5 SEPT. 2023 - GROUPE 3

TD1.

Exercice 1 :

On considère les suites suivantes, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

(1) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2 \\ u_0 = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \\ u_0 = 20 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} u_{n+1} = 3 u_n \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

Pour ces 3 suites

1. Dire si elles sont arithmétiques, géométriques ou autre
2. Calculer si possible leur formulation explicite
3. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ pour $n = 20$
4. Les représenter graphiquement

Exercice 2.

Une épidémie se déclenche par 2 individus revenant d'un pays tropical. Le virus se propage rapidement en contaminant chaque jour 3 fois plus d'individus que la veille .

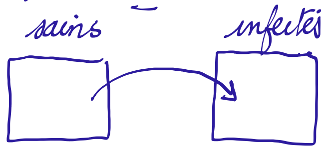
3 fois plus d'individus que la veille

1. Ecrire ce problème sous forme d'une suite connue (à reconnaître)
2. " " " sous formulation explicite
3. Au bout de combien de jours 100 personnes seront contaminés?

10 000 " " " ?

1 million " " " ?

Exercice 3 : transmission du VIH:



On suppose que en FRANCE pour le VIH, le nombre d'individus sains à risque est infecté avec un taux de 0.9 par mois du nombre de contaminés du mois précédent
mais il y a aussi, un nombre de nouvelles personnes infectées qui arrivent de l'étranger: environ 100 par mois

On suppose qu'au temps $n=0$, on a 10 000 contaminés.

Comment va se comporter l'épidémie?

Solution : pour déterminer le comportement de l'épidémie, nous allons utiliser une suite.

Au temps initial, on a 10 000 contaminés, donc $u_0 = 10\,000$
et chaque mois on contamine $0.9 \times$ le nombre d'infectés du mois précédent et 100 individus étrangers contaminés viennent s'ajouter à ce nombre

On a donc $\underbrace{u_{n+1}}_{\text{nombre d'infectés au mois } n+1} = 0.9 . u_n + 100$

↑ nombre d'infectés au mois n

__Exercice__ : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par:

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où} \quad f : x \mapsto x^3+x \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Autrement dit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^3+u_n$

① . f possède-t-elle des points fixes ?

② si oui , sont-ils attractifs ou repulsifs ?

Allure de la courbe $\mathcal{C}_f$: $f : x \mapsto x^3+x$

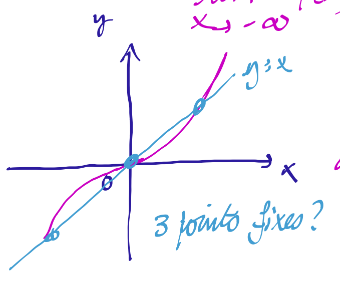
or $x^3+x = x(x^2+1)$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x(x^2+1)=0$

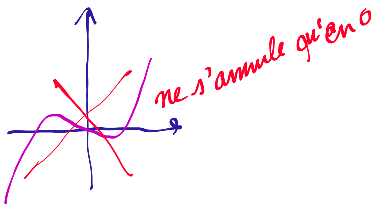
$\Leftrightarrow \boxed{x=0}$ ou $\underbrace{x^2+1=0}_{\text{pas de solutions}}$

D'autre part $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^3+x = +\infty$

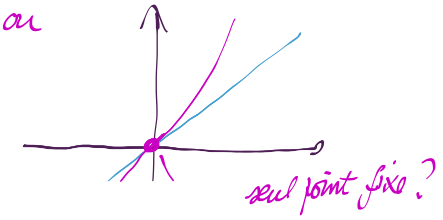
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3+x = -\infty$



ou



ou



Cherchons par le calcul le nombre de points fixes:

autrement dit cherchons ℓ t

1/ ∃! un seul point fixe ?

autrement dit cherchons ℓ tel que $f(\ell) = \ell$

c'est à dire $\ell^3 + \ell = \ell$

$\Leftrightarrow \quad \ell^3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ell = 0}$ un seul point fixe

Question : est-il attractif ou répulsif ?

Pour ça, cherchons $f'(\ell)$:

ici $f(x) = x^3 + x$ donc $f'(x) = 3x^2 + 1$

pour $\ell = 0$ $\quad f'(\ell) = 3.0^2 + 1 = 1$

on doit calculer $f''(x) = 6x$ en $\ell = 0$ $\quad f''(\ell) = 6.0 = 0$

on doit calculer $f'''(x) = 6$ donc $f'''(\ell)_{\ell=0} = 6 > 0$

donc le point fixe est <u>RÉPULSIF</u> donc si u_0 est proche de 0 on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq \ell$

(le point fixe repoussera la suite)