

1^{er} septembre 2025

Laurent PUJO-MENJOUET
↑ pas de t

DOLA - BÂT. BRACONNIER BUREAU 246

pujo@math.univ-lyon1.fr

SALLES : ADE

NOTES : TOMUSS

COURS 1 :

CHAPITRE 1

Introduction aux suites

1. Exemple

On suppose qu'on a une somme s_0 en euros que l'on place sur un compte à un taux de revenu annuel de 10%.

Par exemple: $s_0 = 50$ euros au bout d'un an on augmente de 10%

$$\begin{array}{lcl} 100 \text{ euros} & \rightarrow & 10 \text{ euros} \\ 50 \text{ euros} & \rightarrow & \frac{50 \times 10}{100} = \frac{5 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = 5 \end{array}$$

de façon générale pour s_0 euros placés on augmente de $s_0 \times \frac{10}{100} = \frac{s_0}{10} = 0.1 s_0$ (d'augmentation)

La première année on augmente la somme initiale s_0 de $0.1 s_0$ au bout d'un an, on se retrouve avec:

$$\boxed{s_1} = s_0 + 0.1 s_0 = (1+0.1) s_0 = \boxed{1.1 s_0}$$

au bout de 2 ans:

$$\boxed{s_2} = s_1 + (0.1) s_1 = 1.1 s_1 = (1.1)(1.1) s_0 = \boxed{(1.1)^2 s_0}$$

et $s_3 = (1.1)^3 s_0$ etc...

Question: si on place $s_0 = 50$ euros au départ

1. Combien aura-t-on au bout de 10 ans?
2. Combien aura-t-on gagné?
3. Au bout de combien d'années aura-t-on 100 euros?

Solution:

1. $s_0 = 50$

d'après ce qui précède on en déduit

$$s_{10} = (1.1)^{10} s_0 = (1.1)^{10} \times 50 \approx 129.68 \text{ euros}$$

2. On a alors gagné $s_{10} - s_0 \approx 129.68 - 50 \approx \boxed{79.68} \text{ euros}$

3. On cherche n (avec $n \in \mathbb{N}$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)) qui correspond au nombre d'années tel que

$$s_n = (1.1)^n s_0 \geq 100 \quad \text{avec } s_0 = 50$$

On a alors $(1.1)^n 50 \geq 100$

$$\Leftrightarrow (1.1)^n \geq \frac{100}{50} = 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(1.1)^n \geq 2}$$

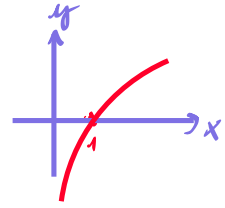
$$\Leftrightarrow \ln((1.1)^n) \geq \ln 2$$

Rappel: $\ln$ (logarithme népérien)

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^2) = 2 \ln a \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}
 (1.1)^n &\geq & \ln(a^2) &= 2\ln a \\
 \Leftrightarrow n \ln(1.1) &\geq \ln 2 & \ln(a^n) &= n \ln a \\
 \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln 2}{\ln(1.1)} \approx 7.27
 \end{aligned}$$



On aura dépensé 100 euros au bout de 8 ans.

2. Définitions

a. suite

Définition On appelle suite toute fonction définie de $\mathbb{N}$ (entiers naturels : 0, 1, 2, ...) à $\mathbb{R}$.

Définition

On appelle suite toute fonction définie de $\mathbb{N}$ (entiers naturels : 0, 1, 2, ...) vers $\mathbb{R}$ (nombres réels) que l'on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On l'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

Le nombre u_n est appelé terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Attention : ne pas confondre u_n : nombre (par exemple $u_0 = 150$)
et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est une fonction par exemple : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto \sqrt{2+n}$

On n'a écrit donc pas : par exemple

- la suite ~~u_n~~ est croissante
- mais • la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

b. Il existe 2 façons de définir les suites :

(i) formulation explicite : $u_n = f(n)$

(i) formulation explicite: $u_n = f(n)$

(ii) formulation par récurrence: $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

avantage de la formulation explicite

• on peut calculer les valeurs de u_n directement en connaissant n
par exemple $u_{500} = f(500)$

• alors que pour la formulation par récurrence :

u_{500} s'obtient par $f(u_{499})$ et u_{499} s'obtient par $f(u_{498})$ et...

Exemple: (a) Formulation explicite

$$u_n = f(n) \\ \hookrightarrow n \in \mathbb{N}$$

$$\text{ici } f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

On a alors $u_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$

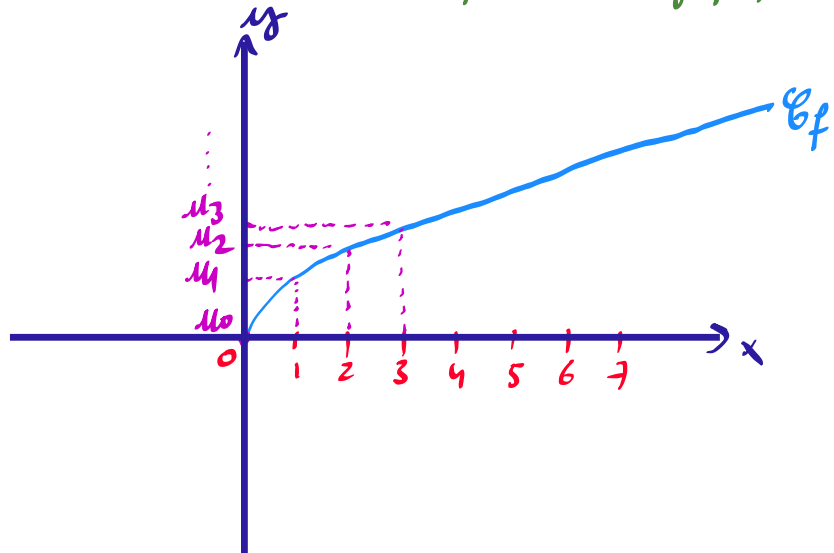
, $n \in \mathbb{N}$

$$u_0 = \sqrt{0} = 0$$

$$u_1 = \sqrt{1} = 1$$

$$u_2 = \sqrt{2}$$

Comment dessiner cette suite ? Représentation graphique

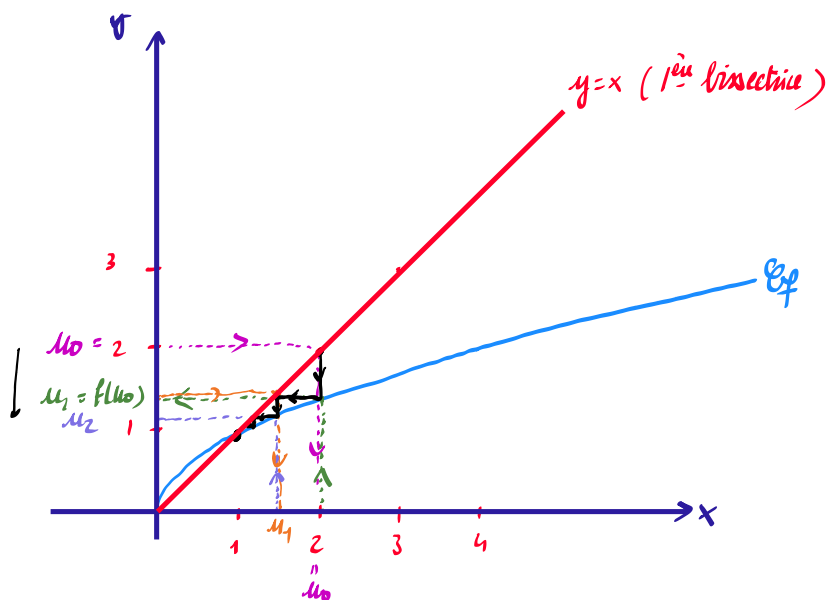


⑥ Formulation par récurrence

Exemple : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n} \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ ici $u_0 = 2$

on a $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$

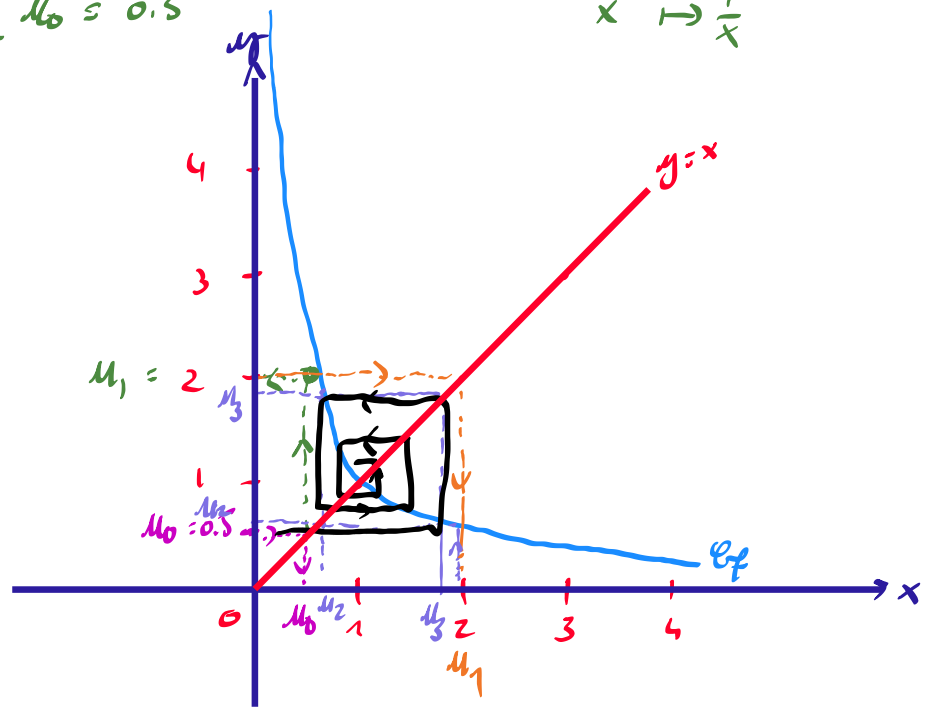
$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_1 &= \sqrt{u_0} = \sqrt{2} \\ &= f(u_0) \end{aligned}$$



Que se passe-t-il si f est décroissante

exemple :
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0.5 \end{cases}$$

$$f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x}$$



Pour résumer :

- formulation explicite : $u_n = f(n)$ où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$

- si f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

- si f est décroissante " " est décroissante

- formulation par récurrence $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$ où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$

- si f est croissante $\rightarrow$ si $u_0 < u_1$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

- $\vee$ si $u_0 > u_1$ " " est décroissante

- si f est décroissante la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ALTERNÉE

4. Suites récurrentes : généralités

Dans cette partie, nous étudions les suites sous la forme la plus générale,

c'est à dire :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & \text{si } f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ u_0 \text{ donné} & x \mapsto f(x) \end{cases}$$

attention : l'intervalle $I \subset D_f$ (domaine de définition de f)

exemple: si $f: x \mapsto \sqrt{x}$ $D_f = [0, +\infty[$ donc $I \subset [0, +\infty[$

Proposition : si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I

et (i) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente c'est à dire que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ (l est un nombre fini) alors l vérifie

$$\boxed{f(l) = l}$$

c'est à dire que la limite l quand elle existe est un point fixe de f .

Preuve: on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$
 alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

Donc en passant à la limite:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= f(u_n) \\
 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \quad \text{comme } f \text{ continue} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) \\
 \boxed{l} &= f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = \boxed{f(l)}
 \end{aligned}$$

Questions:
 on verra plus tard

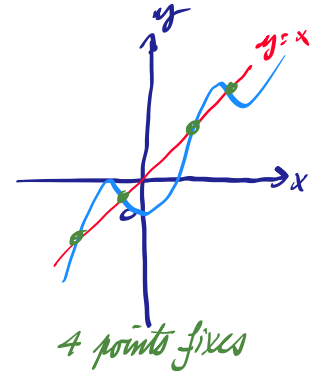
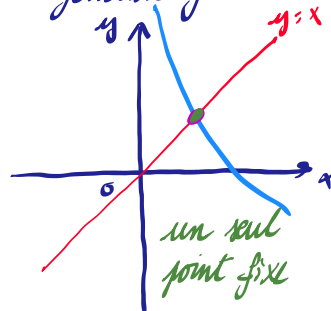
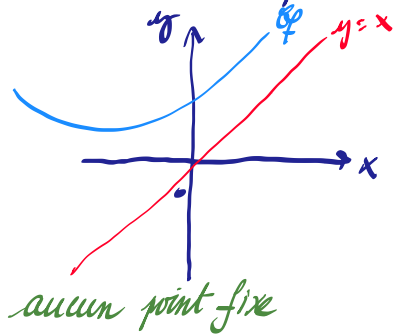
- ① comment montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente?
- ② Existe-t-il toujours un (ou plusieurs) point(s) fixe(s)?

plus

② Existe-t-il toujours un (ou plusieurs) point(s) fixe(s) ?
si oui, combien ?

Pour la question ②

Examinons des représentations de fonctions f :



Remarque: bonne nouvelle! toutes les fonctions classiques (que l'on a étudié au lycée) sont continues sur leur domaine de définition.

Comment revenir à la question 1?

C'est à dire comment montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente?

c'est à dire comment montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente?
 Autrement dit est-ce que le point fixe ℓ est attractif ou répulsif?
 Pour y répondre on va avoir besoin des résultats intermédiaires suivants

Définition: STABILITÉ D'UN INTERVALLE I :

On dit qu'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

est STABLE par f si $f(I) \subset I$ $\subset$ inclus

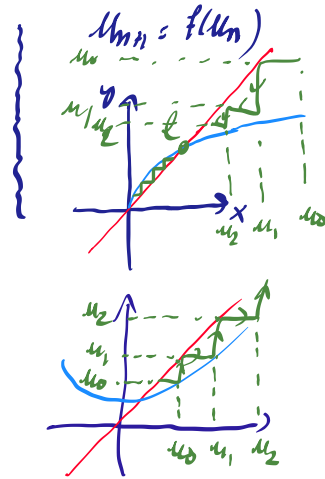
mathématiquement ça s'écrit:

si I est stable par f :

pour tout $x \in I$ alors $f(x) \in I$

exemple: si $I = [a, b]$, on a $a \leq x \leq b$

si I est stable par f alors $a \leq f(x) \leq b$



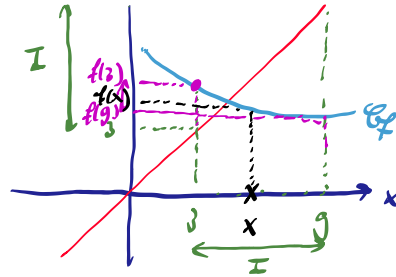
Graphiquement:

$y = f(x)$ (blue curve) and $y = x$ (red line)

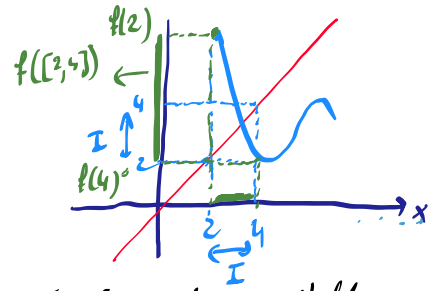
$f(2)$ (green point)

$y = x$ (red line)

Graphiquement



ici $[3, 9]$ est STABLE par f



ici $[2, 4]$ n'est pas stable par f !

Proposition

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathcal{D}_f$ (domaine de définition de f)

et si I est STABLE par f (càd $f(I) \subset I$)

alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné dans } I \end{cases}$

est bien définie (càd que tous les u_n appartiennent à $\mathcal{D}_f$)

condition nécessaire de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(a) Fonction strictement contractante

(a) Fonction strictement contractante

Définition: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$

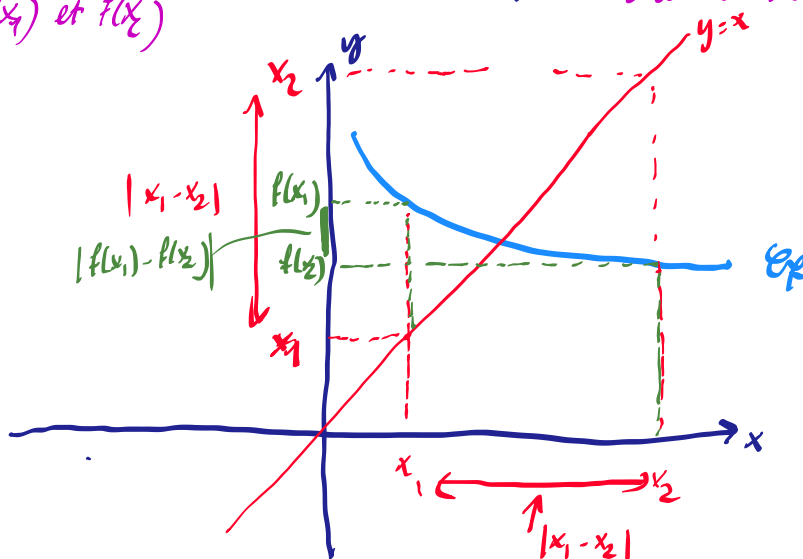
Dire que f est strictement contractante sur I signifie qu'il existe un nombre réel k , avec $\boxed{0 < k < 1}$ tel que pour tous x_1 et $x_2 \in I$, also

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|$$

distance entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$

< 1

distance entre x_1 et x_2



Question: comment trouver k (avec $0 < k < 1$ si possible)

On a vu que si f est strictement contractante sur I ,

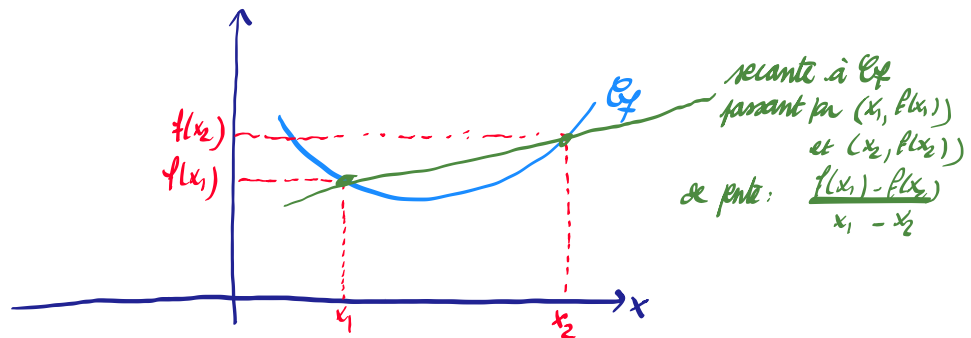
alors pour tous x_1 et $x_2 \in I$ avec $x_1 \neq x_2$ $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|$ (avec $k < 1$)

équivalent à $\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq k$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq k$$

Rappel: si $|x| \leq k$
 $\Leftrightarrow -k \leq x \leq k$

$$\Leftrightarrow \boxed{-1} < -k \leq \boxed{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}} \leq k < \boxed{1}$$

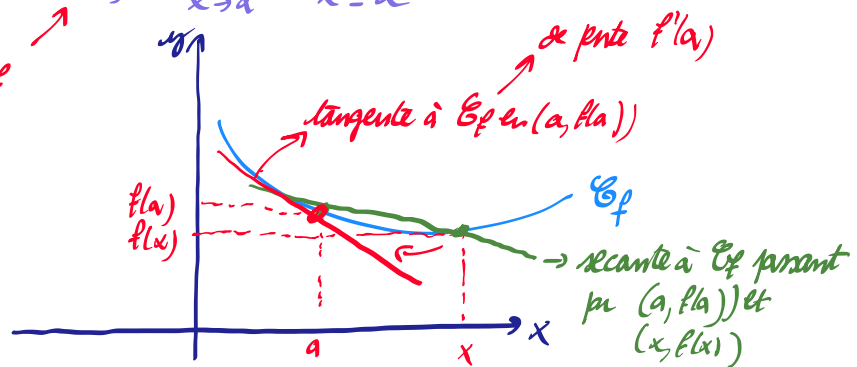


Remarque: ① donc la condition $-1 < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 1$
signifie que les pentes de toutes les sécantes à $\mathcal{C}_f$ doivent être comprises
entre -1 et 1 .

② en pratique il est difficile de montrer cette inégalité
pour contourner cette difficulté, on utilise la notion de dérivée

Rappel: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

pente de
la tangente à $\mathcal{C}_f$
en $(a, f(a))$



Remarque: on pourrait montrer que si pour tout $x \in I$
 $-1 < f'(x) < 1$ alors ça implique que
pour tous $x_1, x_2 \in I$ $-1 < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 1$

c'est à dire que f est strictement contractante!

Pour montrer que f est strictement contractante^{sur I} , il suffit donc de

Pour montrer que f est strictement contractante, il suffit donc de montrer que pour tout $x \in I$, $-1 < f'(x) < 1$

càd que pour tout $x \in I$ $|f'(x)| < 1$, et si on montre que c'est vrai pour le $\max_{x \in I} |f'(x)| < 1$ alors c'est vrai pour tous les $x \in I$

On a alors le théorème suivant:

Théorème: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$

① si f est dérivable sur I

② si en plus $\max_{x \in I} |f'(x)| < 1$ (càd que pour tout $x \in I$ $-1 < f'(x) < 1$)

alors f est strictement contractante sur I

Méthode pour faire les exercices:

en pratique pour montrer qu'une fonction f est strictement contractante sur I

① on donne f (énoncé)

② on calcule $f'(x)$ sur I

③ on encadre $f'(x)$: on montre que $k_1 \leq f'(x) \leq k_2$ pour tout $x \in I$

• si $k_1 > 0$ alors $\max_{x \in I} |f'(x)| = k_2$

• si $k_2 < 1$ alors f est strictement contractante

• si $k_2 \geq 1$ f n'est pas " " "

• si $k_2 \leq 0$ $\max_{x \in I} |f'(x)| = k_1$

• si $k_1 < 1$ f est strict. contractante

• si $k_1 \geq 1$ f n'est pas strict. contractante

• si $k_1 < 0$ et $k_2 > 0$ on regarde le maximum

entre $|k_1|$ et k_2 .

• si ce maximum est < 1 f est strict. contractante

> 1 n'est pas strict "

Proposition: existence d'un point fixe:

Soient $I = [a, b]$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue

si en plus $f([a, b]) \subset [a, b]$ (c'est à dire que $[a, b]$ est stable par f)

alors f admet au moins un point-fixe dans $[a, b]$

Théorème: théorème du point fixe: (existence et unicité du point fixe)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ telle q

- ① f est continue sur $\mathbb{R}$
- ② I est stable par f (càd $f(I) \subset I$, on en tire point par point $x \in I, f(x) \in I$)
- ③ f est strictement contractante sur I (càd que $\max_{x \in I} |f'(x)| < 1$)

alors f admet un unique point fixe ℓ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in I \text{ donné} \end{cases}$ converge vers ℓ !!

On dit alors que le point fixe ℓ est ATTRACTIF.

Question: que se passe-t-il si on a plusieurs points fixes?

Comment déterminer lesquels sont attractifs et lesquels

sont répulsifs

la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

s'éloigne de ce point fixe

la suite

la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe

Théorème: points fixes attractifs et points fixes répulsifs

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$

On suppose f continue et dérivable sur I

si on arrive à calculer les points fixes ℓ de f (on arrive à trouver leurs valeurs)

alors: ① si $|f'(\ell)| < 1$ alors ℓ est ATTRACTIF: si u_0 est proche de ℓ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ

② si $|f'(\ell)| > 1$ alors ℓ est REPULSIF $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'éloigne de ℓ

③ si $f'(\ell) = 1 \rightarrow$ on doit calculer $f''(\ell)$
• si $f''(\ell) \neq 0$ alors ℓ : REPULSIF
• si $f''(\ell) = 0$ alors (i) si $f'''(\ell) > 0$
alors ℓ est REPULSIF
(ii) si $f'''(\ell) < 0$
alors ℓ est ATTRACTIF

④ si $f'(\ell) = -1$
on doit calculer $-2f'''(\ell) - 3(f''(\ell))^2$ si < 0 alors ℓ est ATTRACTIF
si > 0 " ℓ est REPULSIF

- FIN DU COURS -