Laurent PUJO-MENJOUET
↑ PAS DE T

DOUA - BÂT BRACONNIER BUREAU 246
pujo@math.univ-lyon1.fr
math.univ-lyon1.fr\~pujo

Chapitre 1
Introduction sur les suites

1. Exemple :

On suppose qu'on a une somme s_0 en euros que l'on va placer à un taux de revenu annuel de 10%

exemple : $s_0 = 50$ euros au bout d'un an on augmente de 10%

exemple : $S_0 = 50$ euros au bout d'un an on augmente de 10%

100 euros $\longrightarrow$ 10 euros

S_0 euros $\longrightarrow$ $\frac{S_0 \times 10}{100} = 0.1 \times S_0$

si $S_0 = 50$ on aura augmenté de $0.1 \times 50 = 5$ euros donc

donc $S_1 = S_0 + 0.1 S_0 = S_0 (1 + 0.1) = \boxed{1.1 S_0}$

$S_2 = 1.1 \times S_1 = 1.1 \times (1.1 S_0) = (1.1)^2 S_0$

$S_3 = (1.1)^3 S_0$

$\vdots$

$S_{10} = (1.1)^{10} S_0 \simeq 2{,}5937... \times S_0$

si $S_0 = 50$ $S_{10} = 129.68$ euros soit un gain de : 79.68 euros.

Au bout de combien d'années a-t-on un gain de 100 euros ?

2. Définition :

a. suite : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

(fonction)

On appelle suite toute application $f\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

On appelle *suite* toute application $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$

nombre

On note une telle application : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

le nombre u_n est appelé *terme général* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ATTENTION : ne pas confondre u_n : nombre (par exemple : 17)

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: la fonction (la suite)

(c'est un ensemble de nombre)

donc il ne faut PAS écrire : la suite ~~u_n~~ est croissante

MAIS la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Remarque : si on a $\begin{array}{l} \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u_n \end{array}$ $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

la suite se note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

6. Il existe 2 façons de décrire les suites :

① formulation explicite $u_n = f(n)$ ex : $u_n = \sqrt{n}$

② formulation par recurrence $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = a \end{cases}$ $(a \in \mathbb{R})$

Avantage de la formulation explicite : si on veut u_{500} on calcule $f(500)$
par contre avec la " par recurrence : " " " u_{500} il faut calculer
u_{499} puis u_{498} puis ... puis u_1

Remarque : (hors programme) dans la modélisation les suites peuvent être définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ (récurrence à un pas)

mais encore $u_{n+1} = f(u_{n-1}, u_n)$ (récurrence à 2 pas)

" $u_{n+1} = f(u_{n-2}, u_{n-1}, u_n)$ (— 3 pas)

suite de Fibonacci

$u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$

$u_2 = u_0 + u_1 = 0+1 = 1$

$u_3 = u_1 + u_2 = 1+1 = 2$

$u_4 = u_2 + u_3 = 1+2 = 3$

$0, 1, \overset{+}{1}, \overset{+}{2}, 3$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

FORMULATION EXPLICITE : exemple :

$$u_n = f(n) \text{ avec ici } f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

donc $u_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $n \in \mathbb{N}$ (càd $n \geq 0$)

$u_0 = \sqrt{0} = 0$

$u_1 = \sqrt{1} = 1$

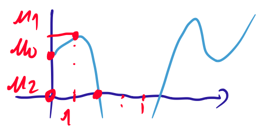
$u_2 = \sqrt{2}$

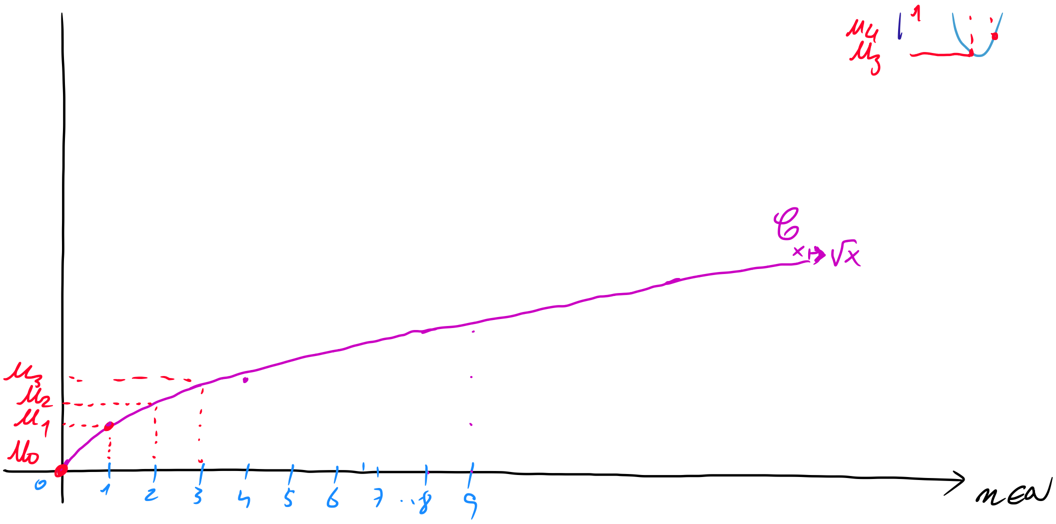
$u_3 = \sqrt{3}$

$\vdots$

Représentation graphique :

$u_n \in \mathbb{R}$



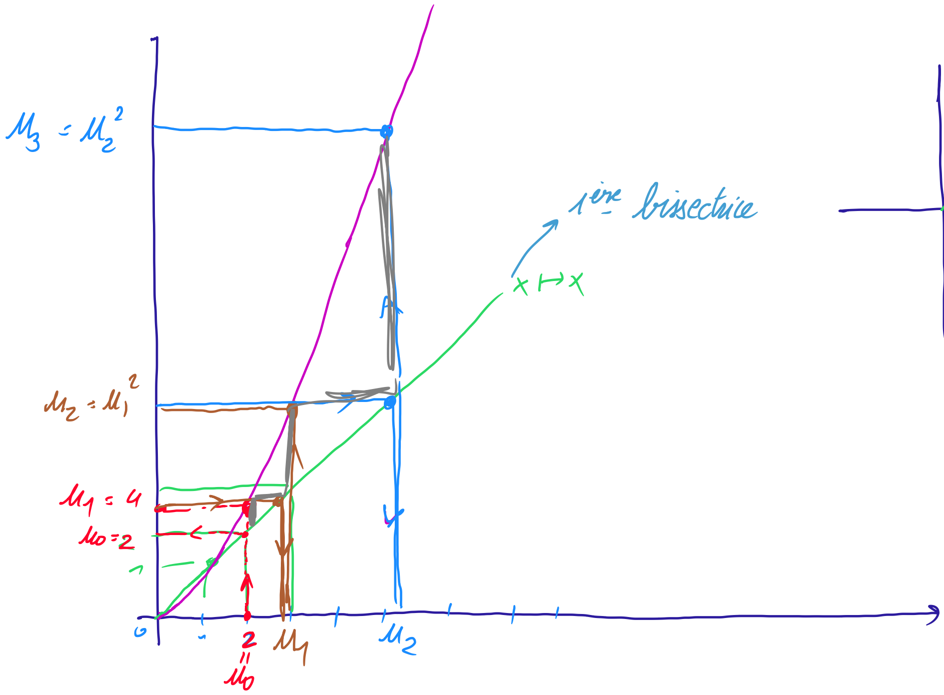


FORMULATION PAR RÉCURRENCE

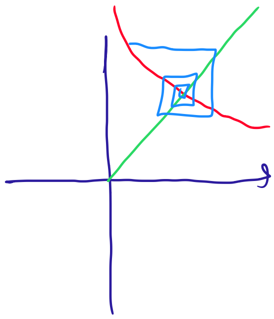
exemple : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = a \end{cases}$ ici : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ $u_0 = 2$ $(a=2)$

on a alors $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

$u_0 = 2$ $u_1 = 2^2 = 4$ $u_2 = u_1^2 = 4^2 = 16$ $u_3 = 16^2 = 256$



$u_3 = u_2^2$
1ère bissectrice
$x \mapsto x$
$u_2 = u_1^2$
$u_1 = 4$
$u_0 = 2$
0
2
u_0
u_1
u_2



Remarque : on s'intéressera aussi quelques fois à la somme S des termes d'une suite :

exemple : $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots$

ex : $u_n = (-1)^n$

$u_0 = -1^0 = 1$ $\quad u_1 = (-1)^1 = -1$ $\quad u_2 = (-1)^2 = 1$

$u_3 = (-1)^3 = -1$

$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

essais : • $S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$
$= 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

• $S = 1 (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots$
$= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$

exemple : $X = 0{,}99999999\dots$

$10X = 9{,}99999\dots$

$$\overline{10x - x} \quad = 9$$

$$9x = 9$$

$$\boxed{x = 1}$$

6 septembre 2022

3. Trois suites classiques formulées par récurrence

a. <u>Suites arithmétiques</u>

Définition : on appelle suite arithmétique toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle il existe un réel a appelé RAISON de cette suite t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

: CONNU : $a \in \mathbb{R}$

$u_0 \in \mathbb{R}$

exemple : $u_0 = 2$ $\quad a = 3$

alors $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

$u_1 = u_0 + 3 = 2+3 = 5$

$u_2 = u_1 + 3 = (u_0+3)+3 = u_0 + \underbrace{2\times 3} = u_0 + 6 = 8$

$u_3 = 8+3 = 11 = (u_2+3) = (u_0 + 2\times 3) + 3 = u_0 + 2\times 3 + 3 = u_0 + 3\times 3$

$\vdots$

$u_n = u_0 + n\times 3 = f(n)$ où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u_0 + n\times 3$

$(2 + 3n)$

Propriété : de façon generale on peut exprimer toute suite arithmétique de façon explicite

En effet, si on considère la suite : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$, a et u_0 données dans $\mathbb{R}$

alors $\boxed{u_n = u_0 + an}$, $n \in \mathbb{N}$

Preuve : par récurrence

a. $\boxed{\text{si } n = 0}$ $u_0 = u_0 + a \times 0 = u_0$ c'est vrai (initialisation)

b. Soit $p \in \mathbb{N}$, t.q. $u_p = u_0 + ap$ est vrai (hérédité)

Montrons que u_{p+1} est vrai :

par définition $u_{p+1} = u_p + a$ or d'après ce qui précède $u_p = u_0 + ap$ par hypothèse de récurrence. alors

$$u_{p+1} = (u_0 + ap) + a = u_0 + ap + a = u_0 + a(p+1)$$

et donc $u_{p+1} = u_0 + a(p+1)$ est vérifiée

c. Conclusion : on a alors $u_n = u_0 + an$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

qui est vraie

Remarque : • $u_{n+1} = u_n + a$

u_0

$u_1 = u_0 + a$

$u_2 = u_1 + a = u_0 + a + a = u_0 + 2a$

$u_3 = u_2 + a = u_0 + 2a + a = u_0 + 3a$

$u_4 = u_0 + 4a$

$\vdots$

$u_n = u_0 + na$

la somme : $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$?

que vaut la somme : $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$?

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 + (u_0 + a) + (u_0 + 2a) + (u_0 + 3a) + \dots + (u_0 + na)$$
$$= (n+1)u_0 + a + 2a + 3a + \dots + na$$
$$= (n+1)u_0 + a(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

IMPORTANT : on a une formule pour $1+2+3+\dots+n$

GAUSS :

$$s = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$
$$+ \quad s = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

$$2s = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$
$$= n(n+1)$$

donc $s = n(n+1)/2$

Par conséquent : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0 + a(1+2+3+\dots+n)$
$$= (n+1)u_0 + a\left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(u_0 + \frac{an}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{\underbrace{2u_0 + a.n}_{u_0 + u_n}}{2}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_0 + a \cdot n}{2}\right)$$

$$\boxed{u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)}$$ À CONNAÎTRE

6. Suites géométriques

Définition : on appelle suite géométrique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $r \in \mathbb{R}$ une constante, appelée RAISON, t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = r\, u_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

r, u_0 : connus

Remarque : si $r = 0$

u_0

$u_1 = 0 \times u_0 = 0$

$u_2 = 0 \times u_1 = 0$

$\vdots$

$u_n = 0$

si $r=1$ $\quad u_0$

$u_1 = 1 \times u_0 = u_0$

$u_2 = 1 \times u_1 = u_0$

$u_3 = 1 \times u_2 = u_0$ suite stationnaire

)

on suppose dans la suite que $r \neq 0$ et $r \neq 1$ (on note $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$)

exemple : $u_0 = 2 \quad r = 3$

$u_1 = 3 u_0 = 3 \times 2 = 6$

$u_2 = 3 . u_1 = 3(3 u_0) = 3^2 u_0 = 18$

$u_3 = 3 u_2 = 3 . 3^2 u_0 = 3^3 u_0 = 27 u_0 = 54$

$\vdots \quad \vdots$

$u_n = 3^n u_0$

Propriété : toute suite géometrique de la forme

$$\begin{cases} u_{n+1} = r\, u_n & , r \text{ donné} \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

s'écrit : $\boxed{u_n = r^n \cdot u_0}$, $n \in \mathbb{N}$

Preuve : par récurrence

ⓐ initialisation : si $n=0$ $u_0 = r^0 \cdot u_0 = 1 \cdot u_0 = u_0$ VRAI

ⓑ hérédité on suppose que la formule de récurrence est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$ càd que $u_p = r^p \cdot u_0$ est vrai

montrons que c'est vrai pour u_{p+1} (càd montrons que $u_{p+1} = r^{p+1} u_0$)

or par définition on sait que $u_{p+1} = r \cdot u_p$ (*)

$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

a par définition on sait que $u_{p+1} = r \cdot u_p$ $(*)$

mais par l'hypothèse sur u_p : $u_p = r^p \cdot u_0$

on remplace donc u_p dans $(*)$ $u_{p+1} = r \cdot (r^p \cdot u_0) = r \cdot r^p \cdot u_0$
$= r^{p+1} u_0$

donc la formule est vraie pour $p+1$

(c) Conclusion : d'après ce qui précède, on a alors

$u_n = r^n \cdot u_0$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Calculons : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = ?$

u_0
$u_1 = r \cdot u_0$
$u_2 = r^2 u_0$
$u_3 = r^3 u_0$
$u_4 = r^4 u_0$
$\vdots$
$u_n = r^n \cdot u_0$

$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 + (r u_0) + (r^2 u_0) + (r^3 u_0) + \ldots + (r^{n-1} u_0) + (r^n u_0)$
$= u_0 (1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} + r^n)$

IMPORTANT : on connaît $1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} + r^n$

on multiplie par $1 - r$

$(1 + r + r^2 \ldots + r^{n-1} + r^n)(1 - r) = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} + r^n$
$- r - r^2 - r^3 \ldots - r^{n-1} - r^n - r^{n+1}$
$= 1 - r^{n+1}$

$a \cdot b = c$
$a = c/b$

donc $1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, existe car $\boxed{r \neq 1}$.

Conclusion : $\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}}$ avec $r \neq 1$ (on dit : $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)

c. Suites arithmético-géométriques :

Définition : on appelle suite arithmético-géométrique, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle il existe 2 constantes a et r réelles

t.q. $\begin{cases} u_{n+1} = r \cdot u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ CONNUS : a, r, u_0

Remarque : si $\boxed{r = 1}$ on a une suite arithmétique

si $\boxed{a = 0}$ " " " géométrique

on suppose maintenant $r \neq 1$ et $a \neq 0$

Question : peut-on trouver une formulation explicite d'une telle suite

Réponse : oui

MÉTHODE étape 1 : on a $u_{n+1} = r.u_n + a$

$= f(u_n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto rx + a$

idée : on cherche un nombre l tel que

$$\boxed{f(l) = l}$$

càd $r.l + a = l$

$\Leftrightarrow rl - l = -a$

$\Leftrightarrow l(r-1) = -a$

$\Leftrightarrow \boxed{l = \frac{-a}{r-1}}$ existe car $r \neq 1$.

étape 2 : on va utiliser une suite auxiliaire on la note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on la definit de la façon suivante :

$$\boxed{v_n = u_n - \ell}$$

alors $\boxed{u_n = v_n + \ell}$

donc $u_{n+1} = v_{n+1} + \ell$

(car $u_{n+1} = r u_n + a$) $\rightarrow$ $r.u_n + a = v_{n+1} + \ell$

$\Leftrightarrow \quad r.(v_n + \ell) + a = v_{n+1} + \ell$

$\Leftrightarrow \quad r.v_n + r.\ell + a = v_{n+1} + \ell$

$\Leftrightarrow \quad r.v_n + r\ell + a - \ell = v_{n+1}$

$$\Leftrightarrow \quad r.v_n + (r-1)\underset{\underset{\frac{-a}{r-1}}{\shortparallel}}{\ell} + a = v_{n+1}$$

$$r.v_n + \cancel{(r-1)}.\left(\frac{-a}{\cancel{r-1}}\right) \cancel{+a} = v_{n+1} \Rightarrow \quad \boxed{v_{n+1} = r\,v_n}$$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r

avec $v_0 = u_0 - \ell$

et donc $\underbrace{v_n}_{u_n-\ell} = r^n . v_0$

$$u_n - \ell = r^n . (u_0 - \ell)$$

donc $\boxed{u_n = r^n . (u_0 - \ell) + \ell}$ où $\boxed{\ell = \frac{-a}{r-1}}$