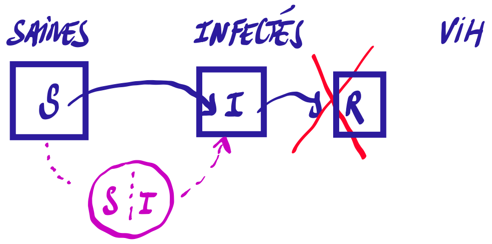
23 septembre 2025 - GROUPE 2




- **taux d'infectés** : 0.9 par mois

\+ **source extérieure** d'infectés : 100 par mois

au temps $\boxed{n=0}$ il y a 10 000 contaminés en France

ⓐ **mettre en place le modèle**

On note $u_n$ le nombre d'individus infectés au mois $n$

. Comme le nombre d'infectés au mois $n+1$ est 0.9 fois celui du mois $n$, auquel on ajoute une source de 100 contaminés par mois (extérieurs)

alors $\boxed{u_{n+1} = 0.9\,u_n + 100}$

De plus, au mois $n=0$, on suppose $u_0 = 10\,000$ contaminés

Pour résumer, le problème s'écrit sous la forme

$$\boxed{\begin{cases} u_{n+1} = 0.9\,u_n + 100 \\ u_0 = 10\,000 \end{cases}}$$

$\cdot\ u_0$

## ⓑ Étude du modèle

On reconnaît une suite ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE de raisons 0.9 et 100 et de premier terme 10 000.

FORMULATION EXPLICITE :

étape 1 : trouver le point FIXE

On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 0.9x + 100$

et on cherche $\underline{\ell \in \mathbb{R}}$ tel que $f(\ell)=\ell$

or $f(\ell)=\ell \iff 0.9\ell+100=\ell$

$\iff 100=\ell-0.9\ell$

$\iff 100=\ell(1-0.9)$

$\iff 100=\ell(0,1)=\frac{1}{10}\ell$

$\iff \boxed{\ell=1000}$

<u>étape 2</u> : <u>suite auxiliaire</u>

On note $v_n=u_n-1000$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ → alors $\boxed{u_n=v_n+1000}$

et $\boxed{v_0}=u_0-1000=10\,000-1000=\boxed{9000}$

<u>Calculons</u> $v_{n+1}$ :

$v_{n+1}=u_{n+1}-1000$ or $u_{n+1}=0.9u_n+100$

$=(0.9u_n+100)-1000$

$=0,9(v_n+1000)-900$

$=0.9v_n+0.9.1000-900$

$=0.9v_n+\frac{9}{\cancel{10}}.100\cancel{0}-900$

$\boxed{v_{n+1}=0.9v_n}$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0.9

et de 1er terme 9000.

<u>étape 3</u> : <u>Formulation explicite de</u> $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

D'après le cours $v_n=v_0.(0.9)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\boxed{v_n=9000.\left(\frac{9}{10}\right)^n}$$

<u>étape 4</u> : <u>Formulation explicite de</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

'après ce qui précède $\left(\frac{9}{10}\right)^n$

D'après ce qui précède $\boxed{u_n = v_n + 1000 = 9000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n + 1000}$

ⓒ Calculons $\lim_{n \to +\infty} u_n$

$$u_n = 9000 \underbrace{\left(\frac{9}{10}\right)^n}_{\xrightarrow{n \to +\infty}} + 1000$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 9000 \cdot 0 + 1000 = 1000$$

CRISPR

Rapel :

$y = x^4$
$n = 4$

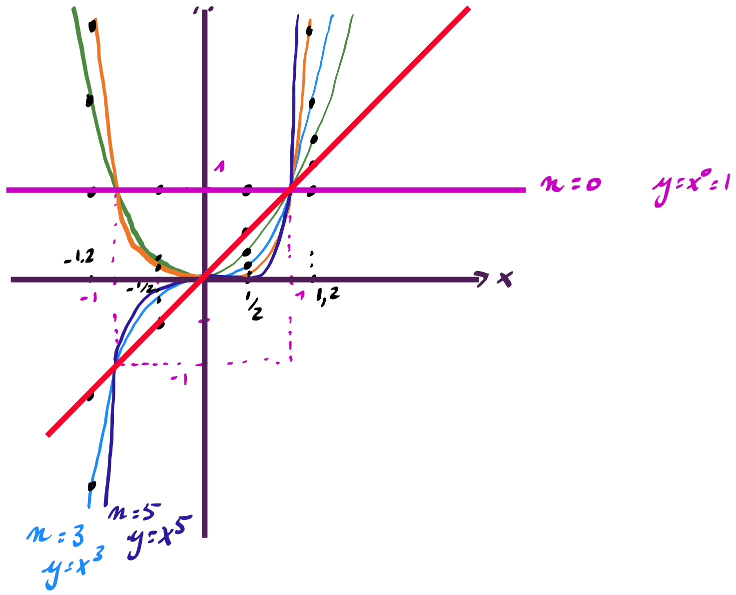
$y$

$y = x^2$
$n = 2$

$n = 1$ $y = x$

$x \mapsto x^n$

$n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

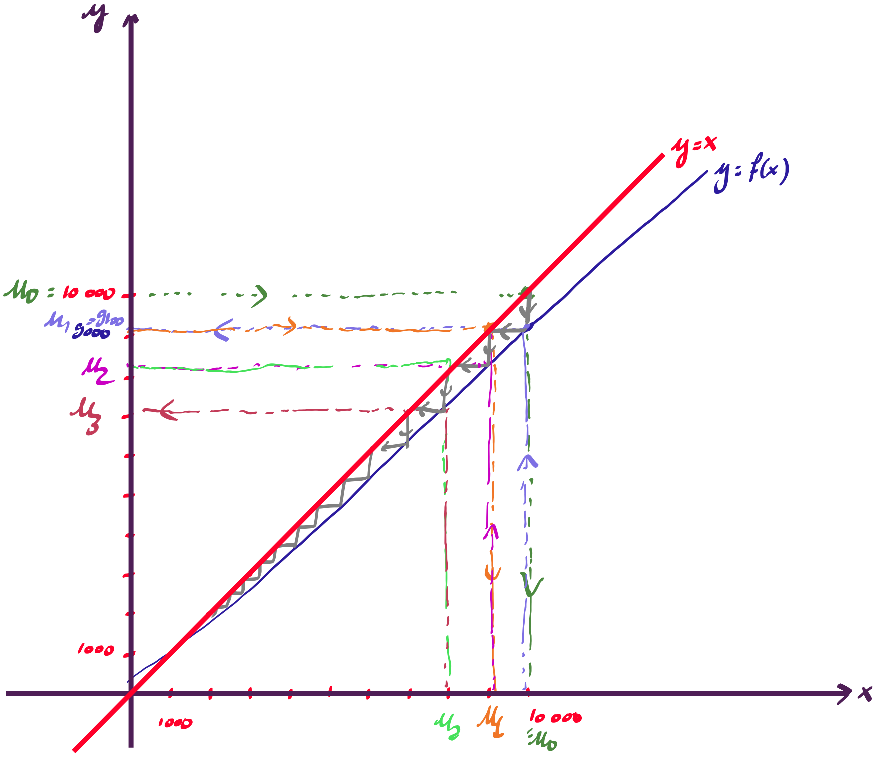

Si $x \in ]-1,1[$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$

Si $x \in ]1,+\infty[$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$

Si $x = 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$

Si $x \leq -1$ PAS DE LIMITE POUR $x^n$

$y$




$y = 0.9x+100$

$\underbrace{0.9\times 10000+100}_{9000+100=9100}$

$u_{n+1} = f(u_n)$

$u_1 = f(u_0)$

## Retour au cours :

- intervalle stable par $f$ : $f(I) \subset I$ (pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$)
- fonction strictement contractante : il existe $0 < k < 1$ t.q. pour tous $x_1, x_2 \in I$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k . |x_1 - x_2|$$

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq k < 1$$

$\lim_{x_1 \to x_2}$

$$|f'(x_2)| < 1$$

si $\max_{x \in I} |f'(x)| < 1$ alors $f$ est strict. contractante.

## Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathcal{D}_f$

si ○ $f$ est dérivable sur $I$

si ① $f$ est dérivable sur $I$

② $\max_{x \in I} |f'(x)| < 1$

alors $f$ est STRICTEMENT CONTRACTANTE sur $I$

**Proposition** : EXISTENCE D'UN POINT FIXE :

Soient $I = [a,b]$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue

si en plus $f([a,b]) \subset [a,b]$ ($[a,b]$ est STABLE par $f$)

**Alors** $f$ admet AU MOINS un point fixe sur $[a,b]$.

## Théorème du POINT FIXE : EXISTENCE & UNICITÉ DU POINT FIXE

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset D_f$

si ① $f$ est continue sur $I$

② $I$ est stable par $f$

③ $f$ est strictement contractante sur $I$

alors $f$ admet $\boxed{\text{un unique point fixe } \ell}$

et la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in I \end{cases}$ converge vers $\ell$ ($\boxed{\ell \text{ est ATTRACTIF}}$)

$f(x) = 0{,}9x + 100$

$I = [1000, 10000]$

si $1000 \leq x \leq 10000$

alors $1000 \leq f(x) \leq 10\,000$

si $1000 \leq x \leq 10\,000$

$900 \leq 0{,}9x \leq 9000$

$1000 \leq \underbrace{0{,}9x + 100}_{f(x)} \leq 9100 \leq 10\,000$

**Question :** que se passe-t-il si on a plusieurs points fixes ?
Comment déterminer lesquels seront attractifs, répulsifs (ou attractifs d'un côté et répulsifs de l'autre)

## Théorème POINTS FIXES ATTRACTIFS & POINTS FIXES RÉPULSIFS

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset D_f$, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par

$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in I \text{ donné} \end{cases}$

On suppose $f$ continue et dérivable sur $I$

Si on arrive à calculer les points fixes $\ell$ de $f$ (on arrive à trouver leur valeur exacte)

alors ① $\boxed{\text{si } |f'(\ell)| < 1}$ alors $\ell$ est ATTRACTIF

② $\boxed{\text{si } |f'(\ell)| > 1}$ " $\ell$ est RÉPULSIF

③ $\boxed{\text{si } f'(x) = 1}$ → on doit calculer $f''(\ell)$

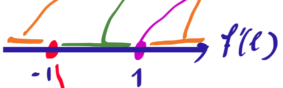
ⓐ si $f''(\ell) \neq 0$ alors $\ell$ est RÉPULSIF

ⓑ si $f''(\ell) = 0$ on doit calculer $f'''(\ell)$

(i) si $f'''(\ell) > 0$ $\ell$ est RÉPULSIF

(ii) $f'''(\ell) < 0$ $\ell$ est ATTRACTIF

(iii) $f'''(\ell) = 0$ on calcule $f''''$...




④ $\boxed{\text{si } f'(x) = -1}$ on calcule

$f'''(\ell) - 3(f''(\ell))^2$ : si $< 0$ $\ell$ est

$-2 \cdot f'''(\ell) - 3(f''(\ell))^2$ : si $<0$ $\ell$ est ATTRACTIF

si $>0$ $\ell$ est REPULSIF

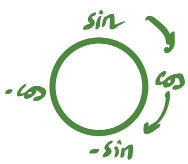
si $=0$ on ne peut pas conclure...

– FIN DU COURS –

**RAPPEL :**

| | $f$ | $f'$ |
|---|---|---|
| | $a$ | $0$ |
| | $x$ | $1$ |
| | $ax+b$ | $a$ |
| | $x^2$ | $2x$ |
| | $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $x^{1/2}$ | $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $x^{-1}$ | $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ |
| | $\sin x$ | $\cos x$ |
| | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| | $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| | $e^x$ | $e^x$ |

$$(u+v)' = u'+v'$$
$$(uv)' = u'v+uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$




**Exercice :** Est-ce que $f : x \longmapsto x^2$ est STRICTEMENT CONTRACTANTE sur

① $[0,2]$ ?

② $[0,1]$ ?

③ $[0,\frac{1}{2}]$ et $]0,\frac{1}{2}[$

④ $[-2,1[$

$$\max_{x\in I} |f'(x)| = ?$$