12 septembre 2022

Ex1 :

3

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

a. On reconnaît une suite géométrique de raison -1 et de 1er terme 3

b. La formulation explicite est alors $\boxed{u_n = 3 \cdot (-1)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c. $u_0 + u_1 + \dots u_n = 3 \cdot \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}$

$u_0 + \dots + u_n = u_0 \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$= 3 \cdot \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2} = \dfrac{3}{2} \cdot \left(1-(-1)^{n+1}\right)$ or $1-(-1)^{n+1} =$

$3 \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{3a}{b} = \dfrac{3}{b} \cdot a$

$a^{n+1} = a^n \cdot a$

$1-(-1)^{n+1} = 1-(-1)^n \cdot (-1)$

$= 1+(-1)^n$

or $(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$(-1)^0 = 1$ $(-1)^2 = 1$ $(-1)^4 = 1$

$(-1)^1 = -1$ $(-1)^3 = -1$ $(-1)^5 = -1$

donc $1-(-1)^{n+1} = 1+(-1)^n = 1+1 = 2$ si n est pair

et $\quad$ " $=$ " $= 1-1 = 0$ si n est impair

donc si n est pair : $u_n = 3(-1)^n = 3 \cdot 1 = 3$

si n est impair $u_n = 3(-1)^n = 3(-1) = -3$

donc $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \dfrac{3}{2}\left(1+(-1)^n\right)$ si n est pair

$= \dfrac{3}{2} \cdot \boxed{2} = 3$

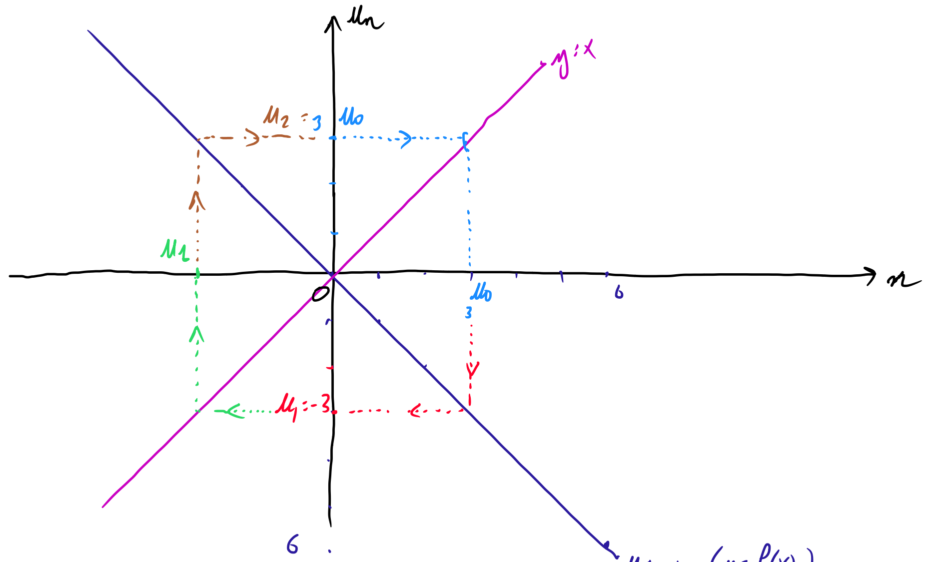
et $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \dfrac{3}{2} \cdot \boxed{0} = 0$ si n est impair

donc $u_{10} = 3$

$u_{n+1} = -u_n$

$= f(u_n)$

où $f(x) = -x$



la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est cyclique. / périodique

(4) $\begin{cases} u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{2} \\ u_0 = 4 \end{cases}$

a. On reconnaît une suite géométrique de raison $\frac{-1}{2}$ et de premier terme 4.

b. La formulation explicite est donc : $u_n = 4 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

si <u>n est pair</u> : $u_n = 4\left(\frac{-1}{2}\right)^n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ car $\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ si n est pair

$= 4 \cdot \frac{1^n}{2^n}$ $\quad \left(\frac{-1}{2}\right)^n = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\boxed{u_n = 4 \cdot \frac{1}{2^n}}$

$(-1)^n = -1$ si n impair

si n est <u>impair</u> $u_n = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 4 \cdot (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$= -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = -4 \cdot \frac{1}{2^n}$

$\boxed{u_n = -\frac{4}{2^n}}$

c. $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)}$

$= \cancel{1}\,4 \cdot \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{2}}$

$a^{n+1} = a^n \cdot a^1$

$= L \quad 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad \dfrac{1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2+1} = 4 \cdot 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\dfrac{a}{1}$

$$\frac{a}{b/c} = a \times \frac{c}{b}$$

$$= 4 \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{2+1}{2}} = 4 \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}$$

$$= 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \cdot \frac{2}{3} = 4\left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \cdot \frac{2}{3}$$

$$\left(-\frac{1}{b}\right)^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n \text{ si } n \text{ pair} \quad \boxed{\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1^n}{b^n} = \frac{1}{b^n}}$$

$$(-1)(-1) = 1$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \cdot \frac{\cancel{2}}{3}$$

$$= \boxed{\frac{4}{3}\left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)}$$

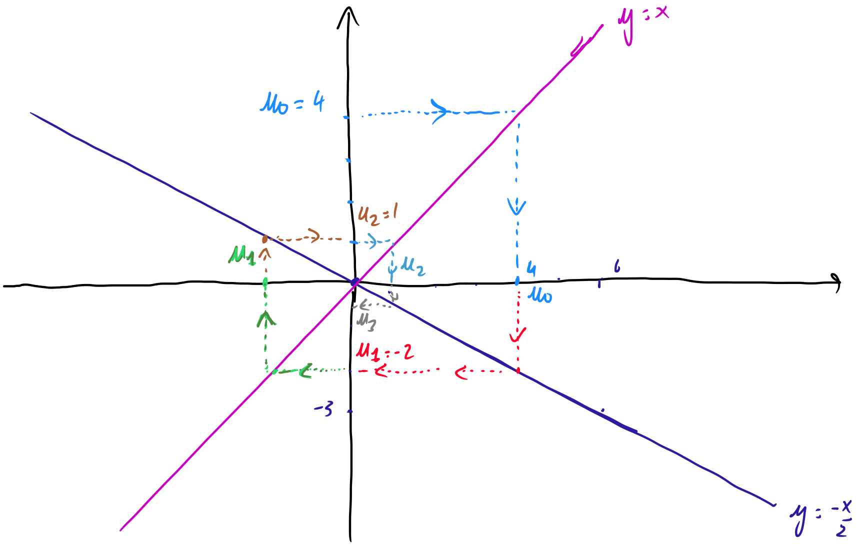
$$u_0 + \dots + u_{10} = \frac{4}{3}\left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{10}\right) = \frac{4}{3}\left(2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \frac{4}{3}\left(2 + \frac{1}{2^{10}}\right) = \frac{4}{3}\left(2 + \frac{1}{1024}\right)$$

$$= \frac{2^2}{3} \frac{(2 \cdot 2^{10} + 1)}{2^{10}}$$

$$= \frac{2^2}{3} \cdot \frac{(2^{11}+1)}{2^{10}} = \frac{\cancel{2^2}}{3} \frac{(2^{11}+1)}{\cancel{2^2} \cdot 2^8} = \frac{2^{11}+1}{3 \cdot 2^8} = \frac{2049}{3 \times 256} = \frac{683}{256}$$

$$\simeq 2{,}66\dots$$

$u_{n+1} = \frac{-1}{2} u_n$
$= f(u_n)$
où $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x$



5. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 1 \\ u \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

a. On reconnaît une suite arithmético-géométrique de raisons -1 et 1 et de premier terme 1.

b. Pour calculer la formulation explicite on procède de la façon suivante

(i) étape 1 : on cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = f(\ell)$

(ici $u_{n+1} = -u_n + 1 = f(u_n)$ avec $f(x) = -x+1$)

donc $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = -\ell + 1$

$\Leftrightarrow \ell + \ell = 1$

$\Leftrightarrow 2\ell = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{\ell = \frac{1}{2}}$

(ii) étape 2 : on pose $\begin{cases} v_n = u_n - \ell = u_n - \frac{1}{2} \quad \text{avec } \boxed{v_0} = u_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \boxed{u_n = v_n + \ell} \end{cases}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$

$= -u_n + 1 - \ell$

$= -(v_n + \ell) + 1 - \ell$

$= -v_n - \ell + 1 - \ell$

$v_n - \ell + 1 - \ell$

$= -v_n - 2\ell + 1$

$\boxed{v_{n+1}} = -v_n - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + 1 = -v_n - 1 + 1 = \boxed{-v_n}$ on obtient une suite géométrique de raison -1 et de 1er terme $v_0 = \frac{1}{2}$

$\ell = \frac{1}{2}$

donc $v_n = v_0 \cdot (-1)^n = \frac{1}{2} \cdot (-1)^n = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ si n paire} \\ \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{-1}{2} \text{ si impair} \end{cases}$ car $(-1)^n = 1$ si n pair, $(-1)^n = -1$ si n impair

(iii) étape 3 conclusion:

$\boxed{u_n = v_n + \ell} = \frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{0} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

c. $u_0 + u_1 + \dots + u_n =$

$u_0 = 1$

$u_0 + u_1 = 1 + 0 = 1 = u_0.$

$u_0 + u_1 + u_2 = 1 + 0 + 1 = 2$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3$

$+ u_5 = 3$

$+ u_6 = 4$

$+ u_7 = 4$

$u_7 =$

$+ u_8 = 5$

$+ u_9 = 5$

$+ u_{10} = \boxed{6}$.

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

$1 + 0 + 1 + 0 + \dots + \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad = u_0 + u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_n$ si n pair

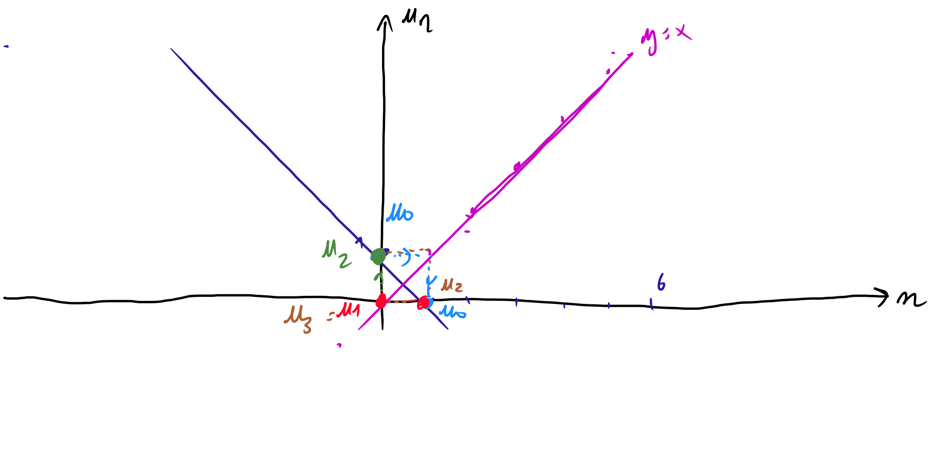
$\left[\begin{array}{l} = u_0 + u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{n-1} \text{ si } n \text{ impair} \\ = 1 + 1 + 1 + 1 \dots + 1 \end{array}\right.$

$\underline{n = 4}$ $\quad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = u_0 + u_2 + u_4$

$= 1 + 1 + 1 \quad = 3$

$\underbrace{(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}_{1+1+1+1+1} - \underbrace{(u_1 + u_3)}_{1+1}$

EN EXERCICE : $u_0 + \dots + u_n$

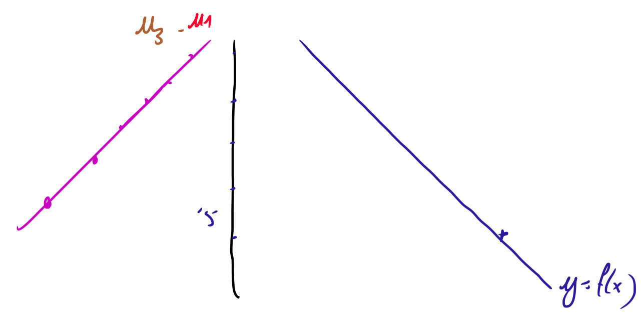


d.

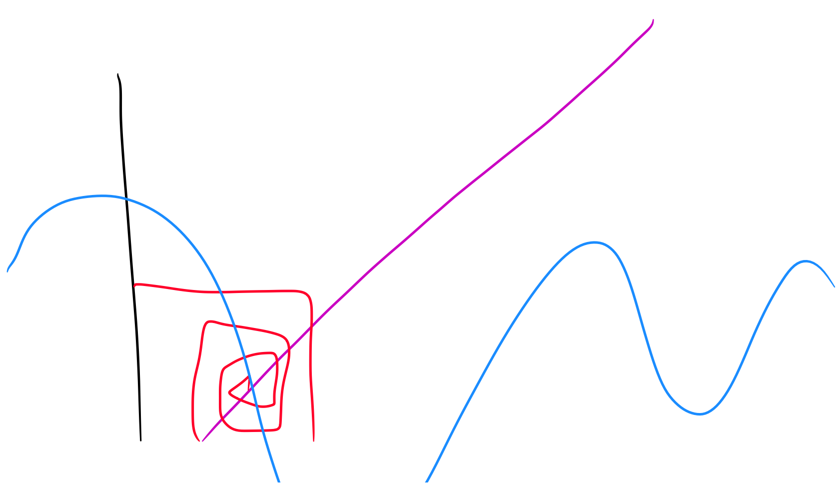
$u_{n+1} = f(u_n)$

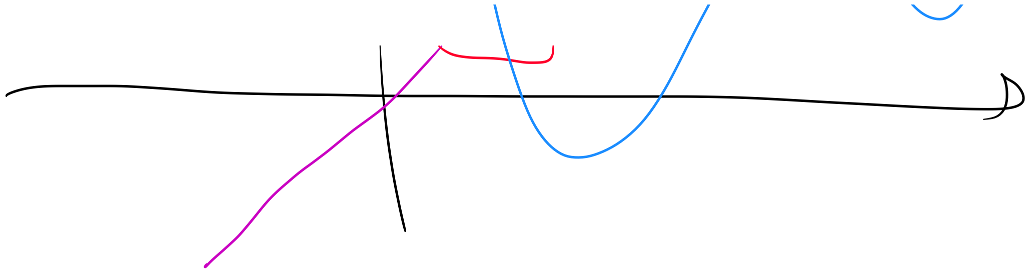
$= -u_n + 1$

$f(x) = -x + 1$



$$u_{n+1} = f(u_n)$$





20 septembre 2022.

On considère la suite arithmético géométrique suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = r\,u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases} \qquad (\text{et } r \text{ réel}, r \neq 1)$$

① On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto rx + a$

et on cherche ℓ t.q. $f(\ell) = \ell$ $\qquad r\ell + a = \ell \iff (r-1)\ell = a$

$\iff \boxed{\ell = \dfrac{a}{r-1}}$, existe car $r \neq 1$

② On pose $v_n = u_n - \ell$

et après calculs, on montre

et après calculs, on montre que $\begin{cases} v_{n+1} = r v_n \\ v_0 = u_0 - l \end{cases}$

donc $v_n = v_0 \cdot r^n$, $n \in \mathbb{N}$

Par conséquent, comme $u_n = v_n + l$

$= v_0 \cdot r^n + l$

$= (u_0 - l)\, r^n + l$ avec $l = \frac{a}{r-1}$

Question : que vaut $u_0 + u_1 + \dots + u_n$?

On sait que $u_n = v_n + l$

donc
$$\begin{aligned} & u_0 = v_0 + l \\ + \; & u_1 = v_1 + l \\ + \; & u_2 = v_2 + l \\ & \vdots \\ + \; & u_n = v_n + l \end{aligned}$$

$l + l + l \dots + l$: $n+1$ fois

$u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + \underbrace{(n+1)\, l}$, comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique $v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

$= v_0 \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + (n+1)\, l$

$= (u_0 - l)\, \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + (n+1)\, l$ avec $l = \frac{a}{r-1}$

⑥ $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

a. On reconnaît une suite arithmético géométrique de raisons -2 et 3

b. Pour la formulation explicite, on pose :

$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad f : x \mapsto -2x+3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

et on cherche ℓ t.q. $f(\ell) = \ell$ càd $-2\ell + 3 = \ell$

$\Leftrightarrow \quad 3 = \ell + 2\ell$

$\Leftrightarrow \quad 3 = 3\ell$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ell = 1}$

Ensuite, on pose $v_n = u_n - \ell$ avec $v_0 = u_0 - \ell = 2 - 1 = 1$.

alors $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$

$= -2u_n + 3 - \ell \overset{u_n = v_n + \ell}{=} -2(v_n + \ell) + 3 - \ell = -2v_n - 2\ell + 3 - \ell$

$= -2v_n - 2 + 3 - 1$

$= -2v_n$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = 1$

Par conséquent : $v_n = v_0 \cdot r^n = 1.(-2)^n = (-2)^n$

Finalement $u_n = v_n + \ell = (-2)^n + 1$

c. $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (u_0 - \ell)\,\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + (n+1)\ell = 1.\,\frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} + (n+1).1$

$$= \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1+2} + (n+1)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(1 - (-2).(-2)^n\right) + (n+1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + 2(-2)^n\right) + (n+1)$$

si $\underline{n = 10}$ $u_0 + \dots + u_{10} = \frac{1}{3}\left(1 + 2(-2)^{10}\right) + 11$ $\qquad (-2)^{10} = 2^{10} = 1024$

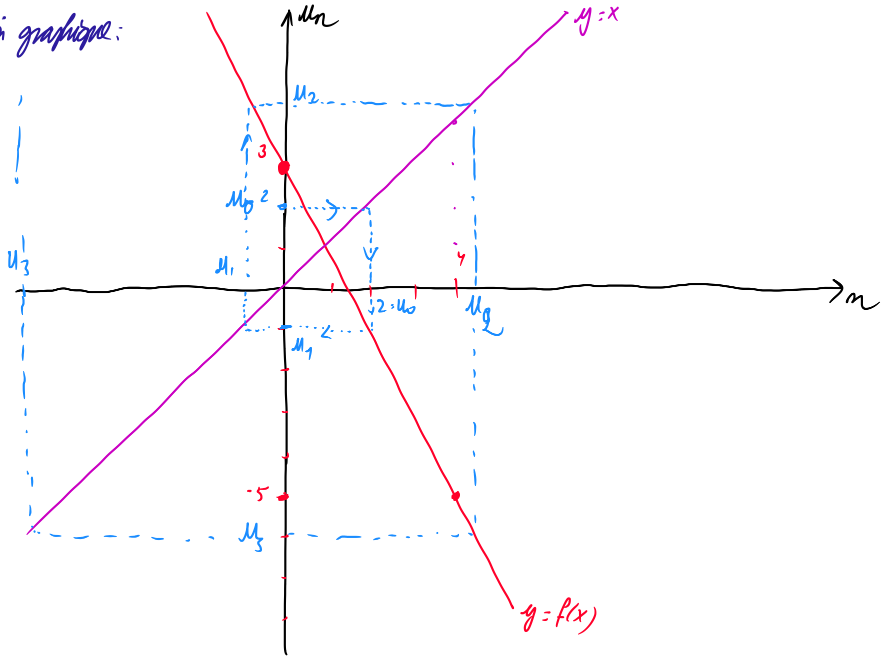
$$= \frac{1}{3}\left(1 + 2.1024\right) + 11$$

$$= \frac{2049}{3} + 11 = 683 + 11 = \boxed{694}$$

d. Représentation graphique :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

On pose $f(x) = -2x+3$



Exercice 2 :

1) a) Au temps $t=0$ on injecte $Q_0 = 1.8$ unités

Au bout d'une heure (a) on a perdu 30% de cette quantité injectée.

Il nous reste donc $100\% - 30\% = 70\%$ de 1.8.

$100 \to 70$

$1.8 \to \frac{1.8 \times 70}{100} = 1.8 \times (0.7)$

(b) D'autre part à ce qui reste c'est à dire 0.7×1.8 on injecte de nouveau 1.8 unités

Par conséquent au bout d'une heure il y aura dans le corps la quantité

$$Q_1 = \underbrace{1.8}_{\text{nouvelle injection}} + \underbrace{0.7 \times 1.8}_{\text{ce qui reste de l'ancienne injection.}} = 1.8(1+0.7) = 1.8 \times (1.7) = \boxed{3.06}$$

b) Exprimer Q_2 en fonction de Q_1 :

Pour trouver Q_2 : on ajoute 1.8 (nouvelle injection) et il reste $0.7 . Q_1$ de la precedente injection

donc $Q_2 = 1.8 + 0.7 . Q_1 = 3.942$ unités

2. De façon generale si Q_n est la quantité dans le corps au bout de n heures

alors $$Q_{n+1} = \underbrace{1.8}_{\text{nouvelle injection}} + \underbrace{0.7\, Q_n}_{\text{quantité restante entre l'heure } n \text{ et l'heure } n+1}$$

On reconnaît une suite arithmetico geometrique de raisons 0.7 et 1.8 et de premier terme $Q_0 = 1.8$.

3. Calculons la formulation explicite de $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Question supplémentaire :

6. Representer graphiquement la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3 : (1) On considère la suite

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

a. La suite est-elle croissante ? Décroissante ? Alternée ?

b. La ~~suite~~ est-elle convergente ? Si oui, vers quoi ?

c. Représenter cette suite

(2) Mêmes questions pour

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} \\ u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} & u_n \\ u_0 = 1 & \end{cases}$$

③ Mêmes questions pour

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

26 septembre 2022.

<u>Remarque</u> : quelques fois, c'est assez long et fastidieux de montrer qu'un ensemble I est stable par f (càd $f(I) \subset I$) on doit en effet montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$) et que $\max |f'(x)| < k < 1$

et que $\max_{x \in I} |f'(x)| < k < 1$

Il existe alors un résultat qui nécessite quand même d'avoir f, f', f'' et f''' qui existent sur I. C'est le théorème suivant :

points fixes attractifs et répulsifs

Théorème : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

où $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ continue, dérivable sur I et t.q f'' et f''' existent sur I

Si on arrive à calculer un point fixe de f (càd qu'il existe l t.q. $f(l) = l$)

alors : 1 (si) $|f'(l)| < 1$ on dit que le point fixe l est attractif et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l.

valeur absolue

2 (si) $|f'(l)| > 1$ on dit le point fixe l est répulsif et la suite va diverger (s'éloigner de l)

valeur absolue

3 (si) $f'(l) = 1$ alors on doit calculer $f''(x)$ (dérivée seconde de f en l)

pas de valeur absolue

dans ce cas (a) si $f''(l) \neq 0$ alors l est répulsif

(b) si $f''(l) = 0$ alors

(i) $f'''(l) > 0$ alors l est répulsif

(ii) $f'''(l) < 0$ alors l est attractif

4 si $f'(l) = -1$ on calcule :

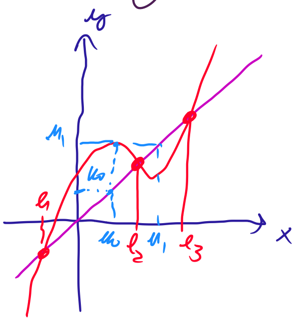
$-2f'''(l) - 3(f''(l))^2$ < 0 alors l attractif

> 0 alors l répulsif

Méthode : quand on a $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$

① vérifier que f est continue, que f', f'' et f''' existent sur $I \subset \mathbb{R}$

② calculer l tel que $f(l) = l$

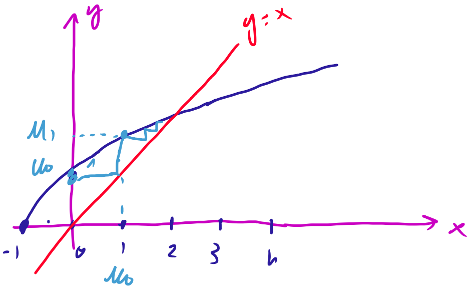


→ si il n'existe pas de l ⇒ la suite n'est pas convergente

→ s'il existe plusieurs points fixes on étudie les points fixes les plus proches de u_0 et on calcule $f'(l)$ pour ces l (l_1, l_2, l_3)..

→ on applique alors le théorème précédent à ces points fixes

Exercice : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \\ u_0 = 1 \end{cases}$



On pose $f : x \longmapsto \sqrt{x+1}$, avec $x \geqslant -1$

$x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$

a. Calculons f' : on $f(x) = \sqrt{x+1}$ $\qquad \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ avec $x > -1$

si $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ (car $1 > 0$, $2 > 0$, $\sqrt{x+1} > 0$)

donc f est croissante pour $x \geqslant -1$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est MONOTONE

De plus, $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{2}$ or $\sqrt{2} > 1$

donc $u_0 < u_1$ ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est CROISSANTE

6. Est-ce que f possède un point fixe ?

Cherchons ℓ tel que $f(\ell) = \ell$ càd $\sqrt{\ell+1} = \ell$ avec $\ell \geq 0$
$(\ell > -1)$

$\Leftrightarrow \ell+1 = \ell^2$

$\Leftrightarrow 1\ell^2 - \ell - 1 = 0$

ici $a = 1$ $b = -1$ $c = -1$

donc $\Delta = 1 - 4.(1)(-1)$
$= 1 + 4 = 5 > 0$ on a

donc 2 solutions

$\ell_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ pas possible car on cherche $\ell \geq 0$

$\ell_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

$\simeq 1.618\ldots$

Rappel : $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

si $\Delta < 0$ pas de solution

si $\Delta = 0$ une seule solution $x_1 = \frac{-b}{2a}$

si $\Delta > 0$ 2 solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

On vient de montrer qu'il existe un unique point fixe.

Est-ce que ce point fixe est attractif ou répulsif.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

Pour ça calculons : $f'(\ell)$: $f'(\ell) = \frac{1}{2\sqrt{\ell+1}}$ $\ell > 0$

$= \frac{1}{2\sqrt{\ell^2}}$ (car $\ell+1 = \ell^2$)

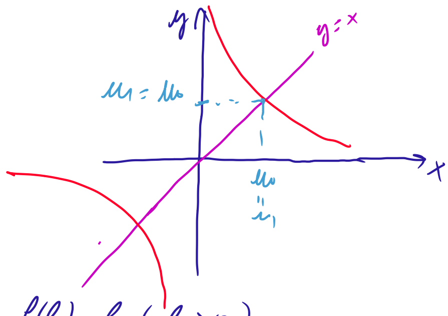
$= \frac{1}{2\ell} < 1$

Ici $f'(\ell) > 0$ donc $|f'(\ell)| = f'(\ell) < 1$ d'après le théorème précédent le point fixe ℓ est ATTRACTIF.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, croissante (en escalier) et converge vers ℓ (attractif), avec $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618\ldots$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Exercice $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$



on pose $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, avec $x \neq 0$

Calculons le point fixe : càd ℓ t.q. $f(\ell) = \ell$ ($\ell > 0$)
↑ car $u_0 = 1 > 0$

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{1}{\ell} = \ell$

$\Leftrightarrow 1 = \ell^2$

$\Leftrightarrow 0 = \ell^2 - 1 = (\ell - 1)(\ell + 1)$ Rappel : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

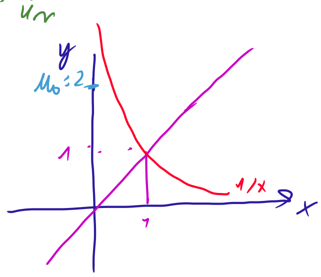
$\Leftrightarrow \ell = 1$ ou $\ell = -1$

(car $u_0 = 1 > 0$)

mais $\ell > 0$ donc le seul point fixe qui nous intéresse est $\boxed{\ell = 1}$

Comme $u_0 = \ell$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire c'est à dire que tous les u_n valent $\boxed{1}$.

exercice : même exercice avec $u_0 = 2$ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$



$f(x) = \frac{1}{x}$ $x > 0$

Ici : $f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{>0}) < 0$ donc f décroissante

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alternée

Est-ce que $\ell = 1$ est attractif ou répulsif ?

$f'(\ell) = f'(1) = \frac{-1}{(-1)^2} = \frac{-1}{1^2} = -1$ $-2f'''(\ell) - 3(f''(\ell))^2$

on est dans le cas ④ du théorème : $f'(\ell) = -1$

on doit calculer f'' et f''' $x^n \overset{\text{dérivée}}{\rightarrow} n x^{n-1}$

on a $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f'(x) = -1 x^{-1-1} = -1 x^{-2} = \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-2-1} = 2x^{-3}$ $f'''(x) = -6x^{-3-1} = -6x^{-4}$

$f''(\ell) = 2 . 1^{-3} = 2$ $= -6 . 1^{-4} = -6$

$-2 f'''(\ell) - 3(f''(\ell))^2 = -2.(2) - 3(-6) = -4 + 18 = 14 > 0$ donc $\ell = 1$ répulsif repulsif

donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée et divergente

3 octobre 2022

Correction de l'exercice 2 de l'examen de décembre 2021

$f : x \mapsto \frac{x+2}{x-5} + 1$

1. $D_f = ?$ $\quad D_f = \{ x \in \mathbb{R} ; x-5 \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{5\} =]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$

2. f est continue sur D_f comme quotient et somme de fonctions continues.
$f_1 : x \mapsto x+2$
$f_2 : x \mapsto x-5$
$f_3 : x \mapsto 1$

3. On considère $x \in [0,1] \subset]-\infty, 5[\subset D_f$ $\quad -\infty \; 0 \; 1 \; 5 \; +\infty$

a. Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)} + 1$ $\quad u(x) = x+2 \quad u'(x) = 1$ $\quad v(x) = x-5 \quad v'(x) = 1$

donc $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} + 0$

$= \frac{1.(x-5) - (x+2).1}{(x-5)^2}$

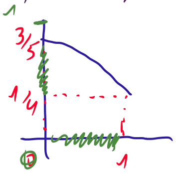
$= \frac{\cancel{x}-5-\cancel{x}-2}{(x-5)^2} = \frac{-7}{(x-5)^2}$

b. Pour tout $x \in [0,1]$ $\quad f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$ $\quad$ or $-7 < 0$ pour tout $x \in [0,1]$
$(x-5)^2 > 0$ " " .
donc le quotient est "toujours" < 0
sur $[0,1]$

donc f est strictement décroissante.

c. $f(0) = \frac{0+2}{0-5} + 1 = \frac{2}{-5} + 1 = -\frac{2}{5} + 1 = \frac{-2}{5} + \frac{5}{5} = \frac{3}{5}$ $\quad 0 < \frac{3}{5} < 1$ $\quad \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$

$f(1) = \frac{1+2}{1-5} + 1 = \frac{3}{-4} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{-3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{1}{4}$ $\quad 0 < \frac{1}{4} < 1$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{5}{20}$



5)

comme pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [f(1), f(0)] = [\frac{1}{4}, \frac{3}{5}] \subset [0,1]$

alors $[0,1]$ est stable par f.

$(g(x)^2)' = 2g(x)g'(x)$ avec $g(x) = (x-5)$, $g'(x) = 1$

d. Soit $x \in [0,1]$, $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$ qui est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = -7$, $v(x) = (x-5)^2$

donc $u'(x) = 0$, $v'(x) = 2(x-5)$.

alors $f''(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

$= \frac{0 + 7 \cdot 2(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{14 \cdot \cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{14}{(x-5)^3}$

e. Pour tout $x \in [0,1]$, $f''(x) = \frac{14}{(x-5)^3}$ or $14 > 0$

et $(x-5)^3 < 0 \Leftrightarrow x - 5 < 0$

$\Leftrightarrow x < 5$

or ici $x \in [0,1] \subset]-\infty, 5[$

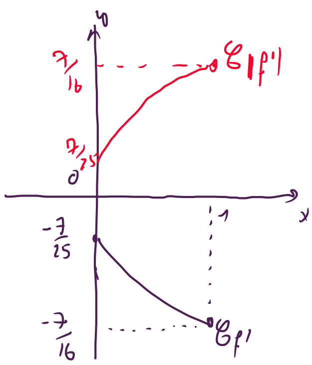
donc $(x-5)^3 < 0$

Par conséquent, pour tout $x \in [0,1]$,

$f''(x) < 0$ donc f' est décroissante

f. $f'(0) = \frac{-7}{(-5)^2} = \frac{-7}{25}$ $\qquad f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$

$f'(1) = \frac{-7}{(1-5)^2} = \frac{-7}{(-4)^2} = \frac{-7}{16}$



Ici $\max\limits_{x \in [0,1]} |f'(x)| = |f'(1)| = \boxed{\frac{7}{16}} < 1$

(car $f'(x) < 0$ sur $[0,1]$

et $f' \searrow$ sur $[0,1]$

donc $|f'| \nearrow$ sur $[0,1]$

et son maximum sur $[0,1]$ est $|f'(1)|$

Pour résumer : $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad I = [0,1]$, $[0,1] \subset \mathcal{D}_f$

① f continue sur I

② $[0,1]$ stable par f

③ et f strictement contractante $\left(\max\limits_{x \in [0,1]} |f'(x)| = \frac{7}{16} < 1 \right)$

conclusion : d'après le théorème du point fixe, f admet un unique point fixe

g. et si une suite est définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$, elle convergera vers ce point fixe.

4. $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \in [0,1] \end{cases}$

a. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ or d'après la question c) comme $[0,1]$ est stable par f si $x_0 \in [0,1]$ tous les $x_n \in [0,1]$ (car $x_{n+1} = f(x_n)$)
donc x_n n'est jamais égal à 5. Par conséquent la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

b. D'après f) et g) du 3) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point fixe de f.

c. ℓ est défini par $f(\ell) = \ell$ avec $\ell \in [0,1]$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell+2}{\ell-5} + 1 = \ell$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell+2}{\ell-5} = \ell - 1$$

$$\Leftrightarrow \ell + 2 = (\ell-1)(\ell-5)$$

$$\Leftrightarrow \ell + 2 = \ell^2 - 5\ell - \ell + 5$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 - 7\ell + 3 = 0$$

$\Delta = 49 - 4\times 3 = 49 - 12 = 37$

$36 = 9 \times 4 = (3\times 2)^2 = 6^2$

$\ell = \frac{7+\sqrt{37}}{2} \simeq \frac{7+6}{2} = \frac{13}{2}$ ou $\ell = \frac{7 - \overset{6}{\sqrt{37}}}{2} \simeq \frac{1}{2}$

$$\boxed{\ell = \frac{7-\sqrt{37}}{2}}$$

d. Utiliser $f'(\ell) =$ si $|f'(\ell)| < 1 \Rightarrow$ alors ℓ est attractif dernier théorème du cours

e. comme f est $\searrow$ d'après 3)b) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ALTERNÉE