

14 octobre 2025

exercice: soit $f: x \mapsto x^2$ est-elle strictement contractante sur :

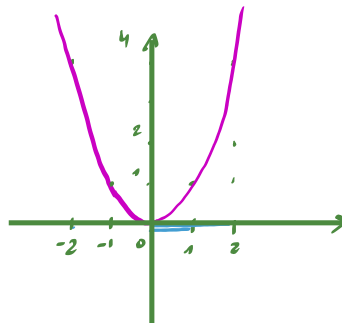
a. $[0, 2]$

b. $[0, 1]$

c. $[0, \frac{1}{2}]$

d. $]0, \frac{1}{2}[$

e. $[-2, 1[$



Solution: a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 2]$

On calcule la dérivée : $f'(x) = 2x$

calculer la dérivée : $f'(x) = 2x$

Cherchons $\max_{x \in [0;2]} |f'(x)|$:

$$\text{sur } [0;2] \quad f'(x) = 2x \geq 0$$

$$\text{donc } |f'(x)| = f'(x)$$

Par hypothèse : $0 \leq x \leq 2$

$$\text{donc } 0 \leq 2x \leq 4 \quad \nearrow \times 2$$

Conclusion $\max_{x \in [0;2]} |f'(x)| = 4 > 1$ donc f n'est pas strictement contractante sur $[0;2]$

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$

On calcule la dérivée $f'(x) = 2x$

cherchons $\max_{x \in [0;2]} |f'(x)|$

$$\text{sur } [0;1] \quad f'(x) = 2x \geq 0$$

$$\text{donc } |f'(x)| = f'(x)$$

Par hypothèse $0 \leq x \leq 1$

$$\text{donc } 0 \leq 2x \leq 2$$

Conclusion :

$$\max |f'(x)| = 2 > 1$$

$$\max_{x \in [0; 1]} |f'(x)| = 2 > 1$$

donc f' est pas strictement

contractante sur $[0; 1]$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; 1/2]$

on calcule la dérivée : $f'(x) = 2x$

cherchons $\max_{x \in [0; 1/2]} |f'(x)| :$

$$\text{sur } [0; 1/2] \quad f'(x) = 2x \geq 0$$

donc $|f'(x)| = f'(x)$ (car positif)

$$\text{Par hypothèse } 0 \leq x \leq 1/2 \quad \downarrow \times 2$$

$$\text{donc } 0 \leq 2x \leq 1$$

$$\text{Conclusion : } \max_{x \in [0; 1/2]} |f'(x)| = 1 \geq 1$$

donc f n'est pas strictement contractante sur $[0; 1/2]$

d) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0; 1/2[$. On calcule la

dérivée : $g'(x) = 2x$. cherchons $\max_{x \in]0; 1/2[} |g'(x)| :$

sur $]0; 1/2[$ $g'(x) = 2x > 0$ donc $|g'(x)| = g'(x)$

$$\text{Par hypothèse : } 0 < x < 1/2 \quad \downarrow \times 2$$

$$\text{donc } 0 < 2x < 1$$

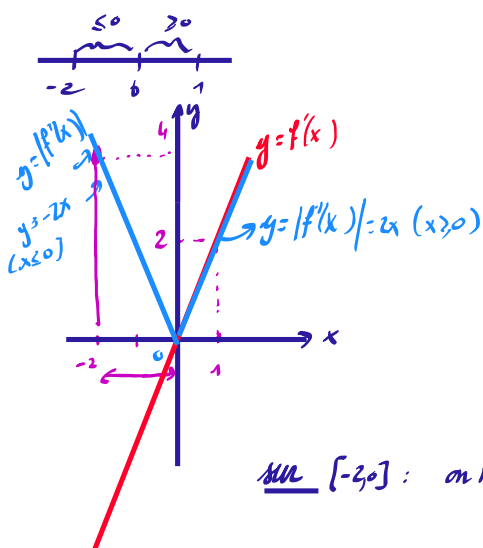
Conclusion : $\max_{x \in]0; 1/2[} |g'(x)| < 1$ donc g est strictement contractante sur $]0; 1/2[$.

e. sur $[-2; 1]$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-2; 1]$

e. sur $[-2;1[$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-2;1[$
 et dérivée $f'(x) = 2x$

Déterminons $\max_{x \in [-2;1[} |f'(x)|$:

Or, sur $[-2;1[$ $f'(x) = 2x$ change de signe!! en effet $\boxed{-2 \leq x \leq 0}$, $-4 \leq 2x \leq 0$



ainsi sur $[-2;0]$: $|f'(x)| = -f'(x) = \boxed{-2x}$
 ↑ attention

si $0 \leq x < 1$ $0 \leq 2x < 2$
 ↓
 alors $f'(x) > 0$

ainsi sur $[0;1[$ $|f'(x)| = f'(x) = \boxed{2x}$

sur $[-2;0]$: on note $\boxed{k_1} = \max_{x \in [-2;0]} |f'(x)| = \max_{x \in [-2;0]} -f'(x) = \max_{x \in [-2;0]} -2x = \boxed{4}$

$x(-2) \downarrow$ $-2 \leq x \leq 0$
 $4 \geq -2x \geq 0$
 ↑

sur $[0;1[$ on note $k_2 = \max_{x \in [0;1[} |f'(x)| = \max_{x \in [0;1[} f'(x) = \max_{x \in [0;1[} 2x < 2$

↑ $0 \leq x < 1$
 donc $0 \leq 2x < 2$

Conclusion: $\max_{x \in [-2;1[} |f'(x)| = \max(k_1, k_2) = \boxed{4} > 1$ donc f n'est pas strictement contractante sur $[-2;1[$

Examen 2021 : exercice 2

Soit $f: x \mapsto \frac{x+2}{x-5} + 1$

1. $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}; x-5 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 5\} = \mathbb{R} \setminus \{5\} = \mathbb{R} - \{5\} =]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$

2. sur $\mathcal{D}_f$, f est continue comme quotient de fonctions continues ($x \mapsto x+2$, et $x \mapsto x-5$ (int des polynômes)) et comme somme de fonctions continues $x \mapsto \frac{x+2}{x-5}$ et $x \mapsto 1$ (constante)

3. Soit $x \in [0,1] \subset \mathcal{D}_f$

(a) $f'(x) = \frac{1 \cdot (x-5) - (x+2) \cdot 1}{(x-5)^2} + 0$ car $f(x) = \frac{u}{v} + c$ ni $u: x \mapsto x+2$ et $c: x \mapsto 1$

donc $f'(x) = \frac{x-5-x-2}{(x-5)^2} = \frac{-7}{(x-5)^2}$

$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} + 0$

alors $u' = 1$ et $c' = 0$
 $v' = 1$

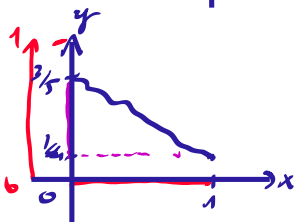
(b) sur $[0,1]$: $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2} < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0,1]$

(c) $f(0) = \frac{0+2}{0-5} + 1 = -\frac{2}{5} + 1 = -\frac{2}{5} + \frac{5}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$

$f(1) = \frac{1+2}{1-5} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = -\frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

Étude de f :

	x	0	1
signe de $f'(x)$			-
variations de f		$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$



Est-ce que $f([0,1]) \subset [0,1]$?

ou si $x \in [0,1]$

on vient de montrer que $0 \leq \frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{3}{5} \leq 1$

conclusion $f([0,1]) = [\frac{1}{4}, \frac{3}{5}] \subset [0,1]$

Donc $[0,1]$ est stable par f !

(d) Calculons $f''(x)$

soit $x \in [0,1]$ $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ et dérivé $\frac{u'v - uv'}{v^2}$

où $u = -7$ alors $u' = 0$
 $v = (x-5)^2$ alors $v' = 2(x-5) \cdot 1$
Rappel: $(f^2)' = 2 \cdot f \cdot f'$
 $(u^2)' = 2u u'$

$$\text{Ainsi } f''(x) = \frac{0(x-5)^2 - (-7) \cdot 2(x-5) \cdot 1}{(x-5)^4}$$

$$= \frac{14 \cdot (x-5)}{(x-5)^4} = \boxed{\frac{14}{(x-5)^3}}$$

(e) Sur $[0,1]$ $f''(x) = \frac{14}{(x-5)^3} > 0$

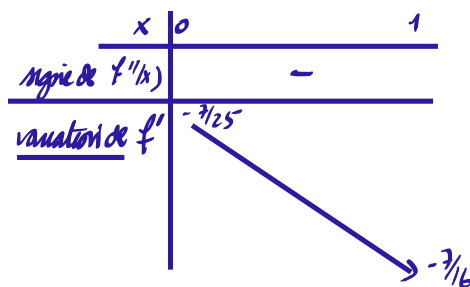
→ signe de $(x-5)^3$ sur $[0,1]$

avec $0 \leq x \leq 1$
 $-5 \leq x-5 \leq 1-5 = -4 < 0$
 ↓ ainsi $(x-5)^3 < 0$

Conclusion sur $[0,1]$ $f''(x) < 0$ donc f' est ↓

(f) $f'(0) = \frac{-7}{(0-5)^2} = -\frac{7}{25}$

$f'(1) = \frac{-7}{(1-5)^2} = \frac{-7}{(-4)^2} = -\frac{7}{16}$



Calculons $\max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$

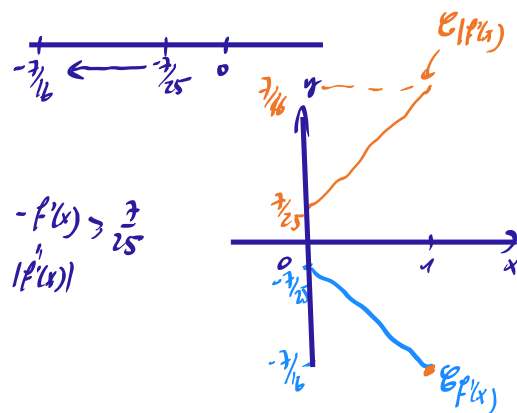
on sur $[0,1]$ $f'(x) < 0$

ainsi $|f'(x)| = -f'(x) = \frac{7}{(x-5)^2}$

et si $\frac{7}{16} \leq f'(x) \leq -\frac{7}{25}$ alors

$\frac{7}{16} \geq -f'(x) \geq \frac{7}{25}$
 $|f'(x)|$

donc $\max_{x \in [0,1]} |f'(x)| = \frac{7}{16} < 1$



Donc f est strictement contractante sur $[0,1]$

4) D'après 2) f est continue sur $[0,1]$

D'après 3).c. $[0,1]$ est stable par f

D'après 3) f, f est strictement contractante sur $[0,1]$

Conclusion d'après le théorème du point fixe, il existe unique point fixe $l \in [0,1]$ qui est attractif.

De plus, si une suite $x_{n+1} = f(x_n)$, et t.q. $x_0 \in [0,1]$ cette suite converge vers l .

4)a. On a $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \in [0,1] \end{cases}$ comme $[0,1] \subset \mathbb{Q}$ et comme d'après 3)c. $[0,1]$ est stable par f si $x_0 \in [0,1]$ alors tous les x_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$ restent dans $[0,1]$.

Actuellement, aucune x_n ne peut prendre la valeur 5 donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie

b. D'après la conclusion de la question 3.g. comme $x_0 \in [0,1]$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le point fixe l (qui est attractif)

c. Calculons l t.q. $f(l) = l$ avec $l \in [0,1]$

$$\frac{l+2}{l-5} + 1 = l \Leftrightarrow \frac{l+2}{l-5} = l-1$$

Rappel: $ax^2 + bx + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{si } \Delta > 0 \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow l+2 = (l-1)(l-5)$$

$$\Leftrightarrow l+2 = l^2 - 5l - l + 5$$

$$\Leftrightarrow 0 = l^2 - 5l - l + 5 - l - 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = l^2 - 7l + 3$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 3 = 49 - 12 = 37 > 0$$

on a donc 2 solutions réelles:

$$l_1 = \frac{7 - \sqrt{37}}{2} \approx \frac{1}{2} \in [0,1]$$

$$\text{et } l_2 = \frac{7 + \sqrt{37}}{2} \approx \frac{13}{2} \notin [0,1]$$

$\mathcal{L}$ a unique point fixe et $\ell_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{2} \approx \frac{1}{2}$

(d) si $|f'(\ell_1)| < 1$ alors d'après le théorème du point fixe attractif on a alors, la suite (x_n) converge vers ℓ_1

il suffit de montrer que $|f'(\ell_1)| < 1$

$$\left| \left(\ell_1 - \frac{7}{5} \right)^2 \right| = \left| \left(\frac{7-\sqrt{37}}{2} - 5 \right)^2 \right| \rightarrow \left| \frac{-7}{2 \left(\frac{1}{2} - 5 \right)^2} \right| = \left| \frac{-7}{(-9/2)^2} \right| = \frac{7}{81} < 1$$

Examen 2024.

$$f: x \mapsto 3 - 3x$$

exercice : $f: x \mapsto 3 - \frac{3x}{x+4}$

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x+4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -4\} = \mathbb{R} \setminus \{-4\} = \mathbb{R} - \{-4\}$
 $=]-\infty, -4[\cup]-4, +\infty[$

2. f est continue comme différence de 2 fonctions continues,
 $x \mapsto 3$ et $x \mapsto \frac{3x}{x+4}$ qui est continue comme quotient de 2 fonctions
 continues $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto x+4$ sur D_f .

3. On considère $x \in [0, 4]$

a. Soit $x \in [0, 4] \subset D_f$ alors

$$f'(x) = 0 - \frac{3(x+4) - 3x \cdot 1}{(x+4)^2}$$

$$= - \frac{3x+12-3x}{(x+4)^2} = - \frac{12}{(x+4)^2}$$

$$f(x) = 3 - \frac{3x}{x+4}$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = 0 - \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

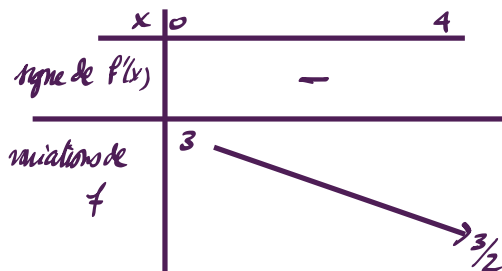
$$u = 3x \quad u' = 3$$

$$v = x+4 \quad v' = 1$$

b. Comme $-12 < 0$ et $(x+4)^2 > 0$ on a $f'(x) = \frac{-12}{(x+4)^2} < 0$ pour tout $x \in D_f$
 donc sur $[0, 4]$

Par conséquent f est strictement décroissante sur $[0, 4]$

c. $f(0) = 3 - \frac{3 \cdot 0}{0+4} = \boxed{3}$ et $f(4) = 3 - \frac{3 \cdot 4}{4+4} = 3 - \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{6-3}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$



Comme f continue et strictement
 décroissante on a

$$f([0, 4]) = [f(4); f(0)] = [\frac{3}{2}; 3] \subset [0, 4]$$

car $\frac{3}{2} > 0$ et $3 \leq 4$

Conclusion $[0, 4]$ est stable par f .

(d) Calculons $f''(x)$

Soit $x \in [0, 4]$ $f'(x) = \frac{12}{(x+4)^2}$

Rappel : $(f'(x))' = 2f'(x) \cdot f'(x)$

$u = 12 \quad u' = 0$
 $v = (x+4)^2 \quad v' = 2(x+4) \cdot 1$

$$(x+4)^2 \rightarrow V \quad V = (x+4)^2 \quad V' = 2(x+4) \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f''(x) &= - \frac{0 \cdot (x+4)^2 - 12(2 \cdot (x+4))}{(x+4)^4} \\ &= - \frac{-24(x+4)}{(x+4)^4} \\ &= \boxed{\frac{24}{(x+4)^3}} \end{aligned}$$

(e). Comme $x \in [0, 4]$ on a $x \geq 0$ donc $x+4 \geq 4 > 0$

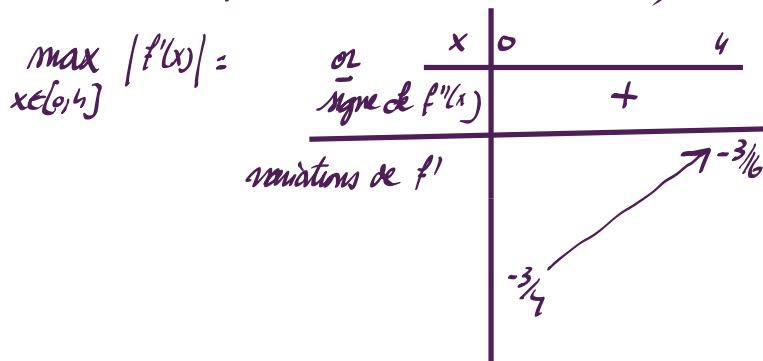
Ainsi $(x+4)^3 > 0$, d'autre part $24 > 0$, par conséquent

$$f''(x) = \frac{24}{(x+4)^3} > 0 \text{ sur } [0, 4] \text{ donc } f' \text{ est } \boxed{\text{strictement croissante}} \text{ sur } [0, 4]$$

$$(f) \quad f'(0) = - \frac{12}{(0+4)^2} = - \frac{12}{4^2} = - \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

$$f'(4) = - \frac{12}{(2+4)^2} = - \frac{3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2} = \boxed{-\frac{3}{16}}$$

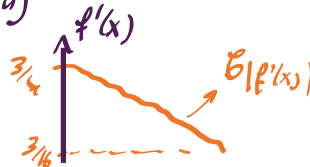
Pour montrer que f est strictement contractante, calculons

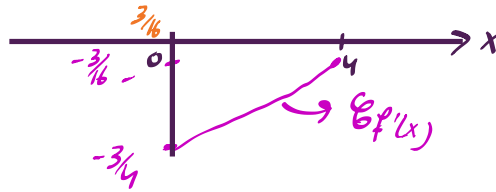


on a sur $[0, 4]$ $f'(x) < 0$ donc $|f'(x)| = -f'(x)$

et f' est strictement croissante donc $-f'(x)$ est strict. décroissante

$$\text{Par conséquent } \max_{x \in [0, 4]} |f'(x)| = \max_{x \in [0, 4]} -f'(x) = -(f'(0)) = -(-\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$$





En conclusion $\max_{x \in [0,4]} |f'(x)| = \frac{3}{4} < 1$ donc f est strictement contractante sur $[0,4]$

(9) D'après ce qui précède:

- f est continue sur $[0,4]$
- $[0,4]$ est stable par f
- f est strictement concave sur $[0,4]$

Donc d'après le théorème du point fixe, f admet un unique point fixe $l \in [0,4]$ et l est attractif.

4. (E) $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \in [0,4] \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

- a. Comme $x_0 \in [0,4]$ et $[0,4]$ est stable par f alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, chacun des $x_n \in [0,4]$ (car $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)
Conclusion aucun des x_n ne peut prendre la valeur -4 donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

- b. D'après 3.g. sur $[0,4]$ il existe un unique point fixe l qui est attractif donc toute suite ayant $x_0 \in [0,4]$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ce l .

- c. (Bonus), Pour montrer que l est attractif, il faut calculer la valeur de l (solution de $f(l) = l$) et
 si $|f'(l)| < 1$ alors l est attractif si $f'(l) = 1$ il faut chercher $f''(l)$...
 et si $f'(l) = 1$ " " Appliquez la formule du cours

ici $f(l) = l \Leftrightarrow 3 - \frac{3l}{4} = l$

$$\text{iii } f(l) = l \Leftrightarrow 3 - \frac{3l}{l+4} = l$$

$$\Leftrightarrow 3 - l = \frac{3l}{l+4}$$

$$\Leftrightarrow (3-l)(l+4) = 3l$$

$$\Leftrightarrow 3l + 12 - l^2 - 4l = 3l$$

$$\Leftrightarrow \cancel{3l} + 12 - l^2 - 4l - \cancel{3l} = 0$$

$$\Leftrightarrow -l^2 - 4l + 12 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 12 \cdot (-1)$$

$$= 16 + 4 \cdot 12$$

$$= 4 \cdot 4 + 4 \cdot 12$$

$$= 4(4+12) = 4 \cdot 16 = 2^2 \cdot 4^2 = (2 \cdot 4)^2 = 8^2$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{si } \Delta > 0$$

$$\text{on a } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

on a 2 valeurs de l possibles:

$$l_1 = \frac{4 - \sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{4 - 8}{-2} = \frac{-4}{-2} = \boxed{2}$$

$$l_2 = \frac{4 + \sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{4 + 8}{-2} = \frac{12}{-2} = \boxed{-6}$$

on $l \in [0, 4]$ la seule solution est $\boxed{l_1 = 2}$

$$\text{Calculons } f'(2) = -\frac{12}{(2+4)^2} = -\frac{12}{36} = -\frac{12}{3 \cdot 12} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

donc $|f'(2)| = \frac{1}{3} < 1 \rightarrow$ donc $|f'(l)| < 1$ donc l est attractif.

(d) D'après 3.b f est décroissante sur $[0, 4]$

donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ALTERNÉE