15 septembre 2022

4. $\begin{cases} u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{2} \\ u_0 = 4. \end{cases}$

a. On reconnaît une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de 1er terme 4.

b Par conséquent sa formulation explicite est donnée par

$u_n = 4 . \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad , n \in \mathbb{N}.$

$-5^2 \neq (-5)^2$

$-5 \times 5 \neq (-5)(-5) = 25$

$-25 \neq 25$

$a . a^n = a^{n+1}$

c. $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 4 . \dfrac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)}$

$= 4 \dfrac{1-\left(\frac{-1}{2}\right) . \left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}} \longrightarrow 1+\frac{1}{2} = \frac{2}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$= 4 . \dfrac{1+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}$

$= 4 . \frac{2}{3} . \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

$= \frac{4 \times 2}{3} . \left(\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

$= \frac{4 \times \cancel{2}}{3} . \frac{1}{\cancel{2}}\left(2+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

$= \frac{4}{3}\left(2+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

pour $n = 10$

pour $n=10$

$$u_0+u_1+\dots+u_{10} = \frac{4}{3}\left(2+\left(\frac{-1}{2}\right)^{10}\right) = \frac{4}{3}\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1^{10}}{2^{10}} = \frac{1}{2^{10}}$$

$$= \frac{4}{3}\left(2+\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{2.2^{10}}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{2^{11}+1}{2^{10}}\right)$$

$$= \frac{\cancel{4}2^2}{3}\left(\frac{2^{11}+1}{\cancel{2^2}\cdot 2^8}\right)$$

$$= \frac{2^{11}+1}{3\times 2^8} = \frac{2049}{3\times 256} = \frac{683}{256} \simeq 2.67..$$

d. Représentation graphique

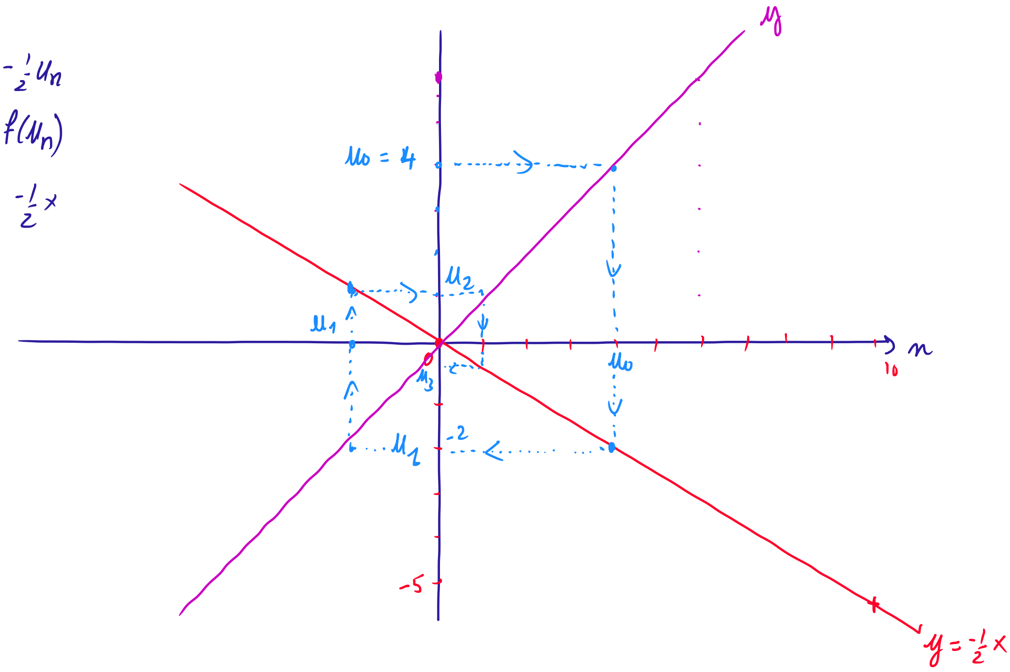
u_n

$y=x$

$u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n$

$= f(u_n)$

où $f : x \mapsto -\frac{1}{2} x$



5. $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

a. On reconnait une suite arithmetico geometrique de raisons -1 et 1 et de premier terme 1

b. Formulation explicite

étape 1 : $u_{n+1} = -u_n + 1$ (*) peut s'écrire sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$
avec $f : x \mapsto -x + 1$.

On cherche alors un réel ℓ t.q. $f(\ell) = \ell$ on dit que ℓ est un point fixe
on résout pour ça $\ell = -\ell + 1$

$\Leftrightarrow 2\ell = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{\ell = \frac{1}{2}}$

étape 2 On pose $v_n = u_n - \ell$ (*) avec $\boxed{v_0} = u_0 - \ell = 1 - \ell = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

donc $u_n = v_n + \ell$

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &\underset{(*)}{=} u_{n+1} - \ell \\
&= (-u_n + 1) - \ell \\
&\underset{(*)}{=} -u_n + 1 - \ell \\
&\underset{(*)}{=} -(v_n + \ell) + 1 - \ell = -v_n - \ell + 1 - \ell \\
&= -v_n - 2\ell + 1 = -v_n - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + 1 \\
v_{n+1} &= \boxed{-v_n}
\end{aligned}
$$

étape 3 : Donc a une formulation explicite de v_n :

$v_n = \frac{1}{2}(-1)^n$

or $u_n = v_n + \ell = \frac{1}{2}(-1)^n + \ell = \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}$

$\boxed{u_n = \frac{1}{2}\left((-1)^n + 1\right)}$ que vaut $(-1)^n + 1 = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (2) = 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

c. $u_0 + u_1 + \dots + u_n = ?$

exercice : trouver une formule générale de $u_0 + \dots + u_n$

avec $\begin{cases} u_{n+1} = -r u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

$u_0 = 1$

$u_0 + u_1 = 1 + 0 = 1$

$u_0 + u_1 + u_2 = 1 + 0 + 1 = 2$

$u_0 + \text{''} \quad \text{''} + u_3 = 2$

$\text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} + u_4 = 3$

$\text{''} \quad \text{''} \quad + u_5 = 3$

$+u_6 = 4$

$+u_7 = 4$

$+u_8 = 5$

$u_0 +$ $+u_9 = 5$

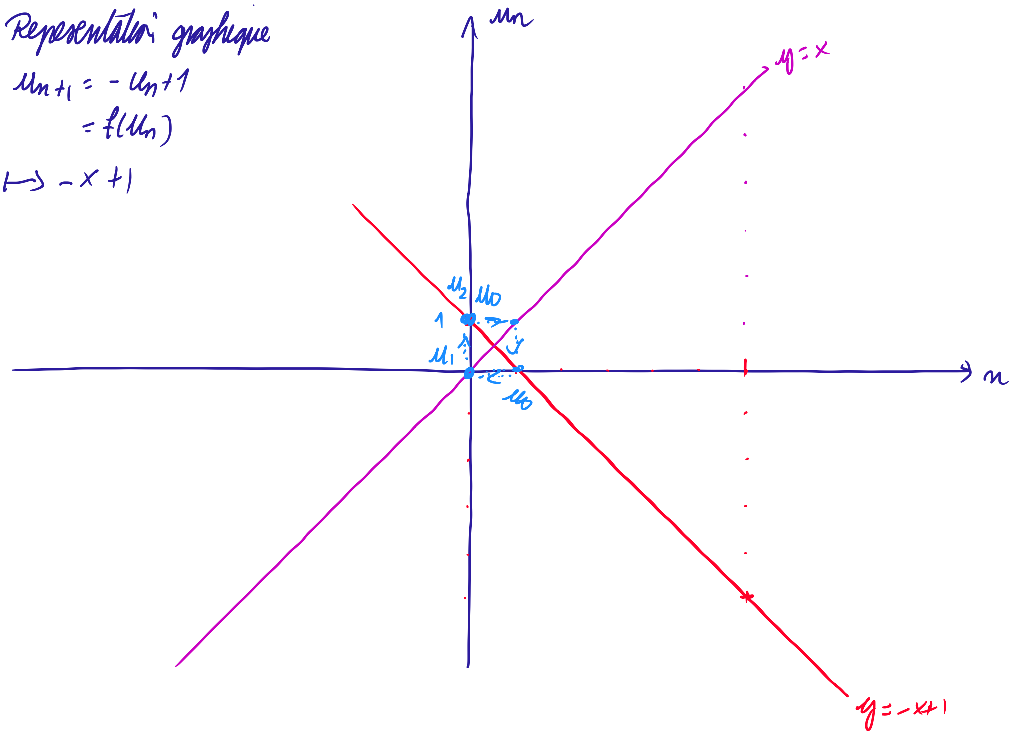
$u_0 +$ . . . $+u_{10} = \boxed{6}$

d. Représentation graphique

on a : $u_{n+1} = -u_n + 1$

$= f(u_n)$

où $f : x \longmapsto -x + 1$



$y =$

6. $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

a. On reconnait une suite arithmético géométrique de raisons -2 et 3 et de 1er terme 2

b. <u>Formulation explicite</u>

<u>Etape 1</u> : On a $u_{n+1} = -2u_n + 3$

On pose alors $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto -2x + 3$

et on cherche $l \in \mathbb{R}$ t.q. $f(l) = l$ càd $-2l + 3 = l$

et on cherche $\ell \in \mathbb{R}$ t.q. $f(\ell)=\ell$ càd $-2\ell+3=\ell$

or $-2\ell+3=\ell \iff 3=3\ell$

$\iff \boxed{1=\ell}$

Etape 2 : On introduit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = u_n - \ell \iff u_n = v_n + \ell$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= -2u_n + 3 - \ell \\ &= -2(v_n+\ell)+3-\ell \\ &= -2v_n - 2\ell + 3 - \ell \\ &= -2v_n - 3\ell + 3 \underset{\ell=1}{=} -2v_n \cancel{-3}\cancel{+3} = -2v_n \end{aligned}$$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = u_0 - \ell = 2-1 = \boxed{1}$.

Etape 3 Par conséquent $v_n = 1.(-2)^n$

Mais comme $u_n = v_n + \ell$ on a $u_n = (-2)^n + 1$

c. $u_0 = 2$

$u_1 = -2+1 = -1$ donc $u_0 + u_1 = 1$

$u_2 = (-2)^2+1 = 5$ " " $+ u_2 = 6$

$u_3 = (-2)^3+1 = -8+1 = -7$ ... $+u_3 = -1$

$u_4 = (-2)^4+1 = 16+1 = 17$ .. $+u_4 = 16$

$u_5 = (-2)^5+1 = -32+1 = -31$ .... $+ u_5 = -15$

$u_6 = (-2)^6+1 = 64+1 = 65$ $+u_6 = 50$

$u_7 = (-2)^7+1 = -128+1 = -127$ $+ u_7 = -77$

$u_8 = (-2)^8+1 = 256+1 = 257$ $+u_8 = 180$

$u_9 = (-2)^9+1 = -512+1 = -511$ $+u_9 = -331$

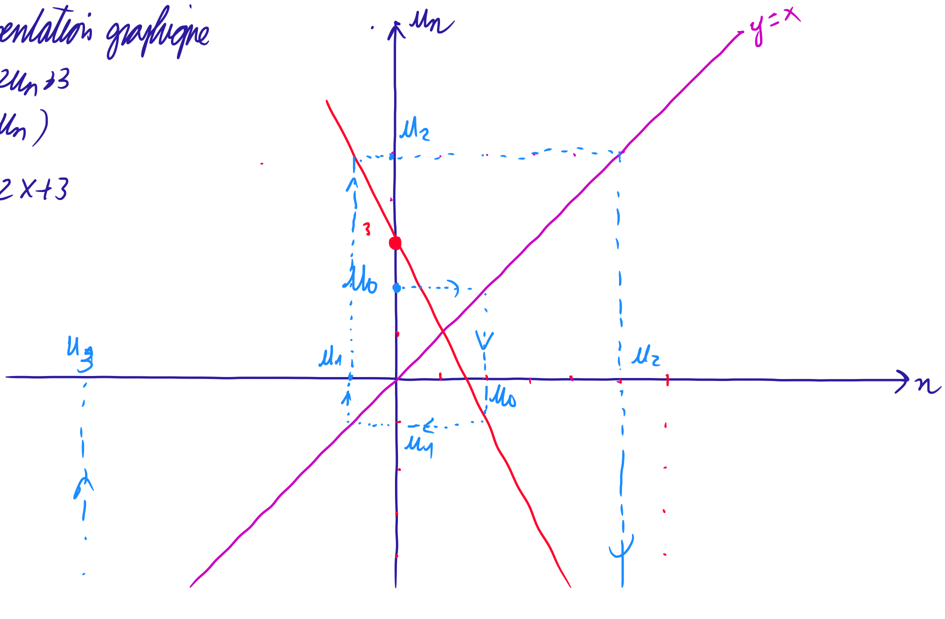
$u_{10} = (-2)^{10}+1 = 1024+1 = 1025$ $+u_{10} = 694$

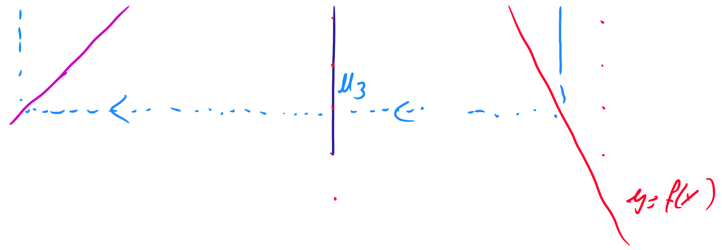
d. Représentation graphique

$u_{n+1} = -2u_n + 3$

càd $u_{n+1} = f(u_n)$

où $f : x \mapsto -2x+3$




u_3
$y = f(x)$

22 septembre 2022.

<u>Question</u> : que vaut $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ quand $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmetico-geometrique ?

Autrement $\begin{cases} u_{n+1} = r u_n + a & (r \neq 1) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

<u>Rappel</u> : pour trouver sa formulation explicite on pose $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto rx + a$

et on cherche l t.q. $l = f(l)$

on trouve $l = rl + a$

$\Leftrightarrow l(1-r) = a$

$\Leftrightarrow l = \frac{a}{1-r} \quad (r \neq 1)$

Ensuite on pose $v_n = u_n - l$ càd $u_n = v_n + l$

après calculs... (à faire)

on a $v_{n+1} = r v_n$ avec $v_0 = u_0 - l$

c'est une suite geometrique de raison r et de premier terme v_0

que l'on note $v_n = v_0 r^n$ donc $u_n = v_0 . r^n + l$

$$
\begin{aligned}
& u_0 = v_0 + l \\
+ \; & u_1 = v_0 . r + l \\
+ \; & u_2 = v_0 r^2 + l \\
+ \; & u_3 = v_0 r^3 + l \\
& \vdots \\
+ \; & u_n = v_0 r^n + l
\end{aligned}
$$

$u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 . \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} + (n+1) l$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (u_0 - \ell)\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + (n+1)\ell$$

Dans ⑥ on a $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

Que vaut $u_0 + u_1 + \dots + u_n$? Que vaut $u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$?

Ici, $\ell = 1 \quad u_0 = 2 \quad r = -2$

Donc $u_0 + \dots + u_n = (2-1) \cdot \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} + (n+1) \cdot 1$

$$= \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} + (n+1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - (-2)^{n+1}\right) + (n+1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - (-2)(-2)^n\right) + (n+1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + 2(-2)^n\right) + (n+1)$$

$$u_0 + \dots + u_{10} = \frac{1}{3}\left(1 + 2(-2)^{10}\right) + (10+1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + 2 \cdot 2^{10}\right) + 11$$

$$= \frac{1}{3}(1 + 2048) + 11$$

$$= \frac{2049}{3} + 11$$

$$= 683 + 11 = \boxed{694}$$

$$\begin{array}{r|l} 2049 & 3 \\ \hline -18 & 683 \\ 24 & \\ -24 & \\ 09 & \end{array}$$

Exercice 2.

1.a. Au bout d'une heure on injecte 1.8 unités, au patient dont il reste 100-30 % de substance de l'injection précédente, soit 0.7×1.8 $\left(\begin{array}{l} 100 \to 70 \\ 1.8 \to \frac{70 \times 1.8}{100} = 0.7 \times 1.8 \end{array} \right)$

Par conséquent

$$\underbrace{Q_1}_{\text{quantité du médicament au bout d'1 heure}} = \underbrace{1.8}_{\text{nouvelle injection}} + \underbrace{(0.7 \times 1.8)}_{\text{quantité restante dans le corps après une heure}}$$

$Q_1 = 3.06$

b. Après 2 heures, on rajoute 1.8 unités au 70% restants de Q_1 :

donc $Q_2 = 1.8 + 0.7 Q_1$

$= 1.8 + 0.7 \times 3.06 = 3,942$

2. Exprimer Q_{n+1} en fonction de Q_n (au bout de n+1 heures)

2. Exprimer Q_{n+1} en fonction de Q_n (au bout de n+1 heure)

D'après ce qui précède, pour trouver Q_{n+1}, on ajoute 1.8 à $0.7 \cdot Q_n$ (quantité précédente) ce qui donne

$Q_{n+1} = 0.7 Q_n + 1.8$ on reconnaît une suite arithmético-géométrique

3. Formulation explicite de $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

On pose $Q_{n+1} = f(Q_n)$ avec $f : x \mapsto 0.7x + 1.8$

On cherche ℓ t.q. $f(\ell) = \ell$

c.à.d $0.7\ell + 1.8 = \ell$

$\Leftrightarrow 1.8 = \ell(1-0.7) = 0.3\ell$

$\Leftrightarrow \ell = \frac{1.8}{0.3} = \frac{18}{3} = \boxed{6}$

On pose $v_n = Q_n - 6$ donc $Q_n = v_n + \ell$

$v_0 = Q_0 - \ell = 1.8 - 6 = -4.2$

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= Q_{n+1} - 6 \\
&= 0.7 \cdot Q_n + 1.8 - 6 \\
&= 0.7 \cdot (v_n + 6) + 1.8 - 6 \\
&= 0.7 \cdot v_n + \underbrace{4.2 + 1.8}_{6} - 6 \\
&= 0.7 v_n \qquad \underbrace{6 - 6}_{=0}
\end{aligned}
$$

donc $v_n = v_0 \cdot (0.7)^n = -4.2(0.7)^n$

Par conséquent $Q_n = v_n + 6 = -4.2(0.7)^n + 6$

$$
\begin{aligned}
Q_n &= 6\left(-\frac{4.2}{6}(0.7)^n + 1\right) \\
&= 6\left(-0.7(0.7)^n + 1\right) \\
&= 6\left(-(0.7)^{n+1} + 1\right)
\end{aligned}
$$

$Q_n = 6\left(1 - (0.7)^{n+1}\right)$

$Q_5 = 6\left(1 - (0.7)^6\right) \simeq 5.3$

$f(x) = 0.7x + 1.8$

$f'(x) = 0.7$

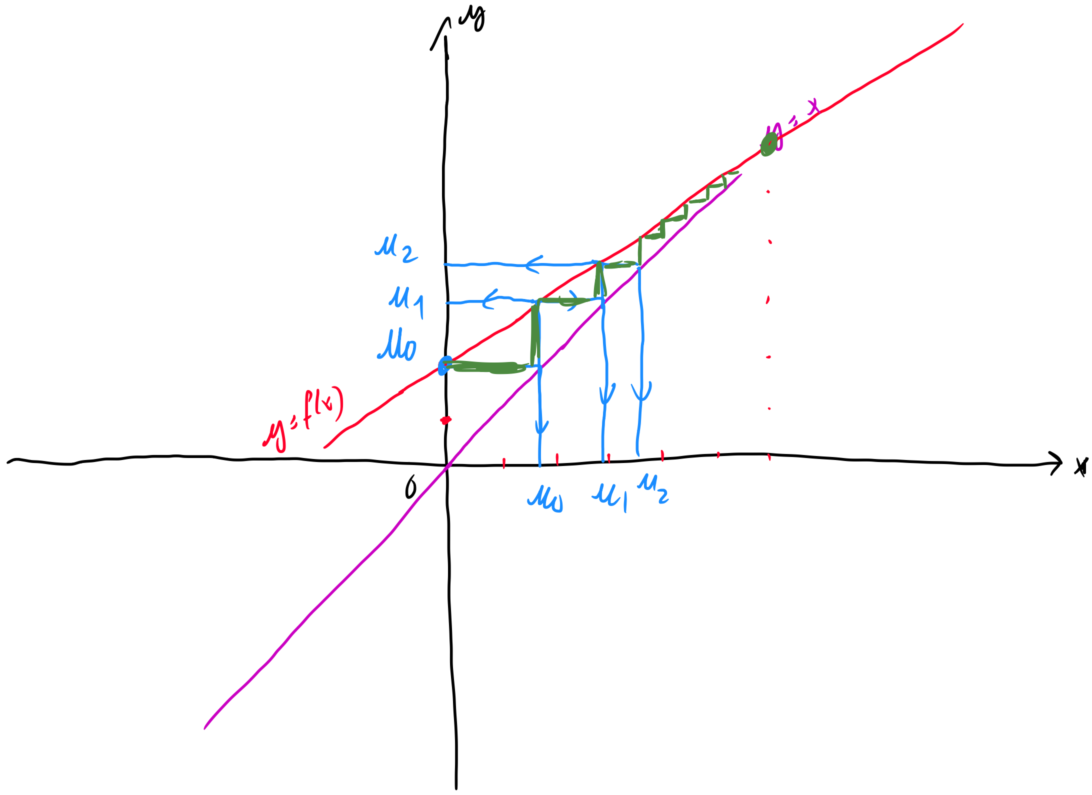
5°). Comme $\max |f'(x)| = 0.7 < 1$

5°). Comme $\max_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| = 0{,}7 < 1$

donc $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ (le point fixe)

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\varphi_{n+1}} & = f & (\varphi_n) \\ \downarrow n \to +\infty & \downarrow & \downarrow n \to +\infty \\ \ell & = f & (\ell) \end{array}$$

elle converge vers 6.



y
x
0
y = x
y = f(x)
u_0
u_1
u_2

29 septembre 2022

<u>Remarque</u> : le théorème du point fixe est très efficace mais il demande pour une suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

$f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$

de vérifier 3 points importants

facile ✓ ① que f soit continue

plus dur ✓ ② que I est stable par f (càd que $f(I) \subset I$ ou encore pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$)

plus dur ✓ ③ que $\max\limits_{x \in I} |f'(x)| < 1$ (f est strictement contractante)

Question : est-il possible de montrer que suite formulée par récurrence converge ou diverge "plus facilement"

oui grâce au théorème suivant :

Théorème des points fixes attractifs et répulsifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ où $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I ($I \subset \mathbb{R}$)

On suppose que (a) f est dérivable sur I

(b) l'on a calculé les valeurs des points fixes (s'ils existent) càd les réels ℓ t.q. $f(\ell) = \ell$

alors on calcule $\boxed{f'(\ell)}$ et :

valeur absolue →

1. si $|f'(\ell)| < 1$ on dit que ℓ est attractif (càd que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ)

valeur absolue →

2. si $|f'(\ell)| > 1$ on dit que ℓ est répulsif (" " diverge (s'éloigne de ℓ))

PAS val. absolue →

3. si $f'(\ell) = 1$ alors on calcule $\boxed{f''(\ell)}$

et alors (a) si $f''(\ell) \neq 0$ alors ℓ est répulsif

(b) si $f''(\ell) = 0$ alors (i) si $f'''(\ell) > 0$ ℓ est répulsif

(ii) si $f'''(\ell) < 0$ ℓ est attractif

4. si $f'(\ell) = -1$ on calcule $-2f'''(\ell) - 3(f''(\ell))^2$ < 0 alors ℓ est attractif

> 0 alors ℓ est répulsif

Exercice :

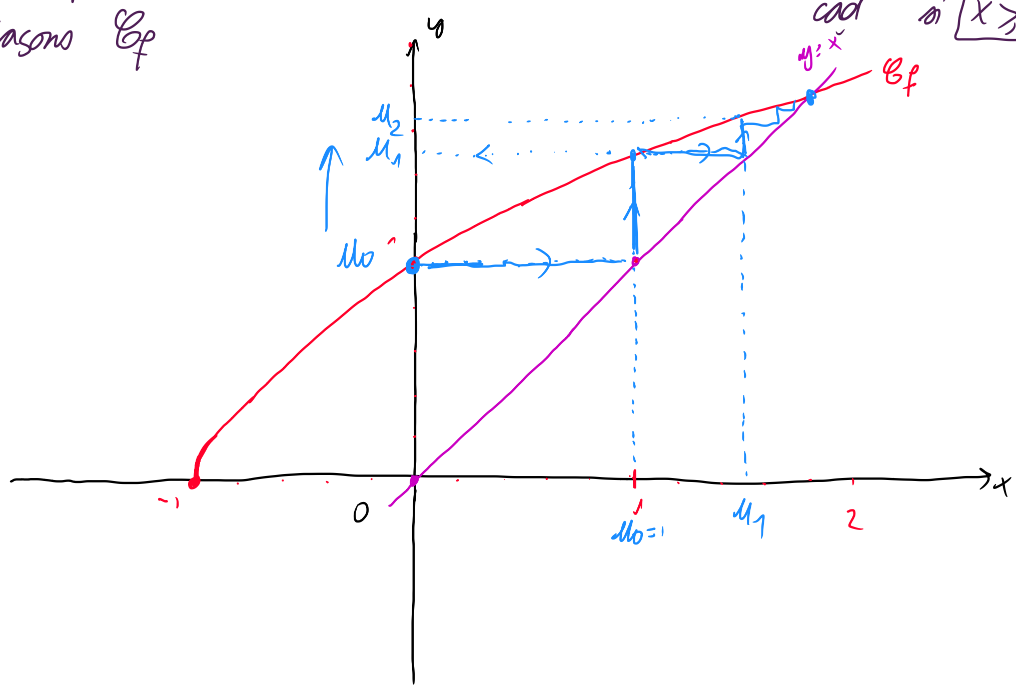
① On considère $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

a. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? alternée ? si elle est monotone est-elle croissante ou décroissante ?

b. Converge-t-elle ? si oui vers quoi ?

a. On pose $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ attention $\sqrt{x+1}$ existe si et seulement si $x+1 \geqslant 0$
càd si $\boxed{x \geqslant -1}$

Traçons $\mathcal{C}_f$



graphiquement : f a l'air croissante donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone

De +, $u_1 = \sqrt{u_0+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 1 = u_0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

et comme f est croissante, la représentation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera en "escalier"

Montrons mathematiquement que f est croissante

on pour tout $x \geq -1$ $\quad f(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad \sqrt{u(x)}$ $\quad$ Rappel : $f(x) = \sqrt{u(x)}$

si $x > -1$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $\quad u(x) = x+1$, $u'(x) = 1$ $\quad$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

ici $\dfrac{1}{\underbrace{2}_{>0}\underbrace{\sqrt{x+1}}_{>0}} > 0$ pour tout $x > -1$ donc f est croissante sur $[-1, +\infty[$

et comme $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2}$, $u_1 > u_0$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc monotone croissante

b. Pour savoir si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou pas, on applique le théorème précédent

On a f continue sur $[-1,+\infty[$ (fonction classique)

f dérivable sur $]-1,+\infty[$ (car $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ existe sur $]-1,+\infty[$)

Est-ce que f possède un point fixe ?

C'est à dire existe-t-il $\ell \in \mathbb{R}$ t.q. $f(\ell)=\ell$?

Calculons ce ℓ : $\ell = f(\ell)$

$(\ell \geq -1)$

$\Leftrightarrow \ell = \underbrace{\sqrt{\ell+1}}_{\geq 0}$ (donc ℓ doit être ≥ 0)

$\Leftrightarrow \boxed{\ell^2 = \ell+1}$ (on élève chaque membre au carré)

$\Leftrightarrow \underset{a}{\ell^2} \underset{b}{-\ell} \underset{c}{-1} = 0$

$ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2-4ac$

si $\Delta<0$ pas de solution

si $\Delta=0$ 1 solution $x_1=\frac{-b}{2a}$

si $\Delta>0$ 2 solutions $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

ici $a=1$
$b=-1$
$c=-1$

$\Delta = 1-4.1.(-1)$
$=1+4=5>0$

donc on a 2 solutions

$\ell_1 = \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{<0}$ et $\ell_2 = \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{>0}$

comme $\ell \geq 0$ la seule solution possible est $\boxed{\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \ell_2$

positive $\qquad \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \qquad 2$

Calculons maintenant $f'(\ell)$:

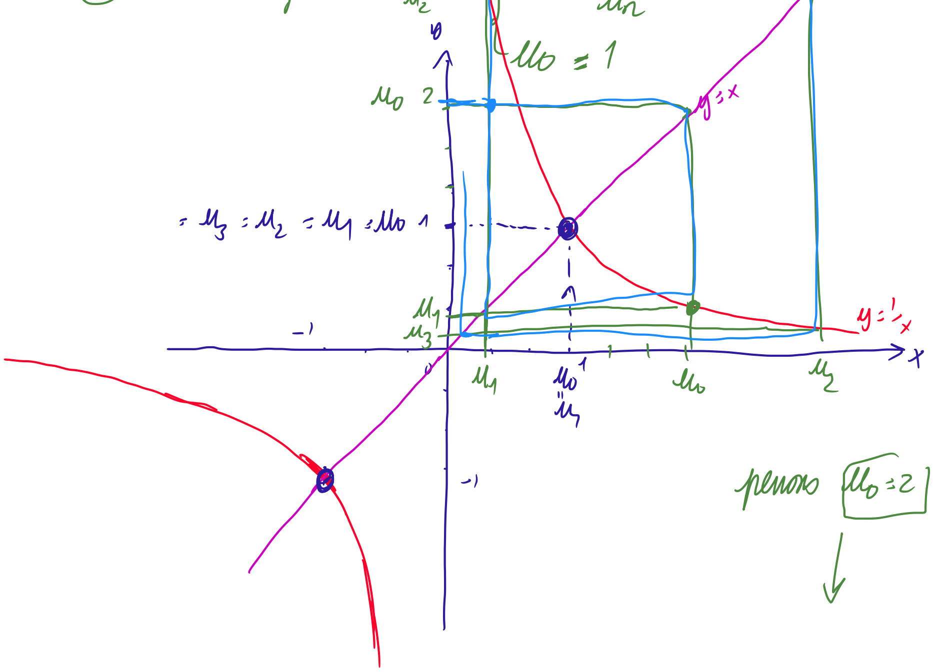
$$f'(\ell) = \frac{1}{2\sqrt{\ell+1}} = \frac{1}{2\sqrt{\ell^2}} = \frac{1}{2\ell} = \frac{1}{\cancel{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\underbrace{1+\underbrace{\sqrt{5}}_{>0}}_{>0}} < 1$$

conclusion : on a $f'(\ell) = \frac{1}{1+\sqrt{5}} > 0$ donc $|f'(\ell)| = f'(\ell) < 1$

on est dans le cas ① du théorème donc ℓ est attractif et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ

② mêmes questions avec $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$; $u_0 = 1$

on pose $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$



prenons $\boxed{u_0 = 2}$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) = \frac{1}{x}$ donc $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ ici $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{\ell}$

$\Leftrightarrow \ell^2 = 1$

$\Leftrightarrow \ell = 1$ et -1

mais comme $u_0 = 2$ on s'intéresse au point fixe $\ell = 1 > 0$

que vaut $f'(\ell) = f'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$

$f''(x) = (-x^{-2})' = -(-2)\, x^{-2-1}$

$= 2x^{-3}$

$f''(1) = 2 \cdot 1^{-3} = 2 \frac{1}{1^3} = \boxed{2}$

$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$

$a)' = -a x^{-a-1}$

$= 2x^{-3}$ $\qquad (x^{-a})' = -a x^{-a-1}$

$f'''(x) = 2 \cdot (-3) x^{-3-1} = 2 \cdot (-3) x^{-4} \quad f'''(1) = -6 \cdot (1)^{-4} = -6$

$-2 \cdot f'''(1) - 3(f''(1))^2 = +2 \times 6 - 3 \times 2^2$

$= +12 - 12 = 0 \qquad ?$

on ne peut pas conclure donc appliquer le théorème du point fixe.

4 octobre 2022. Correction de l'examen de décembre 2021

exercice 2 :

Soit $f : x \mapsto \frac{x+2}{x-5} + 1$

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} ;\ x-5 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} ;\ x \neq 5\} = \mathbb{R} \setminus \{5\} =]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$

2. f est continue sur D_f comme quotient et somme de fonctions continues sur D_f :

$$\left.\begin{array}{l} x \mapsto x+2 \\ x \mapsto x-5 \\ x \mapsto 1 \end{array}\right\} \text{continues sur } \mathbb{R} \text{ (donc sur } D_f)$$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

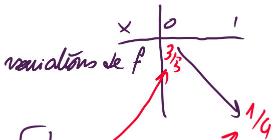
$u = x+2 \quad u' = 1$

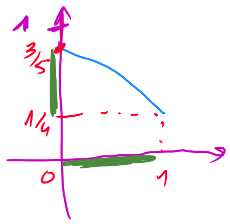
$v = x-5 \quad v' = 1$

3. Soit $x \in [0,1]$

a. $f'(x) = \frac{(x-5)-(x+2)}{(x-5)^2} = \frac{\cancel{x}-5-\cancel{x}-2}{(x-5)^2} = \frac{-7}{(x-5)^2}$ pour tout $x \in [0,1]$

b. Pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = \frac{-7 \to <0}{(x-5)^2 \to >0} < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0,1]$





c. $f(0) = \frac{2}{-5} + 1 = -\frac{2}{5} + 1 = -\frac{2}{5} + \frac{5}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$

$f(1) = \frac{1+2}{1-5} + 1 = \frac{3}{-4} + 1 = -\frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

Pour tout $x \in [0,1]$, f continue et $\downarrow$ avec $f(0) = \frac{3}{5} < 1$ et $f(1) = \frac{1}{4} > 0$

donc $f(x) \in [0,1]$

$(u(x)^2)' = 2u(x) \cdot u'(x)$

Conclusion $I = [0,1]$ est stable par f $(f(I) \subset I)$

$f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$

u'

d. Soit $x \in [0,1]$ $\quad f''(x) = \frac{7.2.(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{14.(x-5)}{(x-5)^4}$

$$= \frac{14\,\cancel{(x-5)}}{(x-5)^3.\cancel{(x-5)}}$$

$$= \frac{14}{(x-5)^3}$$

$\begin{cases} u = -7 & u' = 0 \\ v = (x-5)^2 & v' = 2(x-5). \end{cases}$

e. Pour tout $x \in [0,1]$, $\quad f''(x) = \frac{14 \to >0}{(x-5)^3 \to <0}$ car $x-5<0$ si $x<5$ or $x \in [0,1]$ donc $x<5$

donc $(x-5)^3<0$

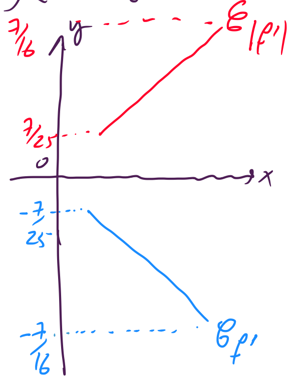
Conclusion f' est decroissante sur $[0,1]$ (car $f''(x)<0$ sur $[0,1]$).

f. $f'(0) = \frac{-7}{25}$

$f'(1) = \frac{-7}{16}$

x	0		1
variations de f'	$-7/25$	$\searrow$	$-7/16$

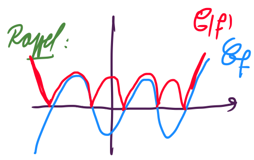
punie !!



Comme f' est continue, $\searrow$ et negative sur $[0,1]$

$|f'|$ est " , $\nearrow$ et positive sur $[0,1]$

donc $\max\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(1)| = \frac{7}{16} < 1$



Conclusion f est strictement contractante sur $[0,1]$.

g. D'après tout ce qui précède, ① f est continue sur $[0,1] \subset \mathcal{D}_f$

② $[0,1]$ est stable par f

③ f est strictement contractante sur $[0,1]$

On peut donc appliquer le théorème du point fixe. Autrement dit il existe un unique point fixe $\ell \in [0,1]$ de f.

4. On considère $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n+2}{x_n-5}+1 \\ x_0 \in [0,1] \text{ donné} \end{cases}$

a. Comme $x_0 \in [0,1]$ $\quad \Big\}$ tous les x_n ($n \in \mathbb{N}$) $\in [0,1]$ car par définition et $[0,1]$ est stable par f $\Big\}$ tous les x_n ($n \in \mathbb{N}$) $\in [0,1]$ car par définition

$x_n = f(\underbrace{x_{n-1}}_{\in [0,1]}) \in [0,1] \underline{\underline{< 5}}$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq 1 < 5$ donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie

b. D'après la question 3) f vérifie le théorème du point fixe sur $[0,1]$

et comme $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \in [0,1] \end{cases}$ on a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ le point fixe de f sur $[0,1]$

c. ℓ vérifie : $\ell \in [0,1]$

et $f(\ell) = \ell$

or $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \dfrac{\ell+2}{\ell-5} + 1 = \ell$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ell+2}{\ell-5} = \ell - 1$

$\Leftrightarrow \ell + 2 = (\ell-1)(\ell-5)$

$\Leftrightarrow \ell + 2 = \ell^2 - 6\ell + 5$

$\Leftrightarrow \ell^2 - 7\ell + 3 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4.3 = 49 - 12 = 37$ on a 2 solutions $\ell_1 = \dfrac{7-\sqrt{37}}{2} \sim \frac{1}{2} \in [0,1]$

$\sqrt{37} \sim \sqrt{36} = 6$ $\qquad \ell_2 = \dfrac{7+\sqrt{37}}{2} \sim \frac{13}{2} \notin [0,1]$

Par conséquent $\ell = \ell_1 = \dfrac{7-\sqrt{37}}{2}$

d. On aurait pu appliquer le dernier théorème du cours (points fixes attractifs et répulsifs) en calculant $f'(\ell)$
et voir par exemple si $|f'(\ell)| < 1$

e. Comme f est $\downarrow$ sur $[0,1]$
la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée