

L1 - groupe 3 - 22 sept.

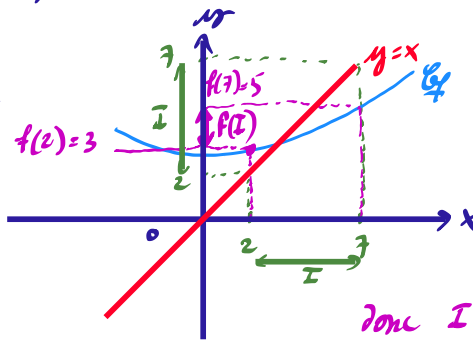
on considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & \text{et } f: x \mapsto f(x) \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$$

Rappel:

Définition stabilité d'un intervalle I

On dit qu'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est stable si $f(I) \subset I$

interprétation graphique:



on a $f(I) = [3, 5]$

et $I = [2, 7]$

on a bien $f(I) \subset I$
(car $[3, 5] \subset [2, 7]$)

donc I est stable par f .

mathématiquement on écrit : I est stable par f
s'écrit pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$

Exemple : si $I = [2, 7]$ on a $2 \leq x \leq 7$

si I est stable par f alors $2 \leq f(x) \leq 7$

Proposition Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{D}_f$ (domaine de définition de f)
 et si I est stable par f (càd $f(I) \subset I$)
 alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donnée dans } I \end{cases}$
 est bien définie (càd que tous les u_n appartiennent à $\mathbb{D}_f$)

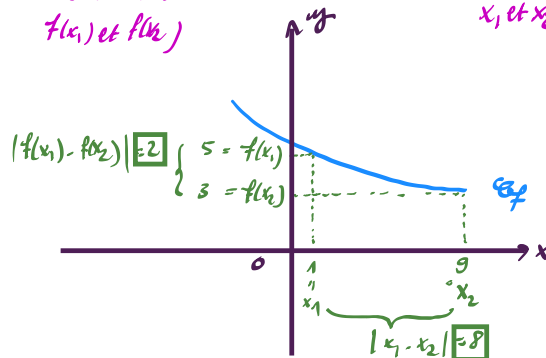
Exemple si $f: x \mapsto \sqrt{x}$ et $I = [0, +\infty[$ $x \in I$
 est-ce que I est stable par f ? oui car, si $x \geq 0$ alors $\sqrt{x} \geq \sqrt{0} = 0$
 $\sqrt{x} \geq 0$ càd $f(x) \in I$
 $\rightarrow$ donc I est stable par f
 si on considère la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n} \\ u_0 \in [0, +\infty[\end{cases}$ $\mathbb{D}_f = [0, +\infty[$
 comme $[0, +\infty[$ est stable par $f(\sqrt{\cdot})$, et comme $u_0 \in I = [0, +\infty[$ d'après
 la proposition précédente la suite est bien définie sur I

Fonction strictement contractante

Définition Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{D}_f$
 Dire que f est strictement contractante sur I signifie
 qu'il existe un nombre réel $0 < K < 1$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in I$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$$

distance entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ $\xrightarrow{K < 1}$ distance entre x_1 et x_2



$$|x_1 - x_2| \square$$

Question : comment trouver k ?

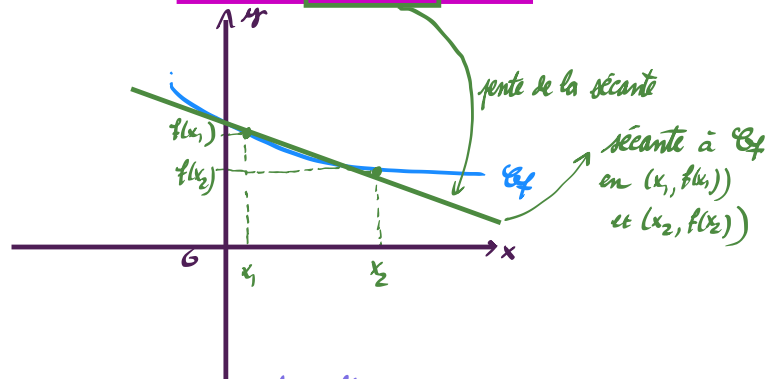
Méthode on vient de voir que si f est strictement contractante sur I alors

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2| \quad \text{avec } k < 1$$

$$\text{on divise par } |x_1 - x_2| \text{ d'où on a : } \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq k$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq k \quad \text{Rappel: si } |a| \leq k \text{ alors } -k \leq a \leq k$$

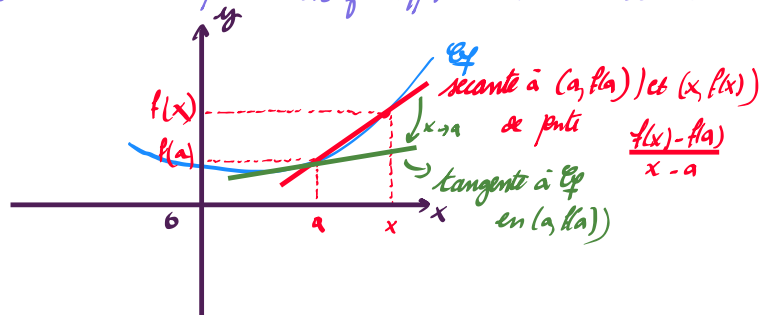
$$\Leftrightarrow -1 < -k \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq k < 1$$



Remarques: ① la condition $-1 < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 1$ signifie que les pentes de toutes les sécantes à f sur I doivent être comprises entre -1 et 1

② En pratique, il est difficile de montrer cette inégalité.

Pour contourner le problème on fait appel à la notion de dérivée



Que se passe-t-il si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ c'est-à-dire direction de la tangente

Remarque : on peut montrer (je ne le fais pas ici) que si pour tout $x \in I$

Remarque : on peut montrer (je ne le fais pas ici) que si pour tout $x \in I$

$$-1 < f'(x) < 1$$

alors

$$\text{pour tous } x_1 \text{ et } x_2 \in I \quad -1 < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 1$$

cad que f est strictement contractante

Par conséquent, pour montrer que f est strictement contractante il suffit de montrer que $-1 < f'(x) < 1$ pour tout $x \in I$,

$$\Leftrightarrow |f'(x)| < 1$$

encore mieux si on montre que $\max_{x \in I} |f'(x)| < 1$, alors $-1 < f'(x) < 1$ et donc f est strictement contractante sur I

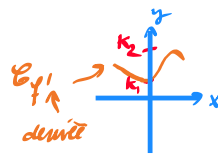
Méthode pour les exercices

en pratique pour montrer qu'une fonction f est strictement contractante sur I

① on donne f (énoncé)

② on calcule $f'(x)$ sur I

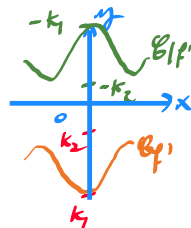
③ on encadre $f'(x)$: $k_1 \leq f'(x) \leq k_2$ pour tout $x \in I$



cas ① si k_1 et $k_2 > 0$ alors $\max_{x \in I} |f'(x)| = k_2$

si $k_2 < 1$, f est strict. contractante

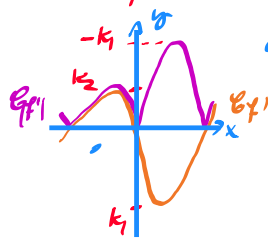
si $k_2 > 1$ f n'est PAS " "



cas ② si k_1 et $k_2 < 0$ $\max_{x \in I} |f'(x)| = -k_1$

si $-k_1 < 1$ f est STRICTEMENT CONTRACTANTE

si $-k_1 > 1$ f N'EST PAS " "



cas ③ si $k_1 < 0$ et $k_2 > 0$ on étudie le maximum entre $-k_1$ et k_2

si $\max(-k_1, k_2) < 1$, alors f est strict. contractante

> 1 f n'est pas " "

Rappel dérivées usuelles

f	f'
a	0
x	1

a	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

$$(x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}}$$



$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^2)' = 2u \cdot u'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

Exercice: Soit $f: x \mapsto x^2$, f est-elle strictement contractante sur I , quand I vaut:

- ① $I = [0, 2]$ ② $I = [0, 1]$ ③ $I = [0, \frac{1}{2}]$ ④ $I =]0, \frac{1}{2}[$ ⑤ $I = [-2, \frac{1}{2}]$

① $I = [0, 2]$ comme $f: x \mapsto x^2$ alors $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculons $k, s.t. f'(x) \leq k$

ici, $I = [0, 2]$ donc si $0 \leq x \leq 2$ alors $0 \leq 2x \leq 4$

$\uparrow$
 $f'(x)$

ici $\max_{x \in [0, 2]} |f'(x)| = 4 > 1$ donc f n'est pas strictement contractante sur $[0, 2]$

② $I = [0, 1]$ si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq 2x \leq 2$ donc $\max_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = 2 > 1$ donc f

n'est pas stric. contractante sur $[0, 1]$

③ $I = [0, \frac{1}{2}]$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ alors $0 \leq 2x \leq 1$ donc $\max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas

strictement contractante sur $[0, \frac{1}{2}]$

④ $I =]0, \frac{1}{2}[$ si $0 < x < \frac{1}{2}$ alors $0 < 2x < 1$

donc $\max_{x \in]0, \frac{1}{2}[} |f'(x)| = K < 1$ donc f est strictement contractante sur $]0, \frac{1}{2}[$

⑤ si $I = [-2, \frac{1}{2}]$ $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ donc $-4 \leq 2x \leq 1$ $\max(-(-4), 1) = \max(4, 1) = 4 > 1$

$\uparrow k_1 < 0$ $\uparrow k_2 > 0$

donc $\max_{x \in [-2, \frac{1}{2}]} |f'(x)| = 4$ donc f n'est pas strictement contractante sur $[-2, \frac{1}{2}]$

Proposition existence d'un point fixe

Soient $I = [a, b]$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

si en plus $[a, b]$ est stable par f (càd $f([a, b]) \subset [a, b]$)

alors f admet au moins un point fixe sur $[a, b]$

Théorème du point fixe (existence, unicité, attractivité)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ si

① f est continue sur I

② I est stable par f (càd $f(I) \subset I$)

③ f est strictement contractante sur I ($\max_{x \in I} |f'(x)| < 1$)

alors f admet un unique point fixe qu'on note ℓ , qui est attractif !

C'est-à-dire que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donnée proche de } l \end{cases}$

alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l !

on n'a pas besoin de connaître la valeur de l

Dans ce théorème

si par contre on peut calculer la valeur au point fixe l , dans un intervalle I
on utilise plutôt le théorème suivant

Théorème des points fixes attractifs et répulsifs

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donnée proche de } l \end{cases}$

On suppose f continue et dérivable sur I

On suppose que l est connue (on a calculé sa valeur)

alors ① $|f'(l)| < 1$ alors l est attractif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l

② $|f'(l)| > 1$ " l est répulsif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'éloigne de l

③ $f'(l) = 1$ on doit calculer $f''(l)$:

③.1 si $f''(l) \neq 0$ alors l est répulsif

③.2 si $f''(l) = 0$ alors il faut calculer $f'''(l)$

(i) si $f'''(l) > 0$ alors l est répulsif

(ii) si $f'''(l) < 0$, alors l est attractif

(iii) $= 0 \rightarrow$ on calcule $f^{(4)}(l)$...

④ si $f'(l) = -1$ on doit calculer

$$-2 f'''(l) - 3 (f''(l))^2$$

si < 0 l est attractif

si > 0 l est répulsif

FIN DU COURS