13 septembre 2022

2. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 5 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

a. On reconnait une suite arithmétique de raison -5 et de 1^{er} terme 2.

b. Par conséquent, la formulation explicite est donnée par

$u_n = 2 + n(-5) = 2 - 5n$

c. $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)\left(\frac{2+2-5n}{2}\right)$ $\qquad (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$

$= (n+1)\left(\frac{4-5n}{2}\right)$

si $n=10$ $\quad u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = 11 \cdot \left(\frac{4-50}{2}\right) = 11 \cdot \left(-\frac{46}{2}\right) = 11 \cdot (-23) = -253$

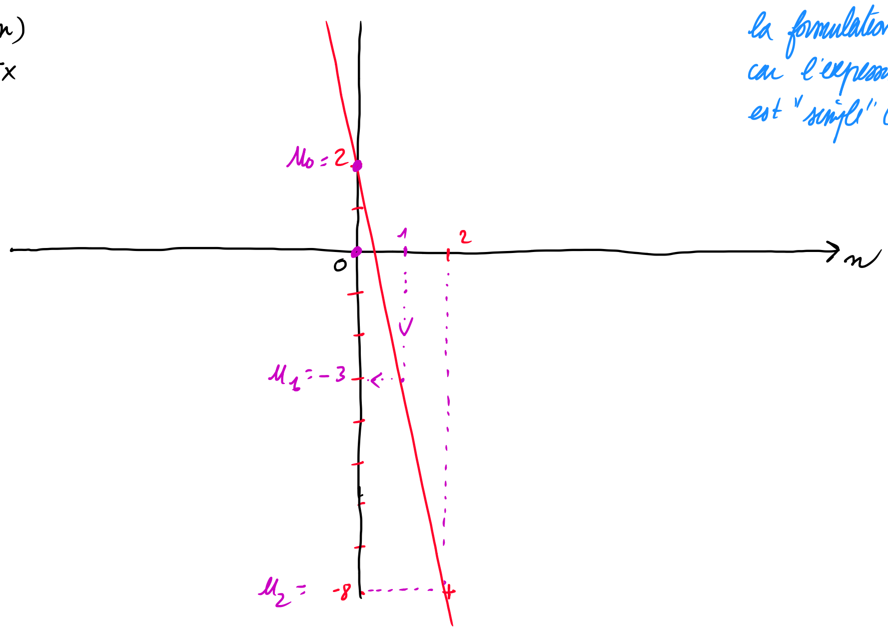
d.

$u_n = 2 - 5n = f(n)$ $\qquad \uparrow u_n$

commentaire : on utilise ici la formulation explicite

$u_n = 2 - 5n = f(n)$
où $f : x \mapsto 2 - 5x$

la formulation explicite car l'expression de f(x) est "simple" (c'est une droite)



3. $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n \\ u_0 = 3 \end{cases}$

a. On reconnaît une suite géométrique de raison -1 et de premier terme 3 géométrique de raison -1 et de premier terme 3

b. Par conséquent, la formulation explicite est donnée par :

$$u_n = 3.(-1)^n$$

Remarque : $(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

donc $u_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

c. $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 3.\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = 3.\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}$

$$= \frac{3}{2}.\left(1-(-1)^{n+1}\right)$$

$u_0 \cdot \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$

Remarque : $(-1)^{n+1} = (-1)^n.(-1)$

$= -1.(-1)^n = -(-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$a^{n+1} = a^n.a$

donc $\left(1-(-1)^{n+1}\right) = \begin{cases} 1-(-(-1)^n) = 1-(-1) = 1+1 = 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1-(-(-1))^n = 1-(1) = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

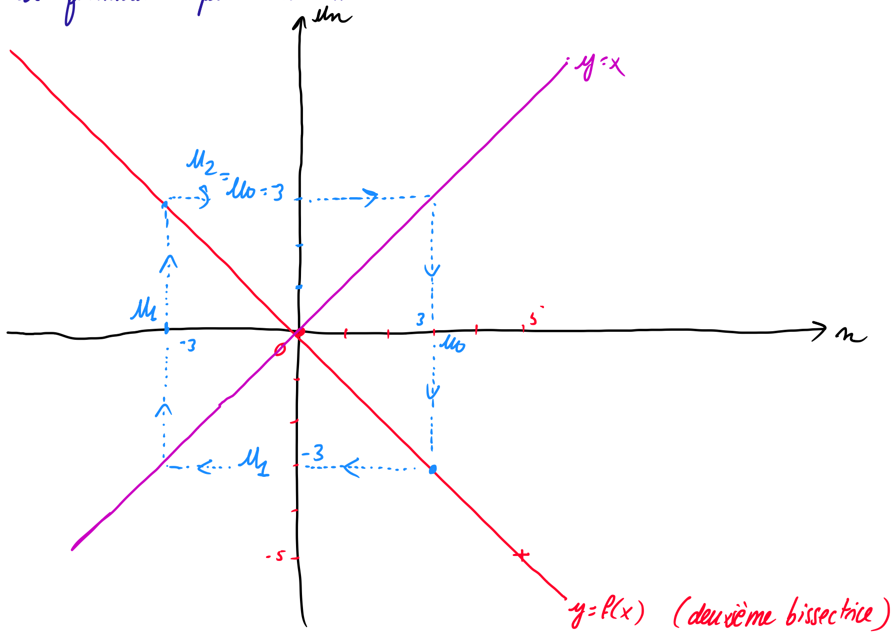
Conclusion $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{3}{2}\left(1-(-1)^{n+1}\right) = \begin{cases} \frac{3}{2} \times 2 = 3 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{3}{2} \times 0 = 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

et $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = 3$

d. On utilise la formulation par récurrence

$u_{n+1} = -u_n$
$= f(u_n)$

avec $f : x \mapsto f(x) = -x$



4. $\begin{cases} u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{2} \\ u_0 = 4 \end{cases}$

a. On reconnaît une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme 4.

b. Par conséquent la formulation explicite est donnée par

$u_n = 4 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n \qquad \left(= 4 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} \right)$ $\qquad a^{n+1} = a^n \cdot a.$

c. $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = 4 \cdot \dfrac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = 4 \cdot \dfrac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\left(\frac{-1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}}$

$= 4 \cdot \dfrac{1+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}$

$= 4 \, \dfrac{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{3/2}$ $\qquad \dfrac{a}{b/c} = a \times \dfrac{c}{b}$

$= 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

$= 4 \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

$= \frac{4}{3}\left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

donc $u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = \frac{4}{3}\left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{10}\right) = \frac{4}{3}\left(2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$ $\qquad \left((-a)^{10} = (-1 . a)^{10} = (-1)^{10} . a^{10} = 1 . a^{10} = a^{10}\right)$

$= \frac{4}{3}\left(2 + \frac{1^{10}}{2^{10}}\right)$

$= \frac{4}{3}\left(2 + \frac{1}{2^{10}}\right)$

$= \frac{4}{3}\left(\frac{2 \cdot 2^{10}}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{2^{11}+1}{2^{10}}\right)$ $\qquad 2 \times 2^{10} = 2^1 \times 2^{10} = 2^{1+10} = 2^{11}$

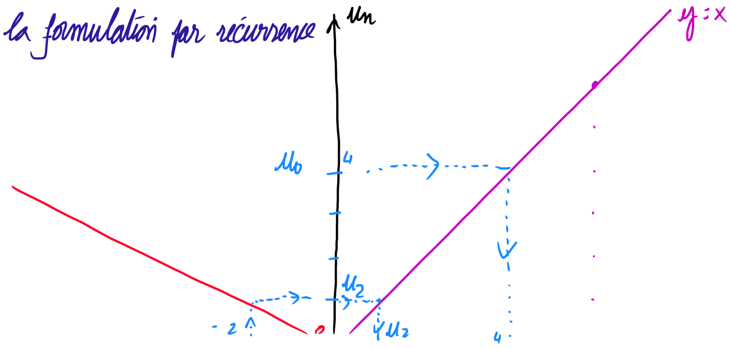
$= \frac{4}{3}\left(\frac{2048+1}{2^{10}}\right) \underset{4 = 2^2}{=} \frac{2^2}{3} \cdot \frac{2049}{2^{10}}$ $\qquad 2^{10} = 2^2 \times 2^8$

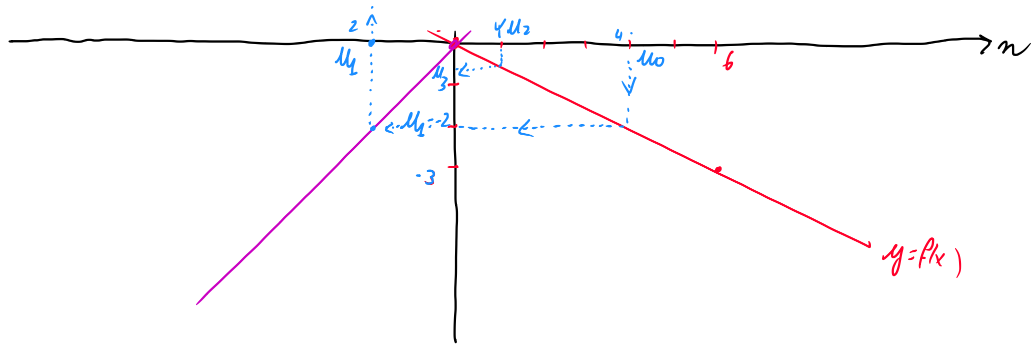
$$= \frac{\cancel{2^2} \cdot 2049}{3 \cdot \cancel{2^2} \cdot 2^8} = \frac{2049}{3 \cdot 2^8} = \frac{683}{256} \simeq 2.667\ldots$$

d. On utilise la formulation par récurrence

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot u_n$$
$$= f(u_n)$$

où $f : x \mapsto -\frac{1}{2} x$





5. $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

a. On reconnait une suite arithmético géometrique de raisons -1 et 1 et de premier terme 1

b. Retrouvons la formulation explicite:

étape $f(u_n)$ avec f

étape 1 : . $\boxed{u_{n+1} = -u_n + 1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto -x+1$

. on cherche $l \in \mathbb{R}$ t.q. $f(l) = l$ (on dit que l est un point fixe)

c'est à dire $-l + 1 = l$

$$\iff 1 = l + l = 2l$$

$$\iff \boxed{l = \frac{1}{2}} \; ^{**}$$

étape 2 • on pose $v_n = u_n - l$ donc $\boxed{u_n = v_n + l}$ **

Par conséquent
$$v_{n+1} = u_{n+1} - l$$
$$\overset{*}{=} -u_n + 1 - l$$
$$\overset{**}{=} -(v_n + l) + 1 - l$$
$$= -v_n - l + 1 - l$$
$$= -v_n - 2l + 1$$
$$= -v_n - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + 1$$
$$\boxed{v_{n+1} \overset{**}{=} -v_n}$$

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -1 et de 1er terme $v_0 = u_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

étape 3 : formulation explicite de u_n :

$u_n \overset{**}{=} v_n + l$ et $v_n = v_0 \cdot (-1)^n = \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\boxed{(-1)^n + 1} \right)$$

Remarque : $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ donc $\boxed{(-1)^n + 1} = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Donc $\boxed{u_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 2 = \boxed{1} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{2} \cdot 0 = \boxed{0} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}}$

c. $u_0 + u_1 + \dots + u_n = ?$

exercice : trouver une formule générale explicite de la somme $u_0 + \dots + u_n$ d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmetico géometrique

ici $u_0 = 1$

$u_0 + u_1 = 1 + 0 = 1$

$u_0 + u_1 + u_2 = 1 + u_2 = 2$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 2 + 0 = 2$

$u_0 + \quad + u_3 + u_4 = 3$

$+ u_5 = 3$

$u_0 + \dots + u_6 = 4$

$\dots + u_7 = 4$

$+ u_8 = 5$

$\dots + u_9 = 5$

$+ u_{10} \boxed{6}$.

d. représentation par

u_n

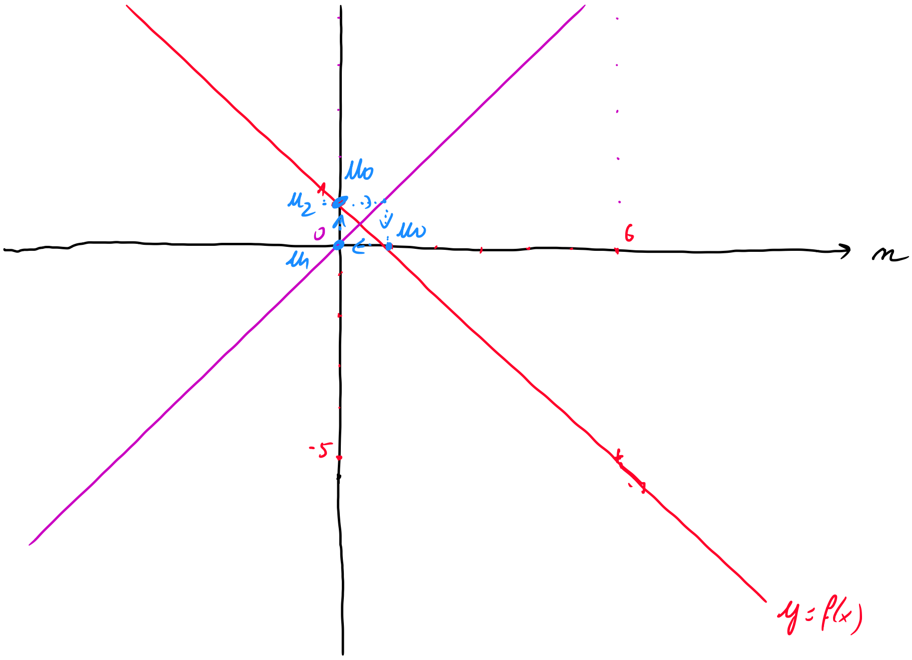
$y = x$

représentation par récurrence

$u_{n+1} = -u_n + 1$

$= f(u_n)$

où $f : x \mapsto -x+1$



20 septembre 2022

Exercice : chercher la formule de $u_0 + u_1 + .. + u_n$ quand $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une

Exercice : chercher la formule de $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ quand $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique

On considère la suite suivante $\begin{cases} u_{n+1} = r u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ et $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (r réel et $r \neq 1$)

① On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto rx + a$

chercher $l \in \mathbb{R}$, t.q. $f(l) = l$

$$f(l) = l \iff rl + a = l$$
$$\iff l(r-1) + a = 0$$
$$\iff l = \frac{-a}{r-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

② On pose $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite auxiliaire t.q. $v_n = u_n - l$

Dans ce cas là .... (faire les calculs) ... $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r

donc $v_n = v_0 \cdot r^n$

Comme $v_n = u_n - l$ on a : $\boxed{\boxed{u_n} = v_n + l} = \boxed{v_0 r^n + l}$

On peut alors en déduire $u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

$v_0 + l$

$$\boxed{u_0 = v_0 + \ell}$$
$$+ \ u_1 = v_1 + \ell$$
$$+ \ u_2 = v_2 + \ell$$
$$+ \ u_3 = v_3 + \ell$$
$$\vdots$$
$$+ \ u_n = v_n + \ell$$

somme des termes d'une suite géométrique

$$\boxed{\begin{aligned} u_0+u_1+\dots+u_n &= \underbrace{v_0+v_1+v_2+\dots+v_n}+(n+1)\ell \\ &= v_0 \cdot \frac{1-r^{n+1}}{1-r}+(n+1)\ell \end{aligned}}$$

avec $\boxed{\ell = \frac{a}{1-r}}$

Exercice ⑥ $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n+3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

a. On reconnaît une suite arithmético-géométrique de raisons -2 et 3 et de premier terme 2.

b. Calculons sa formulation explicite.

On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto -2x+3$

On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ t.q. $f(\ell) = \ell$ c'est-à-dire $-2\ell+3 = \ell$

$\Leftrightarrow 3 = 3\ell$

$\Leftrightarrow \boxed{\ell = 1}$.

Ensuite, on pose $v_n = u_n - \ell = u_n - 1$

avec $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = \boxed{1}$.

Calculons v_{n+1} : $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$

$= -2u_n + 3 - \ell$ (comme $v_n = u_n - \ell$ alors $u_n = v_n + \ell$)

$= -2(v_n + \ell) + 3 - \ell$

$= -2v_n - 2\ell + 3 - \ell$ (car $\ell = 1$)

$= -2v_n \cancel{-2} \cancel{+3} \cancel{-1}$

$= -2v_n$

Par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2

c. D'après l'exercice précédent

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} + (n+1)\ell$$

$$= 1 \cdot \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} + (n+1) \cdot 1$$

$$= \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} + (n+1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(1 - (-2) \cdot (-2)^n\right) + (n+1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + 2(-2)^n\right) + n + 1$$

$$\frac{1}{3}\left(1+2(-2)^n\right)$$

si $n=10$:

$$u_0+u_1+\dots+u_{10} = \frac{1}{3}\left(1+2(-2)^{10}\right)+10+1 \qquad \text{or } (-2)^{10} = 2^{10} = 1024.$$

$$= \frac{1}{3}(1+2048)+11$$

$$= \frac{1}{3}(2049)+11$$

$$= 683+11 = \boxed{694}$$

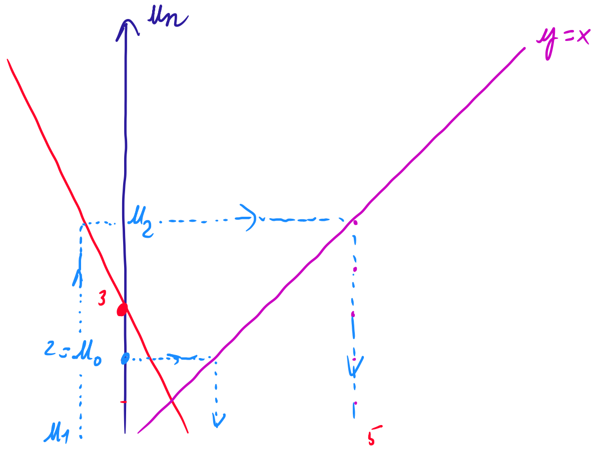
$$\begin{array}{r|l} 2049 & 3 \\ \hline -18 & 683 \\ 24 & \\ -24 & \\ 09 & \end{array}$$

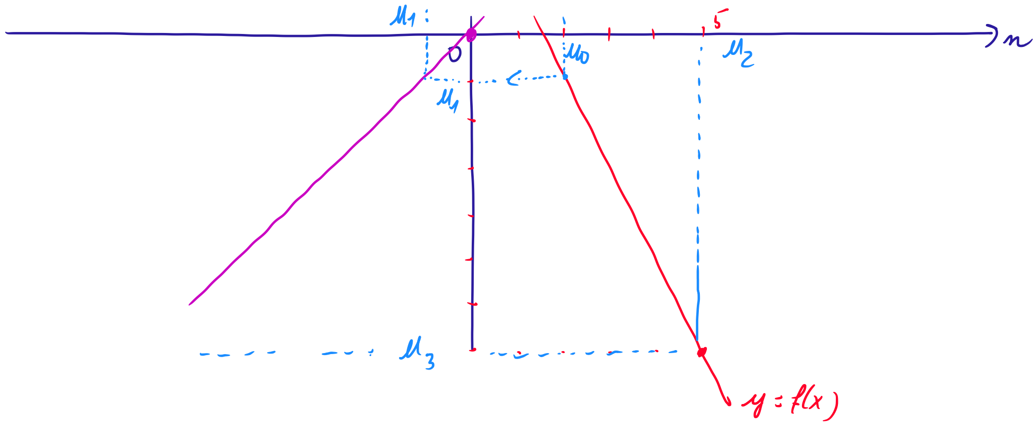
d. Représentation graphique

Rappel : $u_{n+1} = -2u_n+3$

càd $\qquad = f(u_n)$

avec $f : x \mapsto -2x+3$





Exercice :

1. a. Si on injecte $Q_0 = 1.8$ unités au temps $t = 0$

Au bout d'une heure, on perd 30% de cette quantité, donc il en reste :

70% (càd 100 − 30%) et 70% de 1.8 vaut : 0.7×1.8 $\left(\begin{array}{l} 100 \to 70 \\ 1.8 \to \frac{1.8 \times 70}{100} = 1.8 \times 0.7 \end{array} \right)$

À cette quantité restante on fait une nouvelle injection de 1.8 unités

ce qui nous donne la quantité Q_1 au bout d'une heure : $Q_1 = \underbrace{1.8}_{\text{nouvelle injection}} + \underbrace{0.7 \times 1.8}_{\text{quantité restante de la précédente}}$

Donc $\boxed{Q_1 = 3.06}$ unités

quantité restante injection de la précédente heure.

Donc $\underbrace{Q_1 = 3.06}$ unités

b. De façon analogue $Q_2 = \underbrace{1.8}_{\text{nouvelle injection}} + 0.7.\underbrace{Q_1}_{\text{quantité restante de la précédente heure}}$

$= 1.8 + 0.7 \times 3.06 = 3,942$ unités

2. De façon générale à l'heure $t = n+1$, $Q_{n+1} = \underbrace{1.8}_{\text{nouvelle injection}} + 0.7.\underbrace{Q_n}_{\text{quantité restante de l'heure précédente}}$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique.

3. $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut s'écrire sous la forme: $\{ Q_{n+1} = f(Q_n)$

$(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut s'écrire sous la forme : $\begin{cases} Q_{n+1} = f(Q_n) \\ Q_0 = 1.8 \end{cases}$

$\frac{1.8}{0.3} = \frac{18}{3} = 6$

et $f : x \mapsto 0.7x + 1.8$

Cherchons ℓ t.q. $f(\ell) = \ell$ càd $0.7\,\ell + 1.8 = \ell$

$\Leftrightarrow \quad 1.8 = \ell(1-0.7)$

$\Leftrightarrow \quad 1.8 = \ell.(0.3)$

$\Leftrightarrow \quad \ell = \frac{18}{0.3} = \boxed{6}.$

On pose $v_n = Q_n - 6$

donc $v_0 = Q_0 - 6 = 1.8 - 6 = -4.2$

et $Q_n = v_n + 6$

Donc $v_{n+1} = Q_{n+1} - 6 = (0.7Q_n + 1.8) - 6 = 0.7.(v_n + 6) + 1.8 - 6.$

$= 0.7 v_n + \underbrace{0.7 \times 6}_{4.2} + \underbrace{1.8}_{6} - 6.$

$= 0.7 v_n$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0.7 et de premier terme $v_0 = -4.2$

Donc $v_n = v_0 . (0.7)^n = -4.2 . (0.7)^n$ // $Q_n = 6(1-(0.7)^{n+1})$

et ainsi $Q_n = v_n + \ell$

$= -4.2(0.7)^n + 6.$

$= 6\left(\frac{-4.2}{6}(0.7)^n + 1\right)$

$= 6(-0.7.(0.7)^n + 1) = 6(-(0.7)^{n+1} + 1) = 6(1-(0.7)^{n+1})$

4. $Q_5 = 6(1-(0.7)^6) \approx 5.3\ldots$

5. limite ?

27 septembre 2022.

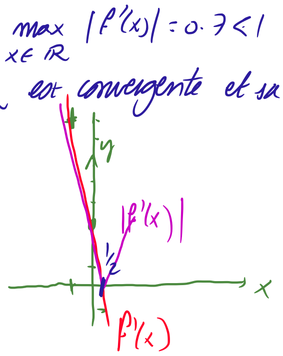
5. <u>Limite</u> : La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit $\begin{cases} P_{n+1} = f(P_n) \\ P_0 \text{ donné} \end{cases}$ où $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0.7x + 1.8 \end{matrix}$

ici $f'(x) = 0.7$ donc $|f'(x)| = 0.7$ et $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 0.7 < 1$

d'après le théorème du point fixe, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est le point fixe de f càd $\boxed{\ell = 6}$

<u>Remarque</u> : $f(x) = -3x^2 + 3x + 1$

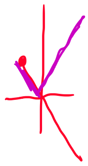
$f'(x) = -6x + 3$ $\qquad I = [-1, 1]$



$|x| = \{ x$ si $x \geq 0$

f' est décroissante

f' est décroissante
(droite de coef. directeur -6)
donc son maximum $= f'(-1) = 9$
minimum $f'(1) = -3$



$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

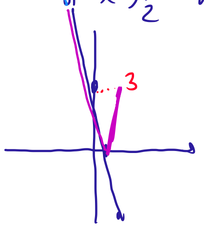
$|-5| = 5$

on a $f'(x) > 0 \iff -6x+3 > 0$
$\iff 3 > 6x$
$\iff \frac{3}{6} > x$
$\iff \boxed{x < \frac{1}{2}}$ donc dans ce cas $|f'(x)| = f'(x)$ car $f'(x) > 0$

si $x > \frac{1}{2}$ alors $f'(x) < 0$ et $|f'(x)| = -f'(x) \Rightarrow |f'(x)|$ sera $\nearrow$
car si f' est $\searrow$ et < 0
alors $|f'| \nearrow$

~~donc~~

9



donc sur $[-1, \frac{1}{2}]$ $\max_{x \in [-1, \frac{1}{2}]} |f'(x)| \underset{= f'(-1)}{=} 9$ et sur $[\frac{1}{2}, 1]$ $\max_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} |f'(x)| = f'(1) = 3$.

conclusion $\max_{x \in [-1,1]} |f'(x)| = 9$

Remarque : étudier la fonction f pour appliquer le théorème du point fixe peut s'avérer fastidieux : il faut montrer que

① f continue sur I

② I est stable par f (c.à.d $f(I) \subset I$ ou encore pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$)

③ $\max_{x \in I} |f'(x)| < 1$

Il existe heureusement un résultat plus facile à appliquer ; c'est le théorème suivant :

Théorème des points fixes attractifs et répulsifs

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ avec $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I

avec f dérivable sur I (c.à.d f' existe sur I, mais aussi f'' et f''' sur I)
dérivée seconde, dérivée troisième

Si on arrive à calculer un point fixe de ℓ (on trouve sa valeur)

alors ① si $\boxed{|f'(\ell)| < 1}$ alors ℓ est attractif c'est à dire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ

valeur absolue !

② si $\boxed{|f'(\ell)| > 1}$ alors ℓ est répulsif, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge (s'éloigne de ℓ)

③ si $\boxed{f'(\ell) = 1}$ on doit aller plus loin : on calcule $f''(\ell)$ $\left(f''(x) \xrightarrow{\text{remplacer } x \text{ par } \ell} f''(\ell)\right)$

ⓐ si $f''(\ell) \neq 0$ alors ℓ est répulsif

ⓑ si $f''(\ell) = 0$ alors il faut aller plus loin : et calculer $f'''(x)$

$\ell) = 0$ alors il faut aller plus loin : et calculer $f'''(x)$

(i) si $f'''(\ell) > 0$ alors ℓ est répulsif

(ii) si $f'''(\ell) < 0$ alors ℓ est attractif

(4) si $\boxed{f'(\ell) = -1}$ on calcule $-2f'''(\ell) - 3(f''(\ell))^2$ < 0 : alors ℓ attractif

> 0 : " ℓ répulsif

Exercice : Est-ce que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \\ u_0 = 1 \end{cases}$ est convergente en $+\infty$?

$\{ u_0 = 1$

a. On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$

est-ce que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ? alternée ? si elle est monotone, est-elle croissante ou décroissante ?

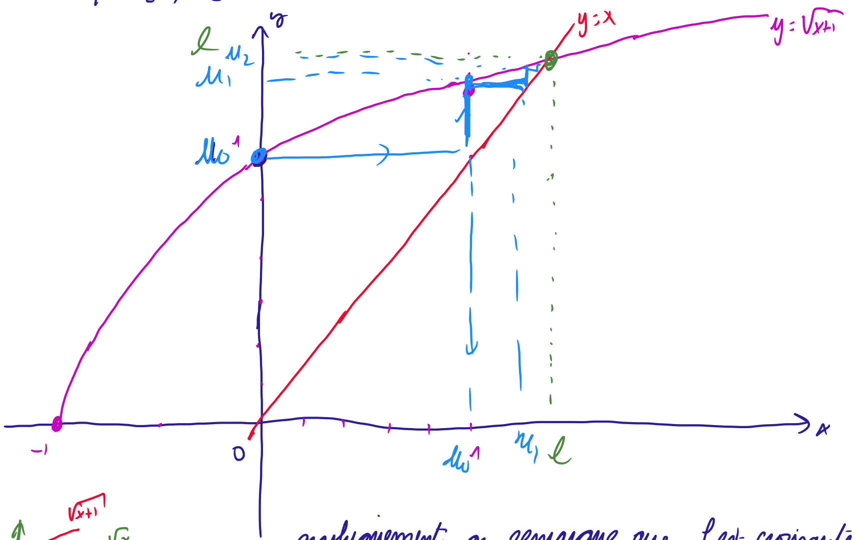
Attention : $\sqrt{x+1}$ existe si et seulement si $x+1 \geq 0$ c'est à dire si $\boxed{x \geq -1}$

donc $D_f = [-1, +\infty[$

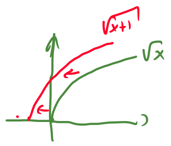
$f(-1) = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0$

$f(0) = \sqrt{1} = 1$

$f(1) = \sqrt{2}$



Remarque :



graphiquement : on remarque que f est croissante

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. De plus $u_1 = \sqrt{u_0+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 1 = u_0$

donc $\boxed{u_1 > u_0} \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

la suite sera "en escalier" et elle a l'air de converger vers le point.

Par le calcul : on a $f(x) = \sqrt{x+1}$ pour $x \geq -1$

donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ attention ici $x > -1$

Rappel : quand $f(x) = \sqrt{u(x)}$

$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

ici $u(x) = x+1$

$u'(x) = 1$

Pour $x > -1$ $f'(x) = \frac{1}{\underbrace{2}_{>0}\underbrace{\sqrt{x+1}}_{>0}}$ $1 > 0$ > 0 donc f est croissante

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et comme $u_0 = 1 < u_1 = \sqrt{2}$

elle croissante

b. Calculons le point fixe :

le point fixe ℓ doit etre ≥ -1 et verifie $f(\ell) = \ell$

càd $\sqrt{\ell+1} = \ell$ $\Rightarrow$ ℓ doit etre ≥ 0

on eleve au carré : $\boxed{\ell+1 = \ell^2}$

donc ℓ est solution $\ell^2 - \ell - 1 = 0$

ici $a = 1$ donc $\Delta = 1 - 4(-1) = 1 + 4 = 5 > 0$

$b = -1$

$c = -1$

il y a donc 2 solutions possibles

$\ell_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Rappel : de la forme $ax^2+bx+c = 0$

on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

si $\Delta < 0$ PAS DE SOLUTION

si $\Delta = 0$ UNE SOLUTION $x_1 = \frac{-b}{2a}$

si $\Delta > 0$ 2 SOLUTIONS $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\ell_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

pas possible car ℓ doit être ≥ 0 ← ≤ 0 ($\simeq -0{,}618$ $\simeq 1{,}618\ldots$

~~comme u_0 est croissante on choisit $\ell_2 = 1{,}618\ldots$~~

Cherchons si ℓ_2 est attractif ou répulsif:

$\ell+1=\ell^2$

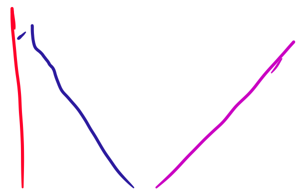
on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ donc $f'(\ell_2) = \frac{1}{2\sqrt{1+\ell_2}} = \frac{1}{2\sqrt{\ell_2^2}} = \frac{1}{2\ell_2} = \frac{1}{\underbrace{2\times 1{,}618\ldots}_{\simeq 3{,}2}} < 1$

donc $|f'(\ell_2)| = f'(\ell_2) < 1$ donc d'après le théorème précédent ℓ_2 est attractif

et donc: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\underline{\underline{\ell_2}}$!! $\ell_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

exercice:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{u_n} \\ u_0 = \cancel{1}\ 2 \end{cases}$$



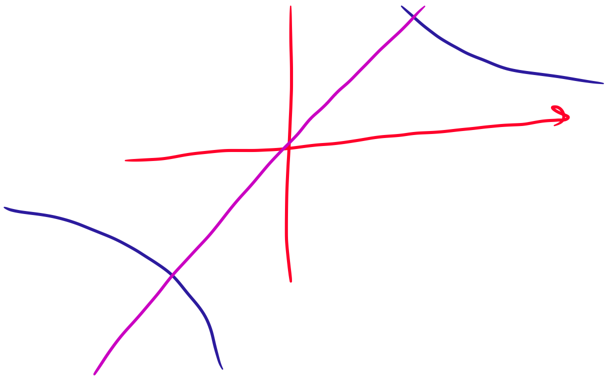
$f(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad f'(1) = -1$

$f(\ell) = \ell$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\ell} = \ell$

$\Leftrightarrow 1 = \ell^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = 1 \\ \text{ou} \\ \ell = -1 \end{cases} \xrightarrow{x>0} \boxed{\ell = 1}$



4 octobre 2022 Corrigé de l'examen de decembre 2021

Ex. 2

$f : x \mapsto \frac{x+2}{x-5} + 1$

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} ; x-5 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} ; x \neq 5\} = \mathbb{R} \setminus \{5\} =]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$

2. f est continue sur D_f comme quotient et somme de fonctions continues: $x \mapsto x+2$, $x \mapsto x-5$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc sur D_f.

3. Soit $x \in [0,1]$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $u : x+2$

3. Soit $x \in [0,1]$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad v = x-5$ $\quad u' = 1$ $\quad v' = 1$

a. $f'(x) = \frac{(x-5)-(x+2)}{(x-5)^2} + 0$

$= \frac{\cancel{x}-5-\cancel{x}-2}{(x-5)^2} = \frac{-7}{(x-5)^2}$

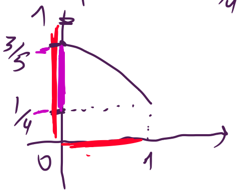
b. Pour tout $x \in [0,1]$ $f'(x) = \frac{\overbrace{-7}^{-7<0}}{\underbrace{(x-5)^2}_{>0}} < 0$

Par conséquent f est strictement decroissante sur $[0,1]$.

c. $f(0) = \frac{+2}{-5} + 1 = -\frac{2}{5} + \frac{5}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$

$f(1) = \frac{1+2}{1-5} + 1 = \frac{3}{-4} + 1 = -\frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

x	0		1
variations de f	$\frac{3}{5}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$



Pour tout $x \in [0,1]$, f est $\downarrow$ et $f(0) = \frac{3}{5} < 1$

et $f(1) = \frac{1}{4} > 0$

donc $f(x) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{5}\right] \subset [0,1]$

conclusion si $I = [0,1]$, $f(I) \subset I$ donc $I = [0,1]$ est stable par f

$(u^2)' = 2u.u'$

d. Soit $x \in [0,1]$, $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$ calculons $f''(x)$:

$f''(x) = \frac{7 \times 2(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{14.(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{14.\cancel{(x-5)}}{(x-5)^3.\cancel{(x-5)}} = \frac{14}{(x-5)^3}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$u = -7$ donc $u' = 0$

$v = (x-5)^2$ $\quad v' = 2(x-5)$

e. Pour tout $x \in [0,1]$, $f''(x) = \frac{\overbrace{14}^{>0}}{(x-5)^3}$, donc le signe de $f''(x)$ depend du signe de $x-5$: si $x-5>0$ alors $x>5 \Rightarrow f''(x)>0$

si $x-5<0$ alors $x<5 \Rightarrow f''(x)<0$

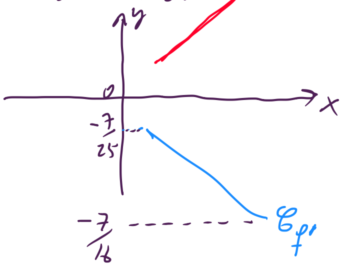
J'ai $x \in [0,1]$ càd $x<5$ donc $f''(x)<0 \Rightarrow f'$ est decroissante.

f. $f'(0) = \frac{-7}{25}$

$f'(1) = \frac{-7}{16}$

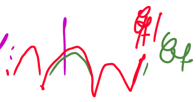
x	0		1
variations de f'	$-7/25$	$\searrow$	$\frac{-7}{16}$

pas f, mais f'

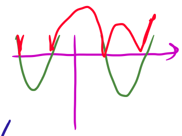


Comme $f'(x) < 0$ sur $[0,1]$ et $\downarrow$

Rappel:



Comme $f'(x) < 0$ sur $[0,1]$ et $\searrow$



alors $|f'(x)| = -f'(x)$ sur $[0,1]$ et $\nearrow$ et son $\max\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(1)|$
$= \frac{7}{16} < 1$

Par conséquent f est strictement contractante sur $[0,1]$.

3. Toutes questions précédentes vérifient les hypothèses du théorème du point fixe

à savoir ① f continue sur $[0,1]$

② $[0,1]$ stable par f

③ f strictement contractante sur $[0,1]$

alors il existe un unique point fixe de f sur $[0,1]$.

4. $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) = \dfrac{x_n+2}{x_n-5} + 1 \\ x_0 \text{ donné sur } [0,1] \end{cases}$

a. Comme $[0,1]$ est stable par f et que $x_{n+1} = f(x_n)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x_0 \in [0,1]$, $x_n \in [0,1]$ donc $x_n \neq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b. D'après le 3) on peut appliquer le théorème du point fixe à la suite, on a la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ, point fixe de f dans $[0,1]$

c. ℓ vérifie : $\ell \in [0,1]$ et $f(\ell) = \ell$ or $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \dfrac{\ell+2}{\ell-5} + 1 = \ell$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ell+2}{\ell-5} = \ell - 1$

$\Leftrightarrow \ell + 2 = (\ell-1)(\ell-5)$

$\Leftrightarrow \ell + 2 = \ell^2 - 6\ell + 5$

$\Leftrightarrow \ell^2 - 7\ell + 3 =$

$\Delta = (-7)^2 - 4.3$
$= 49 - 12 = 37$

on a 2 solutions $\ell_1 = \dfrac{7-\sqrt{37}}{2} \simeq \frac{1}{2} \in [0,1]$

$\sqrt{37} \simeq \sqrt{36} = 6$

$\ell_2 = \dfrac{7+\sqrt{37}}{2} \simeq \frac{13}{2} \notin [0,1]$

donc $\ell = \ell_1 = \dfrac{7-\sqrt{37}}{2}$

d. En utilisant le dernier théorème du cours, on calculerait $|f'(\ell)|$

si c'est $< 1 \Rightarrow \ell$ est attractif.

e. Comme f est décroissante sur $[0,1]$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée.