2 - x + 1 > 0$).

Correction exercice 5

Exercice 5

La contraposée de $(P) \Rightarrow (Q)$ est $\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q)$, donc ici

$$a > b \Rightarrow (\exists \epsilon > 0, a > b + \epsilon)$$

Il suffit de prendre $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ (c'est-à-dire la moitié de la différence entre $a$ et $b$) car $b + \epsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{2b+a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a$.

Correction exercice 6

Exercice 6

1. $\exists x \in I, f(x) = 0$.
2. $\forall x \in I, f(x) = 0$.
3. $\forall x \in I, \forall x' \in I, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.
4. $(\forall x \in I, f(x) \neq 0)$ ou $\big((\exists x \in I, f(x) = 0)$ et $(\forall y \in I, f(y) = 0 \Rightarrow y = x)\big)$.

Correction exercice 7

Exercice 7

1. $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = 3g(x) + 1 = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2$$

Autre méthode

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2$$

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = \big(f(x)\big)^2 - 1 = (3x + 1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x + 1 - 1 = 9x^2 + 6x$$

Autre méthode

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(3x + 1) = (3x + 1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x + 1 - 1 = 9x^2 + 6x$$

On observe que $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$

2.

a. Soit $u$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $u(x) = \sin(x)$ et $v$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $v(x) = x + \frac{\pi}{2}$. Alors $h(x) = u\big(v(x)\big)$.

b. Soit $u$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $v(x) = x + 7$. Alors $h(x) = u\big(v(x)\big)$.

c. Soit $u$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $u(x) = \sqrt{x}$ et $v$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $v(x) = 3x - 1$. Alors $h(x) = u\big(v(x)\big)$.

Correction exercice 8

Exercice 8

Pour $n = 1$, $f(x) = 2x + 1$.

Pour chercher

$$f^2(x) = f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 2^2x + 2 + 1$$

$$f^3(x) = f\big(f^2(x)\big) = 2(2^2x + 2 + 1) + 1 = 2^3x + 2^2 + 2 + 1$$

Supposons que pour $n \geq 1$

$$f^n(x) = 2^n x + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1$$

L'hypothèse est évidement vraie pour $n = 1$.

Hérédité

$$f^{n+1}(x) = f\big(f^n(x)\big) = 2(2^n x + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1) + 1 = 2^{n+1}x + 2^n + \cdots + 2 + 1$$

Ce qui montre que pour tout $n > 1$ on a :

$$f^n(x) = 2^n x + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1$$

Et on peut arranger cette expression, en considérant que : $1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2

$$f^n(x) = 2^n x + \frac{1 - 2^{n-1+1}}{1 - 2} = 2^n x + \frac{1 - 2^n}{-1} = 2^n x + 2^n - 1$$

Correction exercice 9

Exercice 9

1. $f(-1) = f(1)$ et $-1 \neq 1$ donc $f$ n'est pas injective. $-2$ n'admet pas d'antécédent donc $f$ n'est pas surjective.
2. $f(-1) = f(1)$ et $-1 \neq 1$ donc $f$ n'est pas injective. Pour tout $y \geq 0$ il existe un antécédent $x = \sqrt{y}$ tel que $y = f(x)$ (remarque ce n'est pas le seul $-\sqrt{y}$ marche aussi). $f$ n'est pas bijective.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $p = n$ tel que $n = f(p)$, donc $f$ est bijective (par conséquent injective et surjective).
4. Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ donc $f$ est injective. Par contre $y = -2$ n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{R}^+$ en effet $-2 = 2x$ n'a pas de solution positive, donc $f$ n'est pas surjective et pas bijective.
5. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x = \frac{y-3}{8} \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$, en effet $8\frac{y-3}{8} + 3 = (y-3) + 3 = y$ donc $f$ est bijective et par conséquent injective et surjective.
6. $f(1) = f(2)$ et $1 \neq 2$ donc $f$ n'est pas injective. Pour tout $y \in \{14\}$, donc $y = 14$, il n'y a pas de choix dans cet exemple, il existe $x = 1$ ou n'importe quelle valeur tel que $f(x) = 14$ donc $f$ est surjective, et bien sûr pas bijective.
7. Pour tout $x_1, x_2 \in \{17\}$, comme il n'y a qu'un élément dans cet ensemble $x_1 = x_2$, $f$ est injective. Par contre 12 n'admet pas d'antécédent, par conséquent $f$ n'est pas surjective, et donc pas bijective.
8. Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$, $f$ est injective. Par contre $y = -2$ n'admet pas d'antécédent, en effet il n'existe pas de réel dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que : $-2 = f(x) = \frac{1}{x}$, donc $f$ n'est pas surjective et donc pas bijective.
9. Il n'y a qu'un élément dans l'ensemble de départ, du coup $f$ est injective et comme le 0 de l'ensemble d'arrivée admet 0 (de l'ensemble de départ) comme antécédent donc $f$ est surjective et donc bijective.
10. Encore une fois il n'y a qu'un élément dans l'ensemble de départ, donc $f$ est injective, et comme $f(1) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ admet 1 comme antécédent, du coup $f$ est bijective. On aurait pu aussi dire que $\frac{1}{2}$ admettait un unique antécédent 1 donc que $f$ est bijective.
11. Pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$ par conséquent $f$ est injective, par contre $0 \in \mathbb{N}$ (l'ensemble d'arrivée) n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$ (l'ensemble de départ).
12. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ (l'ensemble d'arrivée) il existe un unique $n = p - 1 \in \mathbb{Z}$ (l'ensemble de départ) tel que $f(n) = f(p-1) = (p-1) + 1 = p$.
13. Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 - 1) = (x_2 + 1)(x_1 - 1) \Rightarrow x_1 x_2 - x_1 + x_2 - 1$$
$$= x_2 x_1 - x_2 + x_1 - 1 \Rightarrow -x_1 + x_2 = -x_2 + x_1 \Rightarrow 2x_2 = 2x_1 \Rightarrow x_2 = x_1$$

$f$ est donc injective. Par contre 1 n'admet pas d'antécédent, en effet, supposons que $x$ soit un antécédent de 1 alors

$$1 = \frac{x + 1}{x - 1} \Leftrightarrow x - 1 = x + 1 \Leftrightarrow -1 = 1$$

Ce qui est impossible.

Correction exercice 10

Exercice 10

1. $$f(1,2) = 1 \times 2 = 2 \times 1 = f(2,1) \quad \text{et} \quad (1,2) \neq (2,1)$$
   Donc $f$ n'est pas injective.
2. $f(1,p) = 1 \times p = p$
   Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(n,m) = (1,p)$ tel que $p = f(n,m)$
   $f$ est surjective.
3. $$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow (n_1, (n_1+1)^2) = (n_2, (n_2+1)^2) \Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 \\ (n_1+1)^2 = (n_2+1)^2 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2$$
   Donc $g$ est injective.
4. On va montrer que $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent. Supposons que
   $$(1,1) = (n, (n+1)^2)$$
   Alors
   $$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = (n+1)^2 \end{cases}$$
   Ce qui équivaut à
   $$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = 2^2 \end{cases}$$
   Ce qui est impossible donc $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent, $g$ n'est pas surjective.

Correction exercice 11

Exercice 11

1. $I = [0,1]$ et $J = [-1,1]$.
2. $I = [-1,1]$ et $J = [0,1]$.
3. $I = [-1,1]$ et $J = [-1,1]$.
4. $I = [0,1]$ et $J = [0,1]$.

Correction exercice 12

Exercice 12

1. $$q_1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$
   $$q_2 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{q_2} < 0 \quad (2)$$
   En additionnant $(1)$ et $(2)$
   $$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$
2. Pour tout $(p_1, q_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(p_2, q_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
   $$f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2) \Rightarrow p_1 + \frac{1}{q_1} = p_2 + \frac{1}{q_2} \Rightarrow \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = p_2 - p_1$$
   D'après la première question cela montre que $p_2 - p_1 \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ or $p_2 - p_1 \in \mathbb{Z}$ donc $p_2 - p_1 = 0$, autrement dit $p_1 = p_2$, puis en reportant dans
   $$p_1 + \frac{1}{q_1} = p_2 + \frac{1}{q_2}$$
   Cela montre que $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_2}$ et que $q_1 = q_2$
   Finalement
   $$(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$$

Ce qui montre que $f$ est injective.

Regardons si $1 \in \mathbb{Q}$ admet un antécédent, on suppose qu'il existe, on l'appelle $(p,q)$

$$p + \frac{1}{q} = 1$$

Ce qui équivaut à

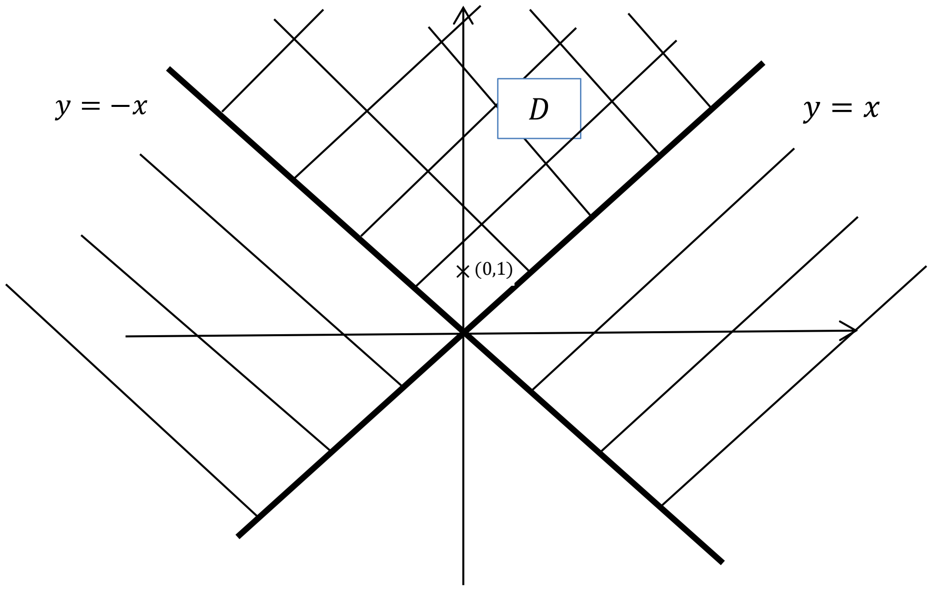
$$\frac{1}{q} = 1 - p$$

Mais $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$ et $1 - p \in \mathbb{Z}$, ce qui est impossible. Par conséquent $f$ n'est pas surjective.

Correction exercice 13

Exercice 13

1. Le point $(0,1)$ vérifie $x \leq y$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$ est le demi-plan supérieur droit. De même $(0,1)$ vérifie $-y \leq x$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x\}$ est le demi-plan supérieur droit, $D$ est l'intersection de ces deux demi-plan, $D$ est le quart de plan supérieur du schéma ci-dessous.




2. a.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

En additionnant $L_1$ et $L_2$ on trouve que $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$, puis en remplaçant dans $L_1$, on trouve que $y_1 = y_2$.

b.

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1^2 + y_1^2, 2x_1y_1) = (x_2^2 + y_2^2, 2x_2y_2) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 \end{cases}$$

$L_1 - L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$, comme $x - y \leq 0$ sur $D$, cela donne $-(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$ ou encore $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$.

$L_1 + L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$, comme $x + y \geq 0$ sur $D$, cela donne $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.

D'après 2.a. cela donne que $x_1 = x_2$ et que $y_1 = y_2$, ce qui montre que $f$ est injective.

3. $(-1, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent dans $D$ car $x^2 + y^2 > 0$.

Correction exercice 14

Exercice 14

1. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

   Car $g$ est injective

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car $f$ est injective.
Donc $g \circ f$ est injective.

2. Première méthode :
Pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car $g$ est surjective.
Comme pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car $f$ est surjective. On en déduit que pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ autrement dit $g \circ f$ est surjective.
Remarque :
(a) D'habitude on appelle $y$ un élément de l'image $G$ mais ici ce pose un petit problème de notation parce que l'on va appeler $x$ l'élément de $F$ et on ne saura pas trop comment appeler l'élément de $E$, c'est pour cela qu'il est plus malin de l'appeler $z$.
(b) Si on commence par écrire « pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car $f$ est surjective » puis « pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car $g$ est surjective » donc « pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ » cela ne va pas, je vous laisse réfléchir pourquoi.
Deuxième méthode :
On rappelle que $\varphi : U \to V$ est surjective si et seulement si $\varphi(U) = V$
Donc $f(E) = F$ et $g(F) = G$, par conséquent $g \circ f(E) = g\big(f(E)\big) = g(F) = G$ et on en déduit que $g \circ f$ est surjective.
3. Si $g$ et $f$ sont bijectives alors elles sont injectives et $g \circ f$ est injective et si $g$ et $f$ sont bijectives alors elles sont surjectives et $g \circ f$ est surjective, on en déduit que $g \circ f$ est bijective.
4. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Car $g \circ f$ est injective, par conséquent $f$ est injective.
5. Première méthode :
Pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, donc il existe $y = f(x)$ tel que $z = g(y)$ ce qui signifie que $g$ est surjective.
Deuxième méthode :
Comme $g \circ f$ est surjective, $g \circ f(E) = G \Leftrightarrow g\big(f(E)\big) = G$ or $f(E) \subset F$ donc
$$g\big(f(E)\big) \subset g(F)$$
Comme $g(F) \subset G$, cela donne
$$G = g\big(f(E)\big) \subset g(F) \subset G$$
D'où
$$g\big(f(E)\big) = g(F) = G \Rightarrow g(F) = G$$
Ce qui montre que $g$ est surjective.
6.
   a. $g \circ f = Id_E$ est bijective (l'identité est bijective)
   $g \circ f$ est injective, d'après 4°), $f$ est injective.
   $g \circ f$ est surjective, d'après 5°), $g$ est surjective.
   Remarque :
   $g \circ f = Id_E$ n'entraine pas que $g = f^{-1}$ et que donc $f$ et $g$ sont bijectives.
   b. $f \circ g = Id_F$ est bijective (l'identité est bijective)
   $f \circ g$ est injective, d'après 4°), $g$ est injective.
   $f \circ g$ est surjective, d'après 5°), $f$ est surjective.
   c. $f \circ f = Id_E$ est bijective
   $f \circ f$ est injective, d'après 4°), $f$ est injective.
   $f \circ f$ est surjective, d'après 5°), $f$ est surjective.
   Par conséquent $f$ est bijective et $f^{-1} = f$.

Correction exercice 15

Exercice 15

1. Supposons que $g$ existe, $f\circ g=Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, f\big(g(n)\big)=n \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \big(g(n)\big)^2=n$

   Si $n$ n'est pas un carré cela ne marche pas, par exemple si $n=2$, $\big(g(2)\big)^2=2$ donc $g(2)=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$

   Il n'existe pas de fonction $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que :$f\circ g=Id_{\mathbb{N}}$.
2. Supposons que $h$ existe, $h\circ f=Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, h\big(f(n)\big)=n \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, h(n^2)=n$

   Les valeurs $h(p)$ prennent les valeurs qu'elles veulent sauf lorsque $p$ est un carré auquel cas $h(p)=\sqrt{p}$, donnons une fonction $h$ qui répond à la question :

   Si $p\neq n^2$ alors $h(p)=0$ et si $p=n^2$ alors $h(p)=\sqrt{p}=n$.

Correction exercice 16

Exercice 16

1.
   a. $f(\{1\})=\{4\}$, on notera plus facilement que $f(1)=4$.
   $$f(\{1,3\})=\{2,4\}=\{4,2\}$$
   $$f(\{3,4\})=\{2,2\}=\{2\}$$
   $$f(\emptyset)=\emptyset$$
   b. $f^{-1}(\{2\})=\{3,4\}; f^{-1}(\{1,2\})=\{2,3,4\}\,; f^{-1}(\{3\})=\emptyset$
2.
$$f^{-1}(\{1\})=\{-1,1\}$$
$$f^{-1}([1,2])=\big[-\sqrt{2},-1\big]\cup\big[1,\sqrt{2}\big]$$
$$f^{-1}[0,1]=[-1,1]$$

Correction exercice 17

Exercice 17

2. $\tan(\{0\})=\{\tan(0)\}=\{0\}$.
3. $\sin^{-1}(\{2\})=\emptyset$ car il n'existe pas de réel $x$ tel que $2=\sin(x)$.
4. $\exp(]-\infty,2])=\left]\lim_{x\to-\infty}\exp(x),\exp(2)\right]=]0,e^2]$ car $\exp$ est strictement croissante.
5. $\exp^{-1}([-1,e])=\exp^{-1}(]0,e])=]-\infty,1]$. Car $\exp$ est toujours strictement positive et strictement croissante.
6. $\ln(\mathbb{R}^{+*})=\left]\lim_{x\to0^+}\ln(x),\lim_{x\to+\infty}\ln(x)\right[=\mathbb{R}$. Car $\ln$ est strictement croissante.
7. $\ln^{-1}([3,+\infty[)=[e^3,+\infty[$ car $\ln$ est strictement croissante.
8. $f^{-1}([0,1])=[-1,1]$. Attention $f$ est ni croissante ni décroissante.
9. $f^{-1}([0,1])=[-1,1]\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]=\left[-\frac{1}{2},1\right]$.
10. $f^{-1}([0,1])=[0,1]$.
11. $\left(\cos_{|[0,\pi]}\right)^{-1}([0,1])=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
12. $\left(\cos_{|[3\pi,7\pi]}\right)^{-1}([0,1])=\left[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{2},\frac{13\pi}{2}\right]$.
13. $\cos^{-1}([0,1])=\cup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$.

Correction exercice 18

Exercice 18

$f(E)\subset E$ donc $f\big(f(E)\big)\subset f(E)\subset E$, or $f\big(f(E)\big)=E$ donc $E\subset f(E)\subset E$, par conséquent $E=f(E)$ ce qui signifie que $f$ est surjective.

Correction exercice 19

Exercice 19

Montrons que a. entraine b.
On suppose donc que $f$ est injective et il faut en déduire que $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, c'est-à-dire que il faut montrer que :

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \quad \text{et} \quad f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$$

Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$, il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$, comme $x \in A_1$ alors $y \in f(A_1)$ et $x \in A_2$ alors $y \in f(A_2)$ ce qui montre que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
Remarque cette inclusion est toujours vraie puisque l'on n'a pas utiliser le fait que $f$ est injective.
Soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, $y \in f(A_1)$ et $y \in f(A_2)$, il existe donc $x_1 \in A_1$ tel que $y = f(x_1)$ et $x_2 \in A_2$ tel que $y = f(x_2)$, on a donc $f(x_1) = f(x_2)$ comme $f$ est injective on a $x_1 = x_2$, on note $x = x_1 = x_2$, cet élément est à la fois dans $A_1$ et dans $A_2$ donc $x \in A_1 \cap A_2$, par conséquent $y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$, ce qui montre que : $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$.
On va montrer la réciproque c'est-à-dire que b. entraine a.
On suppose que $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ (on pourrait se contenter d'utiliser que $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ car l'autre inclusion est toujours vraie) entraine que $f$ est injective, pour cela on va utiliser la contraposée de

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

C'est-à-dire que

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

On pose $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$, on a $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ car $x_1 \neq x_2$. D'après l'hypothèse

$$f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

Et d'autre part $f(A_1) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}$ et $f(A_2) = f(\{x_2\}) = \{f(x_2)\}$, par conséquent

$$\{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \emptyset$$

Ce qui montre bien que $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Et voilà, ce n'est pas tout simple.

Correction exercice 20

Exercice 20

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y = 3x + 1 \Leftrightarrow y - 1 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{3}$

   Donc $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}$ où ce qui revient au même $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$.
2. Pour tout $x \in ]e, +\infty[$ .On remarque que pour $x > e$, $\ln(x) > 1$ et que $\ln(ln(x)) > 0$

   $$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in ]e, +\infty[, y = \ln(ln(ln(x))) \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in ]e, +\infty[, \exp(y) = \ln(ln(x)) \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in ]e, +\infty[, \exp(exp(y)) = \ln(x) \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in ]e, +\infty[, \exp(exp(exp(y))) = x$$

   Donc $g^{-1}(y) = \exp(exp(exp(y)))$ où ce qui revient au même $g^{-1}(x) = \exp(exp(exp(x)))$.
3. Pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

   $$(x, y) = a(s, t) \Leftrightarrow (x, y) = (2s, 3t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2s \\ y = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{x}{2} \\ t = \dfrac{y}{3} \end{cases}$$

   Donc $a^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{3}\right)$.
4. Pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

   $$(x, y) = b(s, t) \Leftrightarrow (x, y) = (s + t, s - t) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x = s + t \\ y = s - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x = s + t \\ x + y = 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x - s \\ s = \dfrac{1}{2}(x + y) \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x - \dfrac{1}{2}(x + y) \\ s = \dfrac{1}{2}(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2}(x - y) \\ s = \dfrac{1}{2}(x + y) \end{cases}$$

   Donc

   $$b^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x - y)\right)$$

5. Pour tout $(t,n) \in [1,10[ \times \mathbb{Z}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$

$$y = F(t,n) \Leftrightarrow y = t.10^n$$

On pose $n = E\left(\frac{\ln(y)}{\ln(10)}\right)$ et $t = \frac{y}{10^n}$, donc

$$n \leq \frac{\ln(y)}{\ln(10)} < n+1 \Leftrightarrow n\ln(10) \leq \ln(y) < (n+1)\ln(10) \Leftrightarrow \ln(10^n) \leq \ln(y) < \ln(10^{n+1}) \Leftrightarrow 10^n \leq y < 10^{n+1} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{y}{10^n} < 10 \Leftrightarrow 1 \leq t < 10$$

Cela montre que

$$y = t.10^n$$

Il reste à montrer l'unicité de $t$ et $n$. Supposons qu'il existe $(n_1, t_1)$ et $(n_2, t_2)$ tels que

$$y = t_1 10^{n_1} = t_2 10^{n_2}$$

Alors si $n_1 = n_2$ on a $t_1 = t_2$, et si $n_2 > n_1$

$$\frac{t_1}{t_2} = 10^{n_2 - n_1}$$

Comme $n_2 - n_1 \geq 1$ on a $10^{n_2-n_1} \geq 10$

Et

$$\begin{cases} 1 \leq t_1 < 10 \\ 1 \leq t_2 < 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq t_1 < 10 \\ \frac{1}{10} < \frac{1}{t_2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{10} < \frac{t_1}{t_2} < 10$$

Ce qui est impossible.

Donc $F^{-1}(y) = \left(\frac{y}{10^{E\left(\frac{\ln(y)}{\ln(10)}\right)}}, E\left(\frac{\ln(y)}{\ln(10)}\right)\right) = \left(y10^{-E\left(\frac{\ln(y)}{\ln(10)}\right)}, E\left(\frac{\ln(y)}{\ln(10)}\right)\right)$

Correction exercice 21

Exercice 21

Supposons que $f^{-1}$ ne soit pas strictement croissante, c'est-à-dire qu'il existe $y_1$ et $y_2$ tels que :

$$y_1 < y_2 \quad \text{et} \quad f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \quad (*)$$

Comme $f$ est une bijection il existe un unique $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et un unique $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $y_2 = f(x_2)$, donc $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$

$$(*) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \text{et} \quad x_1 \geq x_2$$

Si $x_1 = x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$ donc $(*)$ est faux

Si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$ car $f$ est strictement croissante donc $(*)$ est faux aussi, par conséquent $f^{-1}$ est strictement croissante.

Correction exercice 22

Exercice 22

Soit $y \in F$, on pose $z = g(y)$, comme $g \circ f : E \to G$ est une bijection, il existe un unique $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, on a donc $g(y) = g\big(f(x)\big)$, en composant par $g^{-1}$, on obtient $y = f(x)$.

Bilan, pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$ ce qui montre que $f$ est bijective.

Correction exercice 101

Exercice 101

2. $m \geq 0$, pour tout $k \geq 0$, $-k-1 < 0$ donc $m \neq -k-1$, par contre $m = k$ est possible et puisque $k = f(2k)$ on a $m = k = f(2k)$, le seul antécédent de $m$ est donc $2m$.
3. $m < 0$, pour tout $k \geq 0$, $k \geq 0$ (évidement !) donc $m \neq k$, par contre, comme $-k-1 \leq -1 < 0$ donc $m = -k-1$ est possible, alors on a $m = -k-1 = f(2k+1)$, comme $k = -m-1$ le seul antécédent de $m$ est $2(-m-1)+1 = -2m-1$.
4. Que $m$ soit positif ou strictement négatif, $m$ admet un unique antécédent, donc $f$ est une bijection.

Correction exercice 102

Exercice 102

1. Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$
   Si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$
   Donc $f$ est injective.
2. $K = f(I)$.

Correction exercice 103

Exercice 103

Soit $f: E \to F$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i. $\exists G \subset F$ telle que $f$ est une bijection de $E$ dans $G$.

ii. $f$ est injective.

Correction exercice 104

Exercice 104

1. Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche le (ou les $x$) tels que :
$$y = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow y(1+x^2) = 2x \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$$
   Si $y = 0$ il y a un unique antécédent $x = 0$.
   Si $y \neq 0$
   Le discriminant de cette équation du second degré est : $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2)$
   Si $y \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ alors $1 - y^2 < 0$ et donc aucun $x$ n'est solution, $y$ n'a pas d'antécédent.
   Si $y = -1$ alors l'équation est $-x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow -(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, le seul antécédent de $y = -1$ est $x = -1$.
   Si $y = 1$ alors l'équation est $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Le seul antécédent de $y = 1$ est $x = 1$.
   Si $y \in ]-1,1[$ alors $1 - y^2 > 0$ alors l'équation admet deux racines distinctes donc $y$ admet deux antécédents distincts.
2. Parfois $y$ admet 2 antécédents, parfois un unique antécédent, parfois aucun donc $f$ est ni injective ni surjective.
3. Première méthode
$$|y| - 1 = \frac{2|x|}{1+|x|^2} - 1 = \frac{2|x| - (1 + |x|^2)}{1+|x|^2} = -\frac{|x|^2 - 2|x| + 1}{1+|x|^2} = -\frac{(|x|+1)^2}{1+|x|^2} \leq 0$$
   Donc $f(\mathbb{R}) \subset [-1,1]$ car $|y| \leq 1$
   Si $y = \pm 1$ ou $y = 0$, $y$ admet un unique antécédent, respectivement $x = \pm 1$ et $x = 0$
   Donc $\{-1,0,1\} \in f(\mathbb{R})$
   Si $y \in ]-1,1[$, $y$ admet un antécédent, donc $]-1,1[ \subset f(\mathbb{R})$
   Conclusion $[-1,1] \subset f(\mathbb{R})$ par conséquent $[-1,1] = f(\mathbb{R})$
   Deuxième méthode
   Le tableau de variation de $f$ est
$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;\ \ f(-1) = -1; f(1) = 1;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

   On en déduit que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$
   Remarque : on retrouve les résultats de la question 1.

Troisième méthode : on pose $x=\tan(t)$, lors que $x$ décrit $\mathbb{R}$, $t$ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

$$f(x)=\frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)}=2\frac{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}{1+\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}=2\frac{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}{\frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}=2\sin(t)\cos(t)=\sin(2t)$$

Et $2t\in]-\pi,\pi[$ donc $\sin(2t)\in[-1,1]$.

4.

a. On rappelle que si $x_1$ et $x_2$ sont deux racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$ alors $x_1x_2=\frac{c}{a}$ et $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, ici l'équation est : $yx^2-2x+y=0$ donc $x_1x_2=\frac{y}{y}=1$. Les deux antécédents sont donc de même signe, s'ils sont strictement positifs tous les deux, comme leur produit vaut 1, s'il y en a un supérieur ou égal à 1, l'autre est dans $]0,1]$, s'ils sont strictement négatifs et s'il y en a un inférieur ou égal à $-1$ l'autre est dans $[-1,0[$.
Et enfin, l'antécédent de 0 est 0, donc il y a un et un seul des antécédents qui est dans l'intervalle $[-1,1]$. Résultat que l'on retrouve sur le tableau de variation.

b. Pour tout $y\in[-1,1]$, $y$ admet un unique antécédent dans $[-1,1]$, $g$ est une bijection.

Correction exercice 105

## Exercice 105

1. Soit $x\in f^{-1}(B_1)$, alors $f(x)\in B_1$, donc $f(x)\in B_2$ par conséquent $x\in f^{-1}(B_2)$, ce qui montre que :
$$B_1\subset B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$$
On prend $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$, $B_1=[-1,4]$ donc $f^{-1}(B_1)=[-2,2]$ et $B_2=[0,9]$ donc $f^{-1}(B_2)=[-3,3]$ ;
On a $f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$ et pourtant $B_1\not\subset B_2$.
2. Soit $y\in f(A_1\cap A_2)$, il existe $x\in A_1\cap A_2$ tel que $y=f(x)$, comme $x\in A_1$ alors $y\in f(A_1)$ et $x\in A_2$ alors $y\in f(A_2)$ ce qui montre que $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$.
On a vu à l'exercice 19 qu'il y avait égalité si et seulement si $f$ est injective. Il faut donc prendre un exemple de fonction non injective, par exemple $f:[-2,2]\to[0,4]$
$$A_1=[-1,2]\Rightarrow f(A_1)=[0,4];A_2=[-2,1]\Rightarrow f(A_2)=[0,4]$$
Donc $f(A_1)\cap f(A_2)=[0,4]$
Et d'autre part $A_1\cap A_2=[-1,1]$ donc $f(A_1\cap A_2)=[0,1]$, ce qui montre que l'inclusion est stricte.
3. Ici l'exemple est simple on va pouvoir raisonner par équivalence
$$y\in f(A_1\cup A_2)\Leftrightarrow \exists x\in A_1\cup A_2, y=f(x)\Leftrightarrow \exists x\in A_1 \text{ ou } x\in A_2, y=f(x)\Leftrightarrow y\in f(A_1) \text{ ou } y\in f(A_2)\Leftrightarrow y\in f(A_1)\cup f(A_2)$$
Ce qui montre que $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$

Correction exercice 106

## Exercice 106

1. Pour tout $x\in A$, $f(x)\in f(A)$ et donc $x\in f^{-1}\big(f(A)\big)$, ce qui montre que $A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$
2. Pour tout $y\in f\big(f^{-1}(B)\big)$, il existe $x\in f^{-1}(B)$ tel que $y=f(x)$, comme $x\in f^{-1}(B)$ $f(x)\in B$ ce qui entraine que $y\in B$, ce qui montre que $f\big(f^{-1}(B)\big)\subset B$.
3. Comme « pour toute partie $A$ de $E$, on a $A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ » la question revient à montrer que :
« $f$ est injective si et seulement si pour toute partie $A$ de $E$ on a $A\supset f^{-1}\big(f(A)\big)$ »
Si $f$ est injective.
Pour tout $x\in f^{-1}\big(f(A)\big)$, $f(x)\in f(A)$ ce qui signifie qu'il existe $x'\in A$ (attention, à priori ce n'est pas le même $x$ que celui du début de la phrase) tel que $f(x)=f(x')$ comme $f$ est injective $x=x'$, par conséquent $x\in A$.
On a montré que $f^{-1}\big(f(A)\big)\subset A$.

Si pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$

$$f(x_1) = f(x_2) = y$$

On prend $A = \{x_1\}$

$$f(A) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{y\} \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$$

D'après l'hypothèse $f^{-1}(f(A)) \subset A$ donc $\{f^{-1}(y)\} \subset \{x_1\}$

Or $x_2 \in f^{-1}(y)$ car $f(x_2) = y$ donc $x_2 \in \{x_1\}$ par conséquent $x_1 = x_2$ ce qui signifie que $f$ est injective.

Finalement on a montré l'équivalence demandée.

4. Comme « pour toute partie $B$ de $F$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$ » la question revient à montrer que :
   « $f$ est surjective si et seulement si pour toute partie $B$ de $F$ on a $f(f^{-1}(B)) \supset B$ »
   Si $f$ est surjective.
   Pour tout $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car $f$ est surjective.
   $x \in f^{-1}(B)$ entraine que $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, cela montre que $B \subset f(f^{-1}(B))$.
   Si pour tout $B \subset f(f^{-1}(B))$
   On pose $B = \{y\}$, alors $\{y\} \subset f(f^{-1}(\{y\}))$ ce qui s'écrit aussi $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$, il existe donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$, cela montre bien que $f$ est surjective.
   Finalement on a montré l'équivalence demandée.

Correction exercice 107

Exercice 107

On pose $g = f \circ f$, $g \circ f = f \circ f \circ f = Id_E = f \circ g$. Ce qui montre que $f$ est bijective et que $f^{-1} = f \circ f$.

Indication exercice 1.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Remarque : Comme $A \subset B$ on a $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

Exercice 1

Correction exercice 1

Indication exercice 2.

Il faut montrer que : $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ et $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$

Exercice 2

Correction exercice 2

Indication exercice 3.

1. $\not\subseteq$ signifie « n'est pas strictement inclus » sa négation est « est inclus »
   Une fois que l'on a écrit la contraposée, c'est évident.
2. On prend un élément $x$ de $B$, et il faut montrer qu'il est dans $C$.

Exercice 3

Correction exercice 3

Indication exercice 4.

La négation de « $A$ et $B$ » est « $\bar{A}$ ou $\bar{B}$ », la négation de « $A$ ou $B$ » est « $\bar{A}$ et $\bar{B}$ », la négation de « $\forall$ » est « $\exists$ » la négation de « $\exists$ » est « $\forall$ », ensuite voir le cours.

Exercice 4

Correction exercice 4

Indication exercice 5.
La contraposée de $(P) \Rightarrow (Q)$ est non$(P) \Rightarrow$ non$(Q)$,
Après avoir écrit la contraposée, il faut trouver un « $\epsilon$ » entre $a$ et $b$, le milieu marche sans problème.

Exercice 5
Correction exercice 5

Indication exercice 6.
Pour la question 4, il faut dire que $f$ s'annule 0 fois ou s'annule une et une seule fois.

Exercice 6
Correction exercice 6

Indication exercice 7.

1. $f \circ g \neq g \circ f$
2. Il n'y a pas qu'une solution, mais il y en a une de plus « naturelle » que les autres.

Exercice 7
Correction exercice 7

Indication exercice 8.
Calculer $f^2(x) = f \circ f(x)$, puis $f^3(x) = f \circ f^2(x)$ et en déduire une hypothétique formule pour $f^n(x)$ que l'on démontrera par récurrence.

Exercice 8
Correction exercice 8

Indication exercice 9.
$f: E \to F$ est injective si $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$, donc si on trouve $x \neq x'$ tels que $f(x) = f(x')$ alors $f$ n'est pas injective.
$f: E \to F$ est surjective si pour tout $y \in F$ il existe au moins un $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc si on trouve un $y \in F$ tel qu'il n'existe aucun $x \in E$ tel que $y = f(x)$ alors $f$ n'est pas surjective.

Exercice 9
Correction exercice 9

Indication exercice 10.
Même indication que pour l'exercice 9, on fera juste attention que les éléments de $\mathbb{N}^2$ sont des couples d'entiers comme par exemple $(3,2)$ ou $(1,4)$…

Exercice 10
Correction exercice 10

Indication exercice 11.
Faire le graphe de la fonction définie par $f(x) = x^2$ et sur le dessin trouver un exemple (il n'y a pas unicité des solutions pour $I$ et $J$)

Exercice 11
Correction exercice 11

Indication exercice 12.

Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, alors $a \geq 2$. Encadrer $\frac{1}{q_1}$ et $-\frac{1}{q_2}$ et faire la somme. Puis pour la question 2, il n'y a qu'un entier (de $\mathbb{Z}$) dans $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

Exercice 12

Correction exercice 12

Indication exercice 13.

1. Tracer les droites $y = x$ et $y = -x$ c'est-à-dire les bords de $D$. Cela coupe le plan $\mathbb{R}^2$ en 4 parties, ensuite on prend des points dans chacune des 4 parties, par exemple $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(0,-1)$, un seul de ces points est dans $D$ donc $D$ est le quart de plan où est le point qui est dans $D$.
2. a. faire la somme ou la différence des deux équations.
3. Trouver un point de $\mathbb{R}^2$ qui n'a pas d'antécédent.

Correction exercice 13

Indication exercice 14.

1. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow \dots$
2. $\varphi : U \to V$ est surjective si et seulement si $\varphi(U) = V$, on applique ce résultat à $f$ et $g$.
3. C'est une conséquence des questions 1 et 2.
4. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dots$
5. Par double inclusion montrer que $g(F) = G$.
6. Utiliser les questions 5 et 6.

Exercice 14

Correction exercice 14

Indication exercice 15.

1. Supposer que $g$ existe et aboutir à une contradiction.
2. 
3. Supposer que $h$ existe, définir $h(n^2)$ et choisir au hasard de valeur de $h(p)$ pour $p$ qui n'est pas un carré.

Exercice 15

Correction exercice 15

Indication exercice 16.

On rappelle que pour $f : E \to F$, si $A \subset E$, $f(A)$ est l'ensemble des éléments de $F$ de la forme $f(x)$ avec $x \in A$. Si $B \in F$, $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments $x$ de $E$ tels que $f(x) \in B$.

Exercice 16

Correction exercice 16

Indication exercice 17.

On rappelle que pour $f : E \to F$, si $A \subset E$, $f(A)$ est l'ensemble des éléments de $F$ de la forme $f(x)$ avec $x \in A$. Si $B \in F$, $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments $x$ de $E$ tels que $f(x) \in B$.

Exercice 17

Correction exercice 17

Indication exercice 18.

Par double inclusion montrer que $f(E) = E$.

Exercice 18
Correction exercice 18

Indication exercice 19.
Pour $a \Rightarrow b$

On suppose donc que $f$ est injective et il faut en déduire que $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, c'est-à-dire que il faut montrer que :

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \quad \text{et} \quad f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$$

Pour $b \Rightarrow a$.

Pour cela on va utiliser la contraposée de

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

C'est-à-dire que

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

On pose $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$.

Exercice 19
Correction exercice 19

Indication exercice 20.

On pose $y = f(x)$ puis on cherche $x$ en fonction de $y$.

Pour la question 5, on pose $n = E\left(\frac{\ln(y)}{\ln(10)}\right)$ et $t = \frac{y}{10^n}$

Exercice 20
Correction exercice 20

Indication exercice 21.

Supposons que $f^{-1}$ ne soit pas strictement croissante, c'est-à-dire qu'il existe $y_1$ et $y_2$ tels que :

$$y_1 < y_2 \quad \text{et} \quad f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \qquad (*)$$

Exercice 21
Correction exercice 21

Indication exercice 22.

Soit $y \in F$, on pose $z = g(y)$

Exercice 22
Correction exercice 22

Indication exercice 101.

1. Montrer que $m \neq -k - 1$ pour $k \geq 0$.
2. Montrer que $m \neq k$ pour $k \geq 0$.

Exercice 101
Correction exercice 101

Indication exercice 102.

1. On envisagera deux cas $x_1 < x_2$ et $x_1 > x_2$.
2. Facile

Exercice 102
Correction exercice 102

Indication exercice 103.

Pour $i \Rightarrow ii$, pour tout $y \in F$, soit $y \in G$ soit $y \in F \setminus G$.

Exercice 103

Correction exercice 103

Indication exercice 104.

1.
- $y = 0$
- $y \neq 0$, $x$ est solution d'une équation de degré 2, selon la valeur de $y$ il y a 0 ou 1 ou 2 valeur possibles pour $x$.

2. Il faut compter le nombre d'antécédent.
3. $|y| - 1 = \frac{2|x|}{1+|x|^2} - 1 = \cdots$, on en déduit $f(\mathbb{R}) \subset [-1,1]$ et grace à la question 1 on montre l'inclusion dans l'autre sens.
4. On rappelle que si $x_1$ et $x_2$ sont deux racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ alors $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, ici l'équation est : $yx^2 - 2x + y = 0$ donc $x_1 x_2 = \frac{y}{y} = 1$

Exercice 104

Correction exercice 105

Indication exercice 105.

1. Soit $x \in f^{-1}(B_1)$, alors $f(x) \in B_1$, donc $f(x) \in B_2$.
2. Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$, il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$.
3. Par équivalence cela marche. $y \in f(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2, y = f(x)$ ...

Exercice 105

Correction exercice 105

Indication exercice 106.

1. Simple application de la définition de $f(A)$ puis de $f^{-1}\big(f(A)\big)$.
2. Simple application de $f\big(f^{-1}(B)\big)$ puis de $f^{-1}(B)$.

Si $f$ est injective.

3. Pour montrer que « $f$ injective » entraine que $A \supset f^{-1}\big(f(A)\big)$, l'inclusion dans l'autre sens étant toujours vraie. Pour tout $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, $f(x) \in f(A)$…donc $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$.
   Si pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$
   $$f(x_1) = f(x_2) = y$$
   On prend $A = \{x_1\}$ et on montre que $x_1 = x_2$.
4. Comme « pour toute partie $B$ de $F$, on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ » la question revient à montrer que :
   « $f$ est surjective si et seulement si pour toute partie $B$ de $F$ on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \supset B$ »
   Si $f$ est surjective.
   Pour tout $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car $f$ est surjective…
   On pose $B = \{y\}$, alors $\{y\} \subset f\big(f^{-1}(\{y\})\big)$ ce qui s'écrit aussi $y \in f\big(f^{-1}(\{y\})\big)$…

Exercice 106

Correction exercice 106

Indication exercice 107.

$f \circ f \circ f = Id_E = f \circ f \circ f$

Exercice 107

Correction exercice 107