Année universitaire 2022-2023
Semestre 3

Licence Sciences pour la Santé

Niveau de licence :	**Deuxième année**
Titre de l'enseignement :	**Mathématiques pour la Santé**
Nom des responsables :	**L. Pujo-Menjouet**
Date de l'épreuve :	**Mercredi 7 décembre 2022**
Durée de l'épreuve	**45 minutes**

Documents et cours autorisés : OUI ☐ NON ☒

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. ***Question de cours*** *- 10 minutes - 4 points*

1. (2 points) Donner la définition d'une équation différentielle autonome. Donner un exemple d'équation différentielle autonome et d'équation différentielle non autonome en expliquant.
2. (2 points) Donner la définition d'une isocline-k. Que signifient les isoclines-0 dans les équations différentielles autonomes.

Exercice 2. *35 minutes - 6 points*
Les deux parties sont indépendantes.

1. **Partie 1**.
   On considère l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ avec $f(x) = x^2(x-1)(2+x)$.
   (a) Montrer que les équilibres de cette équation sont 0 et 1 et -2 .
   (b) Déterminer leur nature (stable, instable) et leur type (source (instable), puits (stable), shunt).
   (c) Dessiner le portrait de phase, puis quelques trajectoires représentatives des différents cas.
2. **Partie 2.**
   Résoudre l'équation différentielles suivante

$$tx'(t) + 2x(t) = t, \text{ avec } x(1) = 1.$$

correction examen L2-SPS- 2022

Exercice 1 : voir cours

Exercice 2 :

1. Partie 1

a. Les equilibres x^* verifient $x^{*'}=0$ c'est à dire $f(x^*)=0$

Ici c'est equivalent à $x^{*2}(x^*-1)(2+x^*)=0$

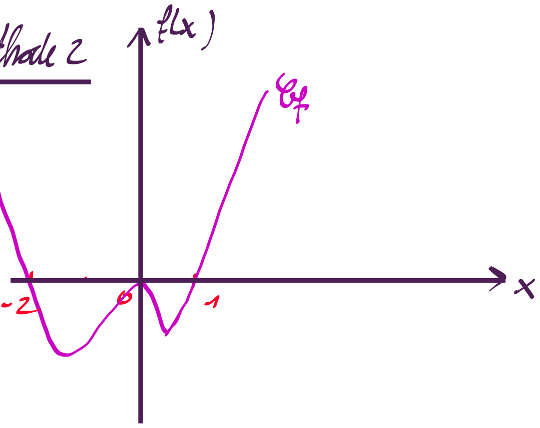
$\Leftrightarrow x^*=0$, $x^*=1$ ou $x^*=-2$

Les 3 equilibres sont -2, 0 et 1 (0 est d'ordre de multiplicité 2)

b, c : Méthode 1

x		-2		0		1	
signe de x^2	+		+	0	+		+
signe de $x-1$	$-$		$-$		$-$	0	+
signe de $2+x$	$-$	0	+		+		+
signe de $f(x)$	+	0	$-$	0	$-$	0	+

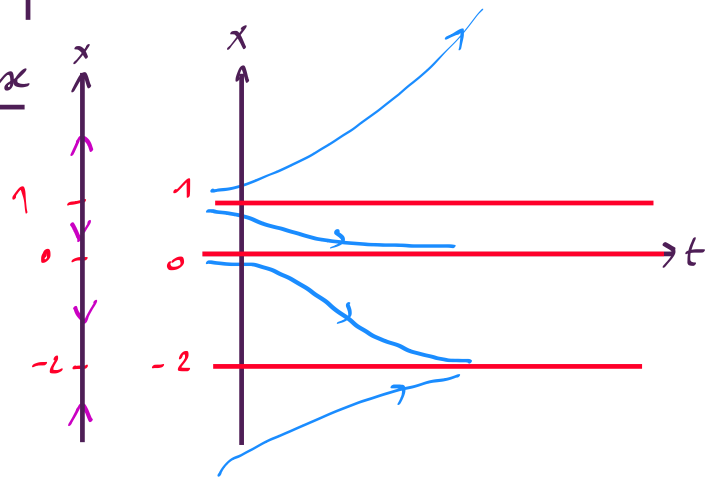
Méthode 2



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$$

Portrait de phase



Partie 2 :

$$tx' + 2x = t \quad \text{avec} \quad x(1) = 1$$

On doit diviser par t, pour ça on considère $t > 0$ (à cause de la condition initiale $(x(\underset{t>0}{t=1}) = 1)$)

Soit $t > 0$

on obtient $\quad x' + \frac{2}{t}x = 1$

on multiplie par $e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2\int \frac{1}{t} dt} = e^{2\ln|t|} = e^{2\ln t}$ car $t > 0$

$$= (e^{\ln t})^2 = t^2$$

on obtient : $\quad t^2 x' + \frac{2}{t} t^2 x = t^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{t^2 x' + 2t x = t^2}$$

que l'on écrit $\quad (t^2 x)' = t^2$

en intégrant chaque membre on a :

$$t^2 x = \frac{t^3}{3} + k \quad \text{d'où} \quad x(t) = \frac{t^3}{3t^2} + \frac{k}{t^2} = \boxed{\frac{t}{3} + \frac{k}{t^2}}$$

Comme $x(1) = 1$, cela donne $\quad x(1) = \frac{1}{3} + k = 1$ d'où $k = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Conclusion $\boxed{x(t) = \frac{t}{3} + \frac{2}{3t^2}}$