D. $\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n \\ u_0 = -20 \end{cases}$

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de la forme $u_{n+1} = r u_n$ avec u_0 donné
c'est donc une suite geométrique de raison $r = -\frac{1}{2}$ et de premier terme -20

2. D'après le cours, sa formulation explicite $u_n = u_0 r^n$, avec $r = -\frac{1}{2}$ et $u_0 = -20$
ça donne : $u_n = -20 . \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ attention : $-\frac{1}{2}^n \neq \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} < 0$ $\quad \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \ldots \left(-\frac{1}{2}\right)}_{n}$

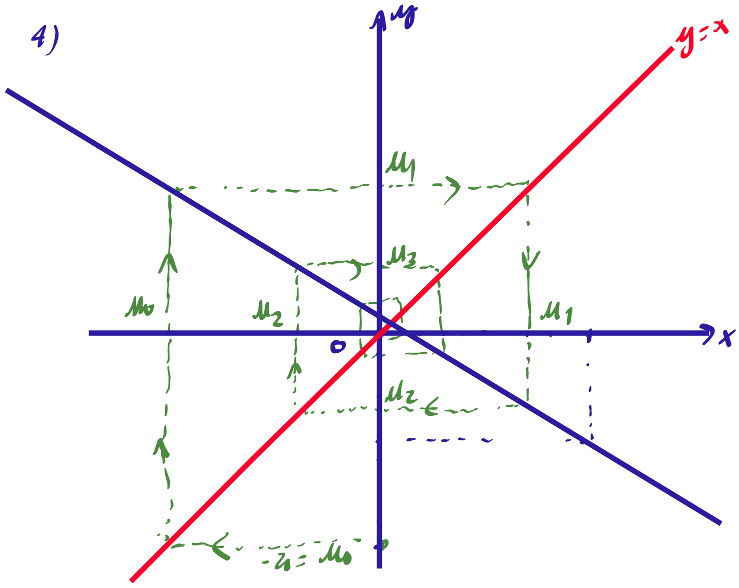
3. D'après le cours $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\right)$ avec $r \neq 1$
Ici, $n = 20$, $u_0 = -20$ et $r = -\frac{1}{2}$ ce qui donne

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} = -20 \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{21}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$= -20 \left(\frac{1 + \frac{1}{2^{21}}}{1 + \frac{1}{2}}\right) = -20 \left(\frac{1 + \frac{1}{2^{21}}}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= -\frac{40}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{21}}\right) \simeq -\frac{40}{3}$$

4)

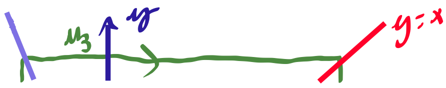


$u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n$
$= f(u_n)$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -\frac{1}{2} x$

(E) $\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n \\ u_0 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $u_{n+1} = r u_n$ avec u_0 donné, c'est donc une suite géométrique de raison $r=-3$ et de 1er terme $u_0 = -\frac{1}{3}$.
2. D'après le cours, sa formulation explicite est $u_n = u_0 \cdot r^n$ où $u_0 = -\frac{1}{3}$ et $r=-3$
donc ici $u_n = -\frac{1}{3}(-3)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
3. D'après le cours $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \cdot \left(\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right)$ avec $n=20$, $r=-3$ et $u_0 = -\frac{1}{3}$
ça donne $u_0 + u_1 + \dots + u_{20} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1-(-3)^{21}}{1-(-3)}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1+3^{21}}{4}\right) = -\frac{1}{12}(1+3^{21})$

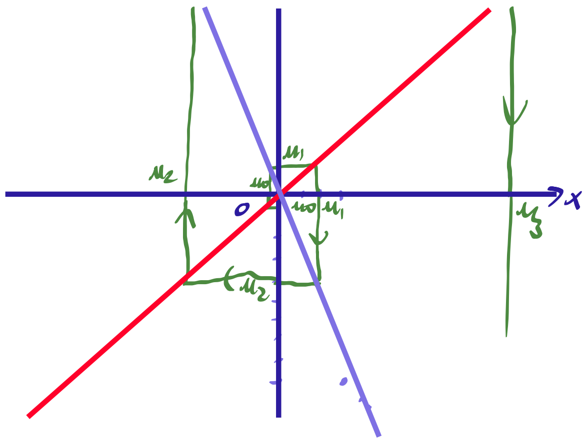


$u_{n+1} = -3u_n$
$= f(u_n)$

$= f(u_n)$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -3x$



Exercice 2

1. On pose u_n le nombre d'infectés au jour n
Au jour 0, il y a 2 malades, donc $u_0 = 2$
Le jour suivant, u_{n+1}, il y a 3 fois plus de malades que la veille. Donc $u_{n+1} = 3 \times u_n$.

C'est une suite géométrique, de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$

2. D'après le cours, la formulation explicite est :
$u_n = 2 \times 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3. Combien de jour n faut-il pour contaminer au moins k individus $(k > 2)$

$u_n \geq k$ (d'après la q2)

$\Leftrightarrow 2 \times 3^n \geq k$

$\Leftrightarrow 3^n \geq k/2$

$\Leftrightarrow n \ln 3 \geq \ln(k/2)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(k/2)}{\ln 3}$

a) pour $k = 100$

$n \geq \ln(100/2)$

$\Leftrightarrow \quad n \ln 3 \geq \ln(k/2)$

$$n \geq \frac{\ln(100/2)}{\ln 3}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln 50}{\ln 3} \simeq 3{,}56$$

$\rightarrow n = 4$

Donc 100 individus seront contaminés au bout de 4 jours.

b) pour $k = 10\,000$

$$n \geq \frac{\ln(5000)}{\ln(3)} \simeq 7{,}75$$

Donc 10000 individus seront contaminés au bout de 8 jours

c) pour $k = 1\,000\,000$

$$n \geq \frac{\ln(500\,000)}{\ln(3)} \simeq 11{,}94$$

Donc 1 000 000 d'individus seront contaminés au bout de 12 jours

d) pour $k = 68\,000\,000$

$$n \geq \frac{\ln(34\,000\,000)}{\ln(3)} \simeq 15{,}78$$

Donc 68 000 000 d'individus seront contaminés au bout de 16 jours

e) pour $k = 8\,000\,000\,000$

$n \geq 20{,}12$

Donc 8 milliards d'individus seront contaminés au bout de 21 jours.

Exercice 3

Rappel de cours (à savoir par coeur) : formulation explicite des suites arithmetico-geometriques

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = r u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

cas particuliers ① $\boxed{\text{si } r = 0}$ $\begin{cases} u_{n+1} = a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors stationnaire à partir de $n=1$

(2) $\boxed{\text{si } r=1}$ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

c'est une suite arithmétique → on sait faire

(3) $\boxed{\text{si } a=0}$ $\begin{cases} u_{n+1} = r u_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

c'est une suite géométrique → on sait faire

On suppose donc dans ce qui suit que $\boxed{r\neq 0,\ r\neq 1 \text{ et } a\neq 0}$

Question : comment déterminer la formulation explicite de $\begin{cases} u_{n+1} = r u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$?

$f(u_n) = r u_n + a$

$f(x) = r x + a$

Recherche d'un point fixe

étape 1 : On pose $f : x \longmapsto r x + a$

On recherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = \ell$

$$f(\ell) = \ell \iff r\ell + a = \ell$$

$$\iff r\ell - \ell = -a$$

$$\iff \ell(r-1) = -a$$

$$\iff \boxed{\ell = -a}$$ possible car $r \neq 1$

$\Leftrightarrow \boxed{\ell = \frac{-a}{r-1}}$ possible car $r \neq 1$

(***)

<u>étape 2</u> : <u>suite auxiliaire</u>

On pose $v_n = u_n - \ell$ (*) pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors $u_n = v_n + \ell$ (**) et $v_0 = u_0 - \ell$

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r :

$$v_{n+1} \overset{(*)}{=} u_{n+1} - \ell$$

$= r u_n + a - \ell$ (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique car $u_{n+1} = r u_n + a$)

$\underset{(**)}{=} r(v_n + \ell) + a - \ell$

$= r v_n + r\ell + a - \ell$

$= r v_n + \ell(r-1) + a$

$$v_{n+1} \underset{(***)}{=} r v_n + \frac{\cancel{-a}}{\cancel{r-1}} \cdot \cancel{(r-1)} \cancel{+a} = r v_n$$

<u>étape 3</u> : d'après le cours, on a alors $v_n = v_0 \cdot r^n$

et comme $u_n = v_n + \ell$ on a $u_n = v_0 \cdot r^n + \ell$ avec $v_0 = u_0 - \ell$
et $\ell = \frac{-a}{r-1}$

ce qui donne : $\boxed{u_n = \left(u_0 + \frac{a}{r-1}\right) r^n - \frac{a}{r-1}}$