L1 - Licence Sciences pour la Santé

L1 - Licence Sciences pour la Santé

L1 - Licence Sciences pour la Santé

TD 1 - septembre 2024

Exercice 1

On considère les suites suivantes définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

Ⓐ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2 \\ u_0 = 1 \end{cases}$ Ⓑ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \\ u_0 = 20 \end{cases}$ Ⓒ $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

Pour ces 3 suites :

1. Dire si elles sont arithmétiques, géométriques ou autres. Justifier.
2. Déterminer, quand c'est possible, la formulation explicite
3. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ avec $n = 20$
4. Représenter graphiquement ces suites en plaçant les 4 premiers termes (u_0, u_1, u_2 et u_3)

Indications :
- on traitera d'abord la suite Ⓐ avec les questions 1, 2, 3 et 4
  puis " " Ⓑ " " "
  etc...
- pour les questions 2 et 3 : ne pas redémontrer les résultats du cours, mais utiliser les formules données

$\boxed{\text{Bonus}}$: Faire les même questions pour les suites

Ⓓ $\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n \\ u_0 = -20 \end{cases}$ Ⓔ $\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n \\ u_0 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Solution : Ⓐ $\{ u_{n+1} = u_n + 2$

$\begin{cases} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

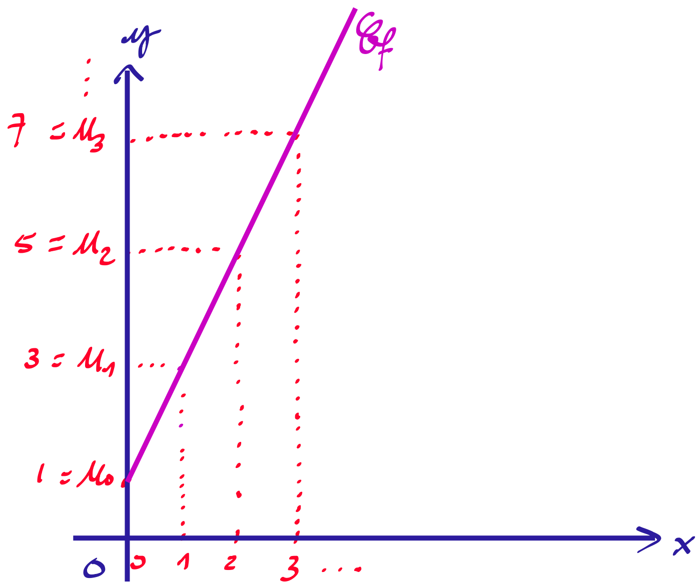
1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $u_{n+1} = u_n + a$ où $a = 2$ et $u_0 = 1$.
C'est donc une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

2. D'après le cours, nous avons : $u_n = u_0 + na$, donc ici
$\boxed{u_n = 1 + 2n}$

3. D'après le cours, nous avons : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$
pour $n = 20$, cela donne $u_0 + \dots + u_{20} = (21) \cdot \left(\frac{1 + u_{20}}{2}\right)$. or $u_{20} = 1 + 2 \cdot 20 = 41$
d'après la question 2, donc " $= 21 \cdot \left(\frac{1+41}{2}\right) = 21 \cdot 21 = \boxed{441}$

4. Représentation graphique :

d'après la question 2, $u_n = 1 + 2n = f(n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + 2x$



(B) $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \\ u_0 = 20 \end{cases}$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $u_{n+1} = r\,u_n$ où $r = \frac{1}{2}$ et $u_0 = 20$

c'est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 20.

2. D'après le cours, nous avons : $u_n = u_0 \cdot r^n$

donc ici $u_n = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. D'après le cours, nous avons $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$

donc ici pour $n = 20$ $\quad u_0 + u_1 + \dots + u_{20} = 20 \cdot \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{20}{1/2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right)$

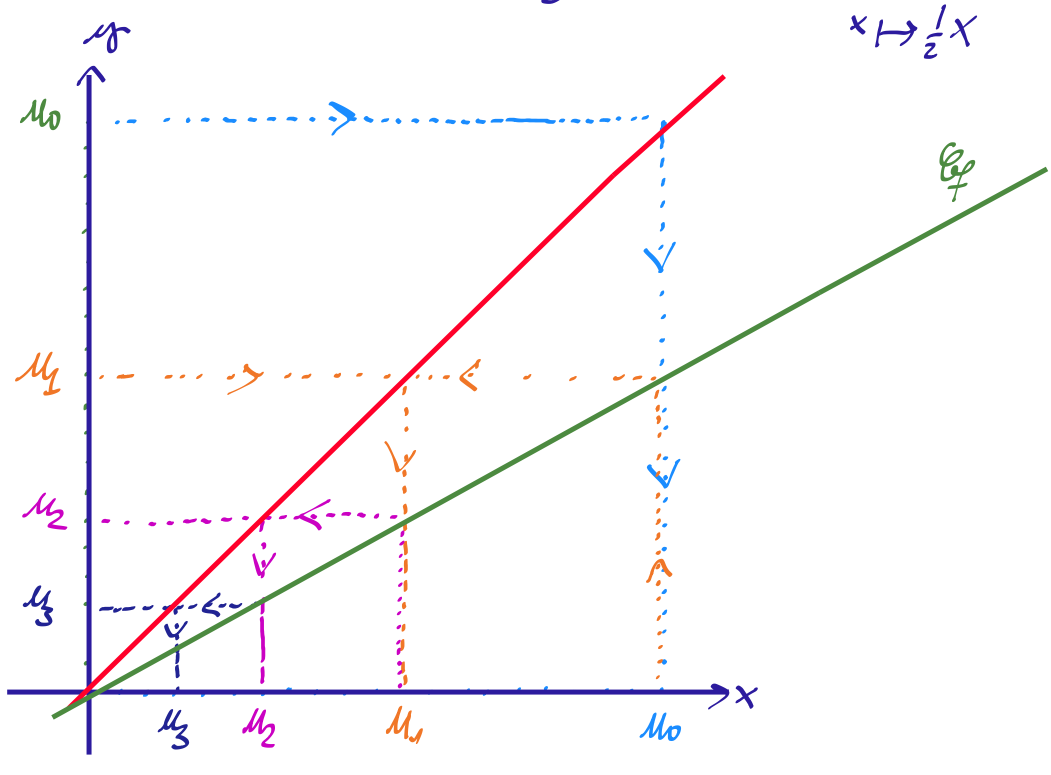
$= 40\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right)$

$\simeq 39{,}99\ldots$

4. <u>Représentation graphique :</u>

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n = f(u_n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{2}x$



© $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $u_{n+1} = r u_n$ où $r = 3$ et $u_0 = \frac{1}{3}$
c'est donc une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $\frac{1}{3}$.

2. D'après le cours, nous avons $u_n = u_0 \cdot r^n$, donc ici

$$u_n = \frac{1}{3} \cdot 3^n$$

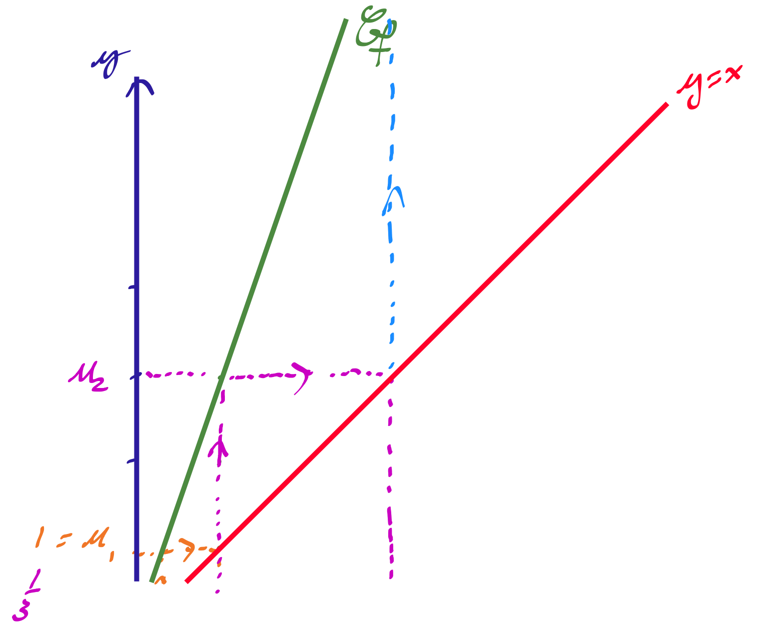
3. D'après le cours, nous avons $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right)$

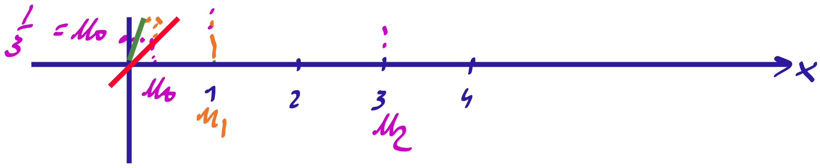
donc ici pour $n = 20$ $u_0 + \dots + u_{20} = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) = -\frac{1}{6} \left(1 - 3^{n+1} \right)$

$$= \frac{1}{6} \left(3^{n+1} - 1 \right)$$

4. Représentation graphique :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit $u_{n+1} = 3u_n = f(u_n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 3x$





1/3 = u0
x
u0
1
2
3
4
u1
u2

Exercice 2 :

Une épidémie se déclenche à partir de 2 individus revenant d'un pays tropical

Le virus se propage rapidement en contaminant chaque jour 3 fois plus d'individus que la veille

1. Ecrire ce problème sous la forme d'une suite connue. Justifier.

problème sous la forme d'une suite connue. Justifier.

2. " " sous la formulation explicite d'une suite.

3. Au bout de combien de jours : (a) 100 personnes seront contaminées ?

(b) 10 000 " " " ?

(c) 1 million " ?

$\boxed{\text{Bonus}}$ (d) 68 millions " ?

(e) 8 milliards " ?

Solution :

(1) On note u_n le nombre d'individus infectés au jour n.
Comme l'épidémie commence avec 2 individus alors $u_0 = 2$
et comme le nombre d'individus infectés au jour $n+1$ est 3 fois plus importante qu'au jour n, alors $u_{n+1} = 3u_n$.

On obtient donc une suite géométrique de raison 3 et premier terme 2 que l'on note $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ u_0 = 2 \end{cases}$

(2) D'après le cours, on a $u_n = 2 \cdot 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(3) a. Trouver au bout de combien de jours au moins 100 personnes sont contaminées revient à chercher n t.q. $u_n \geqslant 100$

$$
\begin{aligned}
u_n \geqslant 100 &\iff 2 \cdot 3^n \geqslant 100 \\
&\iff 3^n \geqslant 50 \\
&\iff \ln(3^n) \geqslant \ln(50) \\
&\iff n \ln 3 \geqslant \ln 50 \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln 50}{\ln 3} \approx 3{,}56 \text{ jours}
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow \quad n \geq \dfrac{\ln 50}{\ln 3} \simeq 3{,}56$ jours

Donc $n = 4$. Au bout de 4 jours, il y a déjà plus de 100 individus infectés.

<u>Remarque</u> : de façon générale cherchons le nombre de jours n t.q $u_n \geq k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$.

$$u_n \geq k \Leftrightarrow 2.3^n \geq k$$

$$\Leftrightarrow 3^n \geq \frac{k}{2}$$

$$\Leftrightarrow n \ln 3 \geq \ln(k/2)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(k/2)}{\ln 3}$$

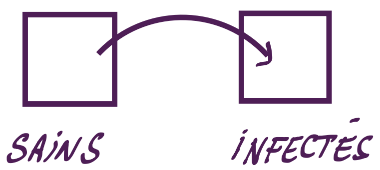
b. Si $k = 10\,000$ $\quad n \geq \dfrac{\ln(10000/2)}{\ln 3} \simeq 7{.}75$ jours $\quad n = 8$ jours

c. si $k = 1$ million $\quad n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{10^6}{2}\right)}{\ln 3} \simeq 11{,}4$ jours $\quad n = 12$ jours

d. si $k = 68$ millions $\quad n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{68 \times 10^6}{2}\right)}{\ln 3} \simeq 15{,}78$ jours $\quad n = 16$ jours

e. si $k = 8$ milliards $\quad n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{8 \times 10^9}{2}\right)}{\ln 3} \simeq 20{,}12$ jours $\quad n = 21$ jours

<u>Exercice 3</u> : Transmission du VIH



On suppose que, en France, pour le VIH, le nombre d'individus sains à risque est infecté avec un taux de 0.9 par mois (du nombre de contaminés du mois précédent)
<u>mais</u> il y a aussi un nombre de nouvelles personnes infectés qui arrivent de l'étranger : 100 par mois (en moyenne).

On suppose qu'au mois $n = 0$ on a 10 000 contaminés

Comment va se "comporter" l'épidémie ? (décroître, exploser, se stabiliser ?)

Rappel de cours : les suites ARITHMETICO-GEOMÉTRIQUES

Définition : on appelle suite arithmetico-geometrique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe deux constantes a et r telles que

$$\begin{cases} u_{n+1} = r u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Remarque : si $\boxed{r=0}$ on aura une suite stationnaire $u_1 = u_2 = \dots = u_n = a$ mais seulement à partir de $n=1$

si $\boxed{r=1}$ on aura une suite arithmétique $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

si $\boxed{a=0}$ on aura une suite geometrique $\begin{cases} u_{n+1} = r u_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

Ces 3 cas ont déjà été traités dans le cours.

Dans ce qui suit, on suppose $r\in\mathbb{R}$ où $\boxed{r\neq 0 \text{ et } r\neq 1}$ ainsi que $a\in\mathbb{R}$ avec $\boxed{a\neq 0}$

Question : peut-on déterminer une formulation explicite d'une suite arithmetico-géométrique ?

Réponse : oui

Réponse : oui

Comment ?

Méthode : étape 1 : trouver le point fixe

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto rx + a$

On cherche le point fixe de f. Autrement dit, on cherche un nombre réel

On cherche le point fixe de f. Autrement dit, on cherche un nombre réel ℓ tel que $\boxed{f(\ell)=\ell}$

$$\begin{aligned} f(\ell)=\ell &\iff r\ell+a=\ell \\ &\iff r\ell-\ell=-a \\ &\iff \ell(r-1)=-a \\ &\iff \boxed{\ell=\frac{-a}{r-1}} \end{aligned}$$ (bien défini car $r\neq 1$ par hypothèse)

<u>étape 2</u> : <u>utilisation d'une suite auxiliaire</u>

On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $\boxed{v_n=u_n-\ell}$

alors $v_0=u_0-\ell$ et $\boxed{u_n=v_n+\ell}$ $(*)$

Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison r.

C'est à dire montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=rv_n$

<u>Calculons</u> v_{n+1} : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\underbrace{u_{n+1}}-\ell$

$$\begin{aligned} &= ru_n+a-\ell \\ &= r(v_n+\ell)+a-\ell \quad (\text{d'après } (*)) \\ &= rv_n+r\ell+a-\ell \\ &= rv_n+\ell(r-1)+a \quad \text{or } \ell=\frac{-a}{r-1} \\ &= rv_n+\frac{-a}{\cancel{r-1}}\cdot\cancel{(r-1)}+a \\ &= rv_n-a+a=rv_n \end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite géométrique de raison r

<u>étape 3</u> : formulation explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

D'après le cours $v_n=v_0\cdot r^n=(u_0-\ell)r^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

<u>étape 4</u> : formulation explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Comme $u_n=v_n+\ell$ $(*)$ on a $u_n=(u_0-\ell)r^n+\ell$ avec $\ell=\frac{-a}{r-1}$

Conclusion $\boxed{u_n = \left(u_0 + \frac{a}{r-1}\right) r^n - \frac{a}{r-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $r \neq 1$

Retour à l'exercice 3 : On note u_n le nombre d'individus infectés au mois n.

au mois 0 : le nombre d'individus infectés est 10 000 donc $u_0 = 10\,000$

au mois $n+1$: on multiplie le nombre d'infectés du mois précédent par 0.9 et on ajoute 100 nouveaux infectés venant de l'extérieur

Ce qui donne ; $u_{n+1} = 0.9\,u_n + 100$

On obtient donc une suite arithmético-géométrique de raisons 0.9 et 100 et de premier terme 10 000

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.9\,u_n + 100 \\ u_0 = 10\,000 \end{cases}$$

Calculons sa formulation explicite :

étape 1 : On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0.9x + 100$

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\Leftrightarrow 0.9\ell + 100 = \ell \\ &\Leftrightarrow 0.9\ell - \ell = -100 \\ &\Leftrightarrow \ell(0.9-1) = -100 \\ &\Leftrightarrow \ell(-0.1) = -100 \\ &\Leftrightarrow \boxed{\ell} = \frac{-100}{-0.1} = \frac{100}{1/10} = \boxed{1000} \end{aligned}$$

étape 2 : On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n - 1000$

donc $v_0 = u_0 - 1000 = 10\,000 - 1000 = 9\,000$

Alors $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$

Alors $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$

$= 0.9\,u_n + 100 - 1000$

$= 0.9\,(v_n + 1000) - 900$

$= 0.9\,v_n + \underbrace{0.9 \times 1000 - 900}_{900 - 900 = 0}$

$= 0.9\,v_n$

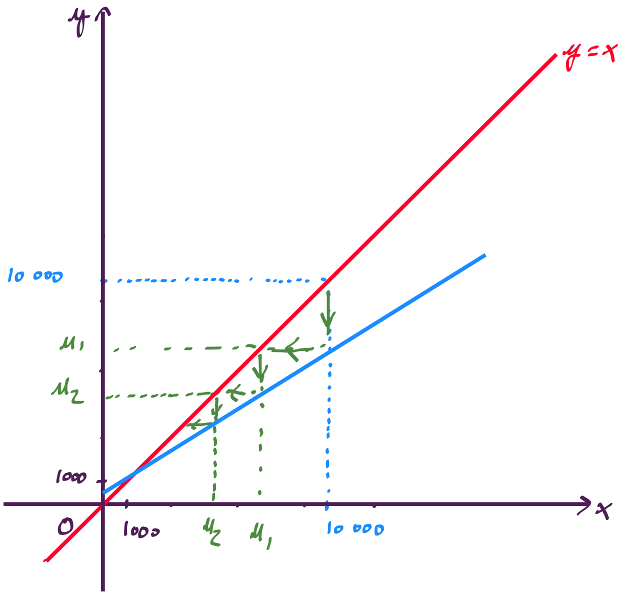
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0.9 et de 1er terme 900

étape 3 : d'après le cours $v_n = 900 \cdot (0.9)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

étape 4 : alors $\boxed{u_n} = v_n + 1000 = \boxed{900\,(0.9)^n + 1000}$

Calculons : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 900\,\underbrace{(0.9)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + 1000 = \boxed{1000}$ le point fixe est attractif !

Vérifions-le graphiquement :



Exercices : Etudier les suites : ① $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Solution : ① L'objectif est d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on définit par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x-3$

Formulation explicite de la suite:

étape 1 : Cherchons $\ell \in \mathbb{R}$ t.q. $f(\ell) = \ell$

$$f(\ell) = \ell \iff 2\ell - 3 = \ell$$
$$\iff 2\ell - \ell = 3$$
$$\iff \ell(2-1) = 3$$
$$\iff \boxed{\ell = 3}$$

étape 2 : on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 3$

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2

pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\boxed{v_{n+1}} = u_{n+1} - 3$
$$= 2u_n - 3 - 3$$
$$= 2(v_n + 3) - 6$$
$$= 2v_n + 6 - 6$$
$$= \boxed{2v_n}$$

C'est donc bien une suite géometrique

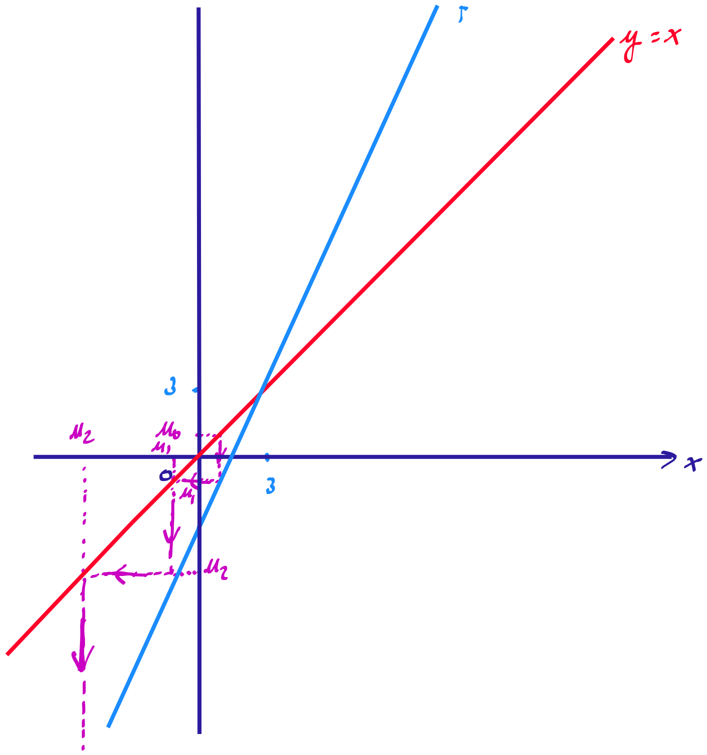
étape 3 : formulation explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

D'après le cours $v_n = v_0 . r^n = -2 . 2^n$ où $v_0 = u_0 - 3 = 1 - 3 = -2$ et $r = 2$

Comme $u_n = v_n + \ell$ on en déduit que $\boxed{u_n = -2 . 2^n + 3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -2 . 2^n + 3 = -\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ (car $2 > 1$)

Représentation graphique :



f
y = x
x
3
3
O
u_0
u_1
u_2
u_1
u_2

② $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n+3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

L'objectif est d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on définit par
$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$ où $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -2x+3 \end{array}$

Formulation explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

étape 1 : cherchons le point fixe : on cherche $l\in\mathbb{R}$ t.q. $f(l)=l$

$$\begin{aligned} f(l)=l &\iff -2l+3=l \\ &\iff -3l=-3 \\ &\iff \boxed{l=1} \end{aligned}$$

étape 2 : On utilise la fonction auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\quad v_{n+1} = u_{n+1}-1$

$\qquad 2u_n+3-1$

$= -2u_n + 3 - 1$

$= -2(v_n + 1) + 2$

$= -2v_n \cancel{-2} + \cancel{2}$

$= -2v_n$

c'est donc bien une suite géométrique de raison -2 et de 1er terme $v_0 = u_0 - 1 = 1 - 1 = 0$

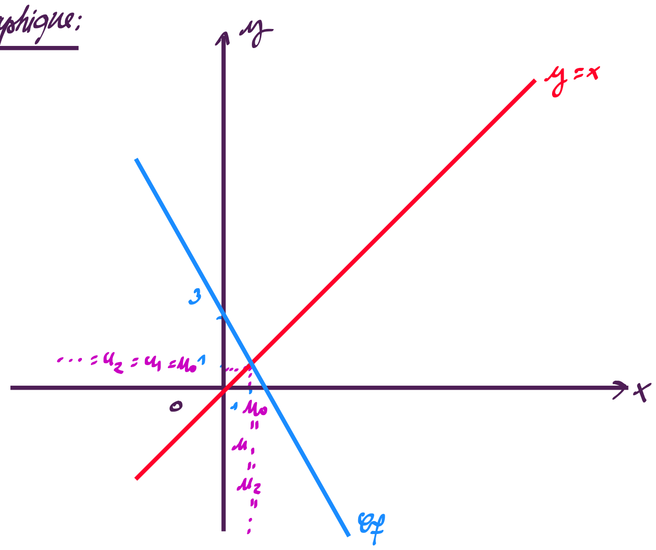
<u>étape 3 :</u> formulation explicite

d'après le cours $v_n = v_0 \cdot r^n = 0 \cdot (-2)^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et comme $u_n = v_n + 1$ on a $u_n = 0 + 1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

C'est donc une suite stationnaire, ce qui était prévisible car $u_0 = 1$ (= point fixe de f)

<u>Représentation graphique:</u>



<u>Exercice:</u> refaire ② avec $u_0 = -1$