

Laurent PUJO-MENTOUET
 $\uparrow$ SAWST

DOUA - BÂT BRACONNIER BUREAU 246

pujo@math.univ-lyon1.fr

math.univ-lyon1.fr $\leadsto$ pujo

Introduction sur les suites

I. Exemple

On suppose qu'on a une somme s_0 en euros que l'on va placer à un taux de revenu annuel de 10%

Par exemple, on a $s_0 = 50$ euros au bout d'un an on augmente de 10%

$$s_0 = 50$$

$$100 \rightarrow 10$$

$$50 \rightarrow \frac{50 \times 10}{100} = \frac{5 \times 100}{100} = 5$$

$$100 \rightarrow 10$$

$$s_0 \rightarrow \frac{s_0 \times 10}{100}$$

$$= \frac{s_0}{10} = 0.1 s_0$$

$$= \frac{S_0}{10} = 0.1 S_0$$

$$\text{on a } S_1 = S_0 + 0.1 S_0 = (1+0.1) S_0 = 1.1 S_0$$

$$S_2 = 1.1 S_1 = (1.1)(1.1) S_0 = (1.1)^2 S_0$$

$$S_3 = (1.1)^3 S_0$$

⋮

$$S_n = (1.1)^n S_0$$

Au bout de 10 ans si $S_0 = 50$ euros

$$S_{10} = (1.1)^{10} \cdot 50 \approx 2.5937 \times 50$$

$$\approx 129.69 \text{ euros}$$

le gain est de : 79.69 euros

Au bout de combien d'années on a un gain de 100 euros

On cherche $k \in \mathbb{N}$, tel que $S_k = 150$

$$\text{on } S_k = (1.1)^k \cdot 50$$

$$\text{donc } S_k = 150 \Leftrightarrow (1.1)^k \cdot 50 = 150$$

$$\Leftrightarrow (1.1)^k = 3$$

$$\downarrow \ln((1.1)^k) = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow k \ln 1.1 = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{k} = \frac{\ln 3}{\ln 1.1} \approx 11.5 \quad \text{donc } \boxed{k=12}$$

On aura fait un gain de 100 euros au bout de 12 ans

II Définition:

a. Suite

Définition On appelle suite toute fonction $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{array} \right.$

$\uparrow$ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
 $\uparrow$ nombre entier $\quad \quad \quad \uparrow$ nombre réel

On note une telle fonction $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

le nombre u_n est appelé terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Attention! ne pas confondre u_n : nombre (par exemple $\sqrt{3}$)
 et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la fonction (la suite)
 $\rightarrow$ c'est un ensemble de nombres
 donc il ne faut pas écrire la suite u_n est croissante
 mais " " $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

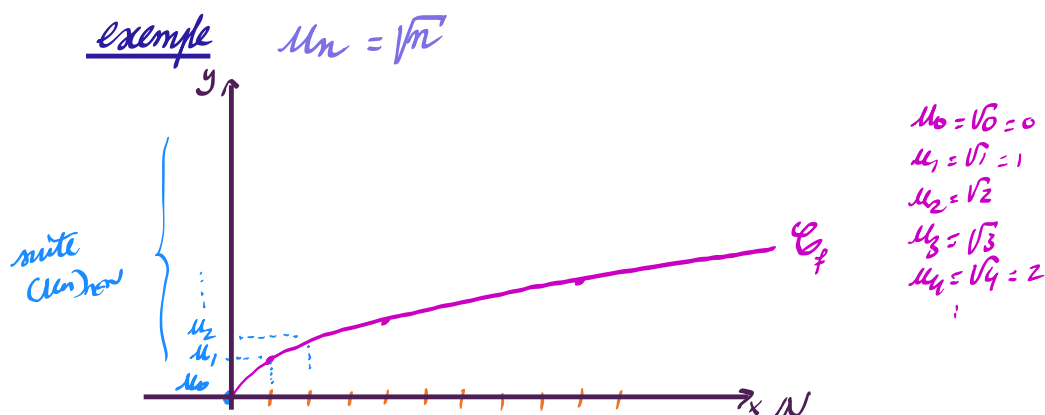
Remarque: si $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$
 $n \mapsto u_n$
 on note la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

b. Il existe 2 façons de définir les suites $f: x \mapsto \sqrt{x}$
 (i) formulation explicite: $u_n = f(n)$ ex: $u_n = \sqrt{n}$
 (ii) formulation par récurrence $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = a \text{ donné} \end{cases}$

Remarque avantage de la formulation explicite:
 si on veut u_{500} on calcule $f(500)$
 par contre avec la formulation par récurrence si on
 veut u_{500} il faut calculer $u_{499}, u_{498}, u_{497}, \dots$

c. Représentation graphique

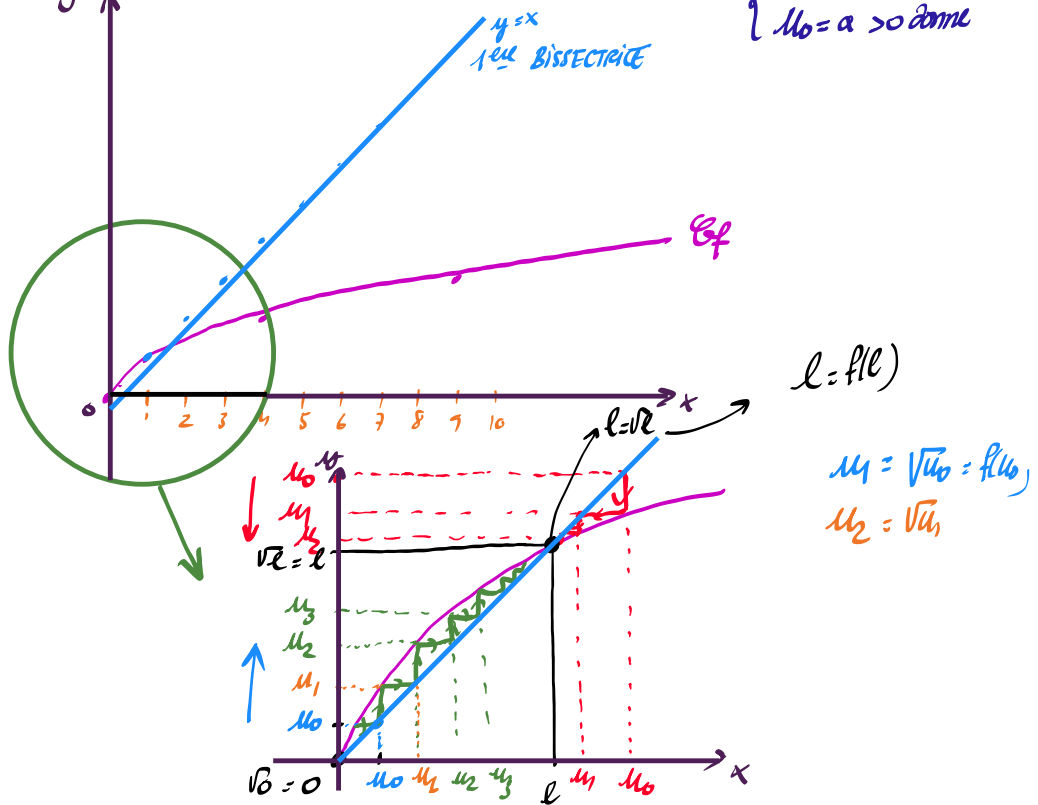
(i) Formulation explicite: de la forme $u_n = f(n)$, où $f: x \mapsto f(x)$
 et $n \in \mathbb{N}$



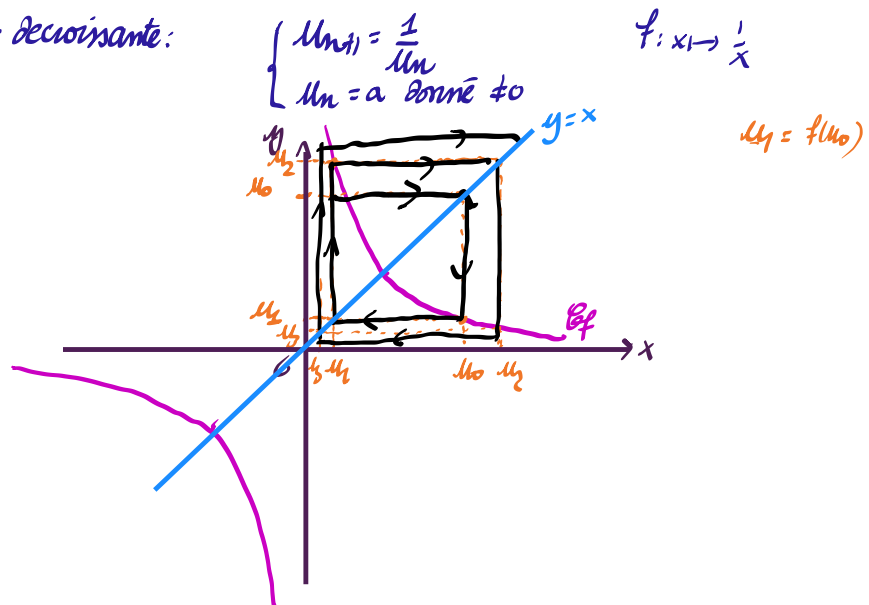
0 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ... $x \in \mathbb{N}$

(ii) Formulation par récurrence

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n} \\ u_0 = a > 0 \text{ donné} \end{cases}$



si f est décroissante:



III Trois suites classiques formulées par récurrence

a. suites arithmétiques

Definition On appelle suite arithmétique, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle il existe un réel a appelé raison de cette suite tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{converge : } \begin{matrix} \text{raison : } a \\ \text{donnée initiale : } u_0 \end{matrix}$$

1 septembre 2026

Remarque: si $a = 0$ u_0 donné, $u_1 = u_0$, $u_2 = u_1 = u_0$, ...
on dit que la suite est STATIONNAIRE

Exemple: si $u_0 = 1$ et $a = -2$

On définit
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 2 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

alors $u_1 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$, $u_2 = u_1 - 2 = -1 - 2 = -3$

Question: comment passer de la formulation par récurrence à la formulation explicite pour les suites arithmétiques?

Réponse On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

u_0

$$u_1 = u_0 + 1a$$

$$u_2 = u_1 + a = (u_0 + a) + a = u_0 + 2a$$

$$u_3 = u_2 + a = (u_0 + 2a) + a = u_0 + 3a$$

il semblerait que $u_n = u_0 + na$: conjecture

Montrons-le par récurrence ↑

On définit $P_n = "u_n = u_0 + na"$

définir $P_n = "u_n = u_0 + na"$

objectif: montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

étape 1: initialisation montrons que P_0 est vraie

or $P_0: u_0 = u_0 + 0 \cdot a = u_0$ vrai

étape 2 hérédité On suppose que P_k pour un certain $k \in \mathbb{N}$

montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est à dire que $u_{k+1} = u_0 + (k+1)a$

Or par la définition de la suite $u_{k+1} = u_k + a$ (*)

et par l'hypothèse on a P_k vraie c'est à dire $u_k = u_0 + ka$ (**)

en remplaçant u_k dans (*) par sa valeur donnée dans (**) on a

$$u_{k+1} = (u_0 + ka) + a \quad (*)$$

alors

$$u_{k+1} = u_0 + \underbrace{ka}_{(**)} + a = u_0 + (k+1)a$$

étape 3 Conclusion P_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

autrement dit que $u_n = u_0 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Représentation graphique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On a 2 possibilités: $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$ ou $u_n = u_0 + na$

formulation par récurrence

formulation explicite

on choisit cette formulation pour la représenter

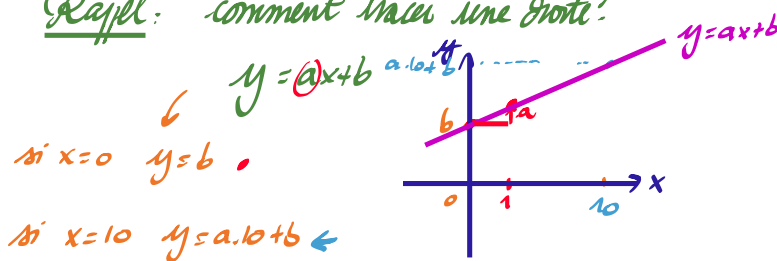
on considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = u_0 + na = f(n)$

avec $f: x \mapsto u_0 + xa$ que l'on peut écrire $f(x) = ax + u_0$

c'est l'équation d'une droite de la forme $y = ax + b$ où a : coefficient

directeur
et b : ordonnée à l'origine

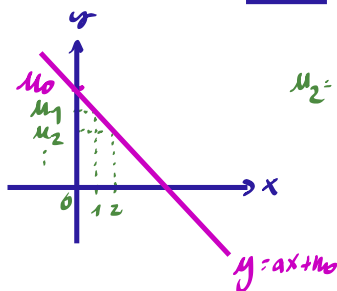
Rappel: comment tracer une droite?



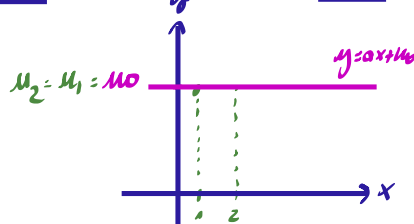
Ici: on a 3 cas:

$$y = ax + u_0$$

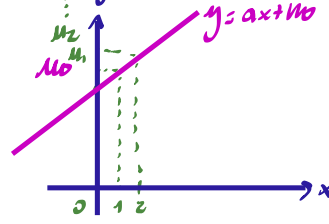
si $a < 0$



si $a = 0$



si $a > 0$



Propriété: que vaut $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$? avec $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite arithmétique?

$$u_0 = u_0$$

$$+ u_1 = u_0 + a$$

$$+ u_2 = u_0 + 2a$$

$$+ u_3 = u_0 + 3a$$

:

$$+ u_n = u_0 + na$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 + u_0 + a + u_0 + 2a + u_0 + 3a + \dots + u_0 + na$$

$$= (n+1)u_0 + a + 2a + 3a + \dots + na$$

$$= (n+1)u_0 + a(1+2+3+\dots+n)$$

Remarque: que vaut $1+2+3+\dots+n$?

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)$$

$$2S = n \cdot (n+1)$$

$$\text{donc } S = \frac{n(n+1)}{2}$$

GAUSS

$$\text{On a donc } \boxed{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n} = (n+1)u_0 + a \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (n+1) \left(u_0 + \frac{an}{2} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{2u_0 + an}{2} \right) \rightarrow u_n$$

$$= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_0 + an}{2} \right) = \boxed{(n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)}$$

b. suite géométrique

Définition

On appelle suite géométrique, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ appelé raison tel que tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = r \cdot u_n \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$$

Remarque

a) si $r=0$ $\begin{cases} u_{n+1} = 0 \cdot u_n \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$

$$u_0, u_1=0, u_2=0, u_3=0, \dots, u_n=0$$

Si $u_0 \neq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir de $n=1$

b) si $r=1$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$$

$$u_1 = u_0, u_2 = u_0, u_3 = u_0, \dots \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est stationnaire}$$

Dans ce qui suit, on suppose $r \neq 0$ et $r \neq 1$

Exemple: si $u_0=1$ et $r=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

$$\text{donc } u_1 = \frac{u_0}{2}, u_2 = \frac{u_1}{2}, u_3 = \frac{u_2}{2}, \dots$$

$$= \frac{1}{2} \quad = \frac{1}{4} \quad = \frac{1}{8} \dots$$

Question: comment peut-on exprimer cette suite sous forme explicite?

$$\text{On a } \begin{cases} u_{n+1} = r \cdot u_n \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$$

$$u_1 = r^1 \cdot u_0$$

$$u_2 = r \cdot u_1 = r \cdot r \cdot u_0 = r^2 \cdot u_0$$

$$u_3 = r \cdot u_2 = r \cdot r^2 \cdot u_0 = r^3 \cdot u_0$$

$\vdots$

Il semblerait que $u_n = r^n \cdot u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Montrons-le par récurrence:

On pose P_n : " $u_n = r^n \cdot u_0$ " Objectif: montrer que P_n est vraie

On pose $P_n: "u_n = r^n u_0"$ Objectif: montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

étape 1 initialisation $P_0: u_0 = r^0 u_0 = u_0$ donc P_0 est vraie

étape 2 hérédité On suppose P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$

montrons que P_{k+1} est vraie i.e. $u_{k+1} = r^{k+1} u_0$

Or $u_{k+1} = r u_k$ (suite géométrique) et comme P_k est vraie par hypothèse on a $u_k = r^k u_0$

on le remplace dans (*) et on a $u_{k+1} = r \cdot r^k u_0 = r^{k+1} u_0$

donc P_{k+1} est vraie

étape 3 Conclusion P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

i.e. $u_n = r^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Représentation graphique

on a le choix d'utiliser:

la formulation par récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = r u_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

où $f: x \mapsto r x$ i.e. $y = r x$

équation de droite qui passe par (0,0)



représentation plus facile à utiliser! NOTRE CHOIX

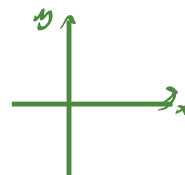
ou la formulation explicite

$$u_{n+1} = r^n u_0$$

$$a^b = e^{b \ln a}$$

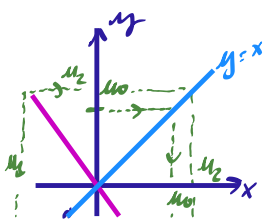
$$\Leftrightarrow u_{n+1} = f(n)$$

$$\text{où } f: x \mapsto r^x u_0 = e^{x \ln r} u_0$$

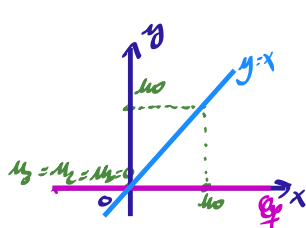


trop difficile
on laisse tomber

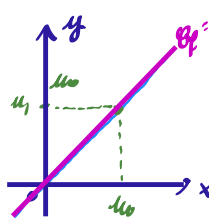
cas $r < 0$



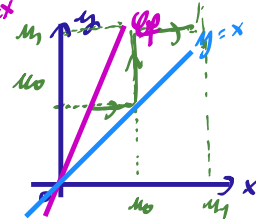
cas $r = 0$



cas $r = 1$



cas $r > 0$ ($r \neq 1$)





$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } \boxed{f: x \mapsto rx}$$

Que vaut $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$?

$$u_0 = u_0$$

$$u_1 = r \cdot u_0$$

$$u_2 = r^2 u_0$$

$$u_3 = r^3 u_0$$

$\vdots$

$$u_n = r^n u_0$$

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_n &= u_0 + r u_0 + r^2 u_0 + \dots + r^n u_0 \\ &= u_0 (1 + r + r^2 + \dots + r^n) \end{aligned}$$

Rappel: comment calculer $1 + r + r^2 + \dots + r^n$?

ASTUCE: $(1 + r + r^2 + \dots + r^n)(1 - r)$

on suppose $r \neq 1, r \neq 0$

$$= 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \dots + \cancel{r^n}$$

$$- \cancel{r} - \cancel{r^2} - \dots - \cancel{r^n} - r^{n+1}$$

$$= 1 - r^{n+1}$$

$$\text{Donc } (1 + r + r^2 + \dots + r^n)(1 - r) = 1 - r^{n+1}$$

$$\text{Donc } \boxed{1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}}$$

$$\text{Donc } u_0 + u_1 + \dots + u_n = \boxed{u_0 \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}} \text{ avec } r \neq 1$$

© suites arithmético-géométrique

Définition Ce sont des suites de la forme $\begin{cases} u_{n+1} = r u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

où r et a sont appelés raison.

Remarque: si $\boxed{r=1}$ $u_{n+1} = u_n + a$ une suite arithmétique

si $a=0$ $u_{n+1}=r u_n$ " " géométrique

Dans ce qui suit on suppose $r \neq 1$ et $a \neq 0$

Question: peut-on donner une formulation explicite à ce type de suite?

Réponse: oui

Méthode: On considère la suite $\begin{cases} u_{n+1} = r u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

étape 1: calcul du point fixe:

On pose $f: x \mapsto r x + a$

et on cherche un nombre l tel que $f(l) = l$

ceci revient à calculer l tel que

$$r l + a = l \quad (\Leftrightarrow) \quad r l - l = -a$$

$$(\Leftrightarrow) \quad (r-1) l = -a$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \boxed{l = \frac{-a}{r-1}} \quad \text{on peut le faire car } r \neq 1$$

étape 2 suite auxiliaire

On définit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n - l$

on a alors $u_n = v_n + l$ et $v_0 = u_0 - l$

Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison r et de 1^{er} terme $v_0 = u_0 - l$.

Calculons $v_{n+1} = u_{n+1} - l$ mais $u_{n+1} = r u_n + a$

$$= r u_n + a - l$$

$$= r(v_n + l) + a - l$$

$$= r v_n + \underbrace{r l + a - l}$$

or l est un point fixe de f donc $f(l) = l \Leftrightarrow r l + a = l$
 $\Leftrightarrow \boxed{r l + a - l = 0}$

donc $\boxed{v_{n+1} = r v_n}$

Conclusion $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison r et de 1^{er} terme v_0

étape 3 Formulation explicite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

D'après l'étape 2, on a directement d'après le cours $v_n = v_0 r^n$

étape 4 Formule explicite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On sait que $u_n = v_n + l$, en remplaçant v_n par la formule de l'étape 3 on a:

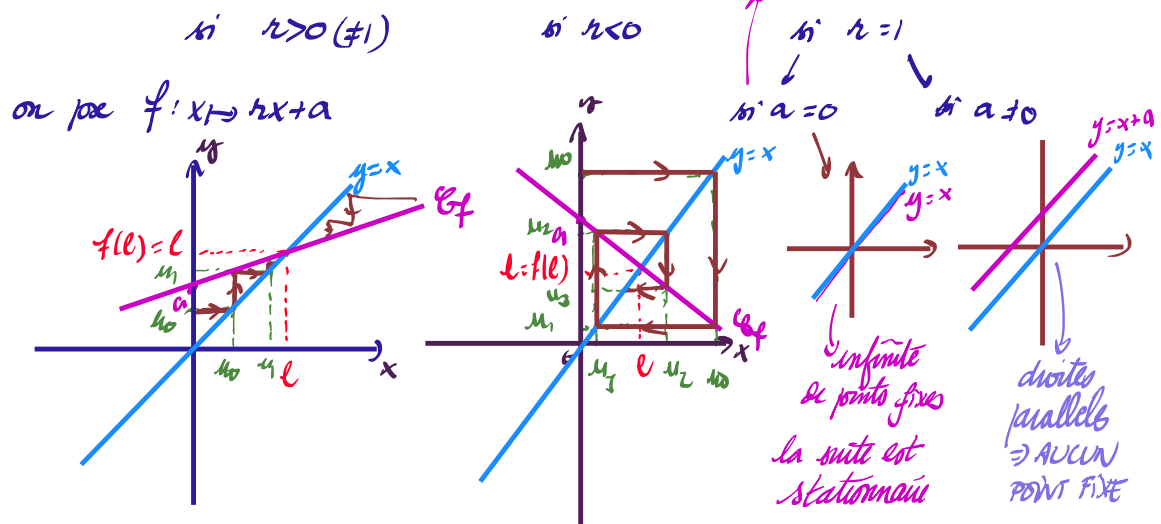
$$u_n = v_0 r^n + l \quad \text{or } v_0 = u_0 - l \text{ et } l = -\frac{a}{r-1}$$

donc

$$u_n = \left(u_0 + \frac{a}{r-1}\right) r^n - \frac{a}{r-1}$$

Représentation graphique

On utilise la formulation précédente:



Propriété des représentations graphiques pour une suite quelconque:

• FORMULATION EXPLICITE: on suppose $u_n = f(n)$

soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$

$\rightarrow$ si f est croissante, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

$\rightarrow$ si f est décroissante, " " décroissante

$\rightarrow$ si f est constante " " stationnaire

- FORMULATION PAR RECURRENCE on suppose $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$

→ si fait croissante

- si $u_0 < u_1$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
- si $u_0 > u_1$ " " est décroissante

→ si f est **DECROISSANTE**

la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est alternée

intervalle inclus dans $\mathbb{R}$

Dans cette partie, nous étudions les suites récurrentes (sous la forme
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$$
, avec $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$)

attention : ici $I \subset \mathcal{D}_f \rightarrow$ domaine de définition de f
ex: si $f(x) = \frac{1}{x}$ $\mathcal{D}_f =]-\infty[0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R}^*$
on peut prendre $I \subset]0, +\infty[$

Proposition: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I
et (ii) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, c'est-à-dire
qu'elle admet une limite l , et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$
alors l vérifie $f(l) = l$ autrement dit l est un point
fixe de f .

Preuve : on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$
 donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) = f(l)$
 et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = l$
 donc $l = f(l)$

$$E) \quad \boxed{f(l)}$$

Questions

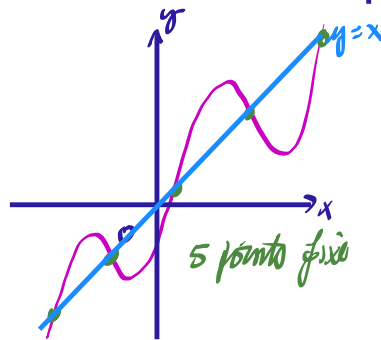
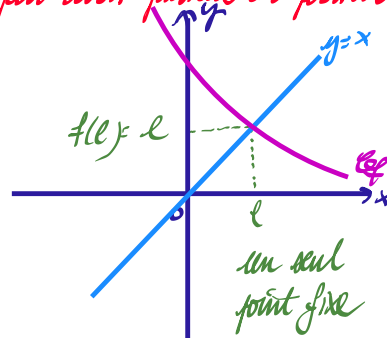
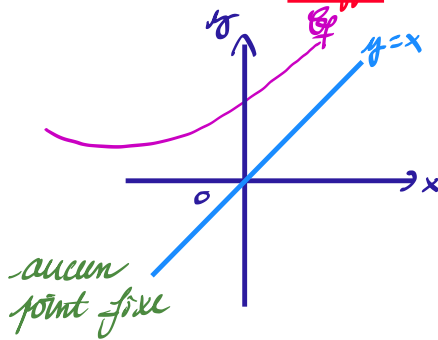
on veut
un plus
tard

① Comment montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente?
(est-ce que le point fixe est attractif ou répulsif?)

② Existe-t-il toujours un point fixe? Si oui, combien?

↳ Réponse: ça dépend complètement de f

en effet on peut avoir plusieurs cas possibles:



pour résumer
on calcule les solutions
de l'équation

$$\boxed{f(l) = l}$$

Entons de répondre à la question 1 : on suppose qu'on a trouvé un

Entons de répondre à la question 1 : on suppose qu'on a trouvé point fixe est-ce qu'il est attractif ou répulsif? C'est à dire est-ce que la suite converge ou pas?

Pour y répondre on a besoin d'un outil supplémentaire

Définition : STABILITÉ DE L'INTERVALLE

On dit qu'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

est stable par f si $f(I) \subset I$
 $\uparrow$ inclus dans

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

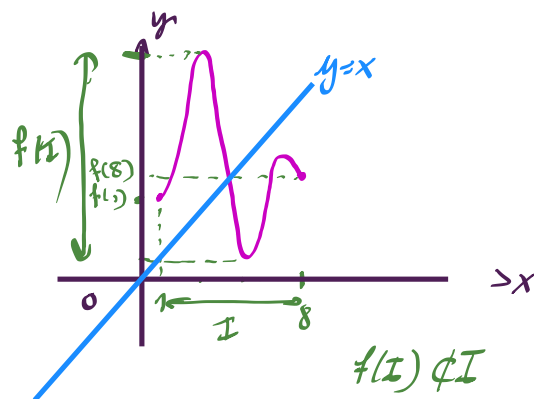
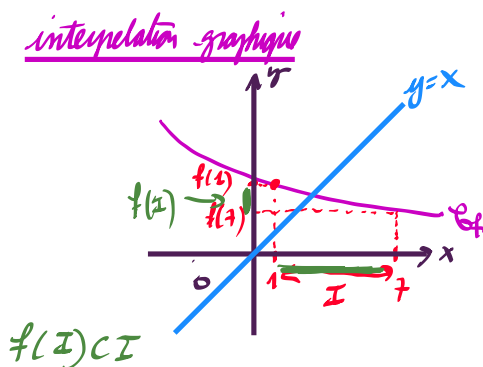
$$n=0 \quad u_1 = f(u_0)$$

$$n=1 \quad u_2 = f(u_1) = f(f(u_0))$$

$$n=2 \quad u_3 = f(u_2)$$

$$= f(f(f(u_0)))$$

$\underbrace{\quad}_{u_1}$
 $\underbrace{\quad}_{u_2}$



mathématiquement on écrit : si pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ alors I est stable par f

ex: si $I = [a, b]$, si $a \leq x \leq b$ implique $a \leq f(x) \leq b$
 alors $[a, b]$ est stable par f

Proposition : si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$

et si I est stable par f (càd $f(I) \subset I$)

alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donnée dans } I \end{cases}$

est définie c-à-d que tous les u_n existent!

condition nécessaire de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 (pour que le point fixe soit attractif)

(a) FONCTION STRICTEMENT CONTRACTANTE:

a) FONCTION STRICTEMENT CONTRACTANTE

Définition :

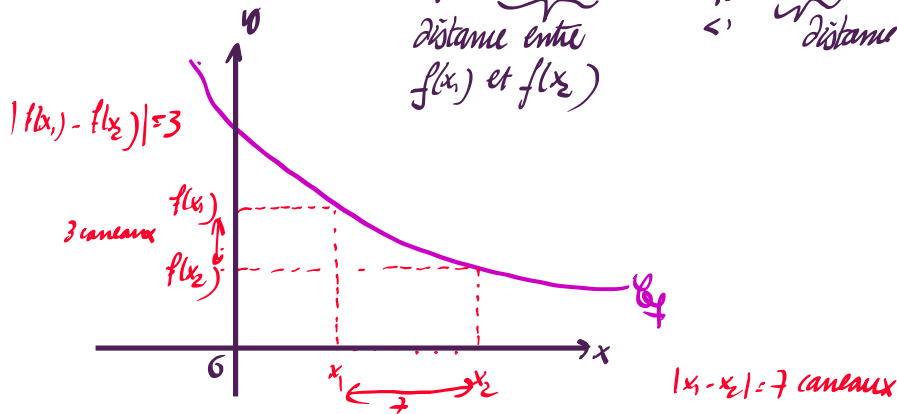
soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{Q}$

dire que f est strictement contractante sur I

signifie qu'il existe un nombre k , avec $\boxed{0 < k < 1}$

tel que pour tous x_1 et $x_2 \in I$ on a

$$\underbrace{|f(x_1) - f(x_2)|}_{\text{distance entre } f(x_1) \text{ et } f(x_2)} \leq \underbrace{k}_{< 1} \underbrace{|x_1 - x_2|}_{\text{distance entre } x_1 \text{ et } x_2}$$



on a bien $3 < k \cdot 7$

$\uparrow k < 1$ ici $k = \frac{1}{2}$ marche