11 octobre 2023.

REF: . ZILL (ORDINARY DIFF. EQ)
. STROGATZ (NON LINEAR DYNAMICS & CHAOS)

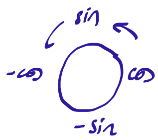
Exercices : Résoudre (1) $x'(t) + \sin(t)\, x(t) = 0$

(2) $t\,x'(t) + x(t) = 0$

(3) $t\,x'(t) + x(t) = 1$ avec $x(1) = 2$

Réponse : (1) $x'(t) + \sin(t)\, x(t) = 0 \quad (E)$

coef = 1



. on multiplie (E) par $e^{\int \sin(t)dt} = e^{-\cos(t)}$

. on a alors (E) qui s'écrit $\left(e^{-\cos(t)} \cdot x(t)\right)' = 0$

. on obtient alors $e^{-\cos(t)} x(t) = k$ où $k \in \mathbb{R}$

donc $\boxed{x(t) = k e^{\cos(t)}}$

② $t\,x'(t) + x(t) = 0$

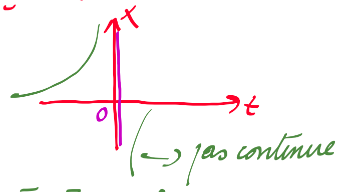
il faut diviser par t :

$tx' + x = 0$

on cherche des solutions x dont la dérivée existe

or si x est dérivable sur I alors x doit être continue

ici si $t \in \mathbb{R}^*$



donc il faut prendre $t \in I \subset]-\infty, 0[$

ou $t \in I \subset]0, +\infty[$

c'est la condition initiale qui nous dira dans quel intervalle t doit se trouver

ex : si $x(-1) = 1$

$t_0 \in]-\infty, 0[\rightarrow t \in I \subset]-\infty, 0[$

si $x(2) = 3$

$t_0 \in]0, +\infty[\Rightarrow t \in I \subset]0, +\infty[$

- Ici on suppose $t \in I \subset]0,+\infty[$ on divise par t:

on obtient $x'(t) + \frac{1}{t} x(t) = 0$

$t>0$ donc $|t| = t$

on multiplie (E) par $e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln|t|} \overset{\downarrow}{=} e^{\ln t} = t$

on obtient $(t\,x(t))' = 0$

ce qui donne $t\,x(t) = k$, $k \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{x(t) = \frac{k}{t}}$, $t \in I \subset]0,+\infty[$

- Si $t \in I \subset]-\infty,0[$ on divise par t

$|5| = 5$

$|-5| = 5 = -(-5)$

on a $x'(t) + \frac{1}{t} x(t) = 0$, $t<0$ $|t| = -t$

on multiplie par $e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln|t|} \overset{\downarrow}{=} e^{\ln -t} = -t$

on a $(-t\,x(t))' = 0 \Rightarrow -t\,x(t) = k$, $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{-k}{t}}$ $t<0$

3. $\begin{cases} t x'(t) + x(t) = 1 \\ x(1) = 2 \end{cases}$

on divise par t en considérant $t \in I \subset \,]0,+\infty[$ car $x(\overset{t_0>0}{1}) = 2$

on a : $x'(t) + \frac{1}{t} x(t) = \frac{1}{t}$

et on multiplie par $e^{\int 1/t \, dt} = e^{\ln|t|} = t$

on obtient $t x'(t) + x(t) = 1$

$(t x(t))' = 1$

donc $t x(t) = t + k$

ainsi $x(t) = \frac{t+k}{t}$, $t > 0$

$\boxed{x(t) = 1 + \frac{k}{t}}$

comme $x(1) = 2$

$1 + \frac{k}{1} = 2 \Rightarrow \frac{k}{1} = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{k = 1}$

Conclusion $x(t) = 1 + \frac{1}{t}$, $t > 0$

Zill ordinary Differential equations

$(uv)' = u'v + uv'$

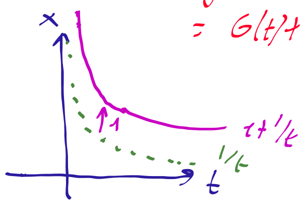
Remarque : si dès le début on a : $a(t)x'(t) + a'(t)x(t) = g(t)$

alors (E) s'écrit directement

$(a(t)x(t))' = g(t)$

$\Rightarrow a(t)x(t) = \int g(t)dt$

$= G(t) + K$



ex. $t^2 x' + 2tx = 3$

ex. $t^2x' + 2tx = 3$

$(t^2x)' = 3$

$\sin t \cdot x' + \cos t\, x = 5$

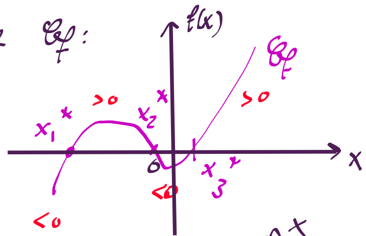
$(\sin t \cdot x)' = 5$

Retour au cours :

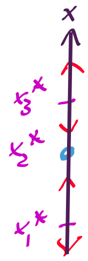
<u>Rapel</u> : on souhait connaître l'allure de toutes les solutions de $x'(t) = f(x(t))$

<u>étape 1</u> : on cherche les solutions constantes x^* que l'on appelle équilibres ou solutions stationnaires.
Ils vérifient : $x^{*'} = 0$ càd $f(x^*) = 0$

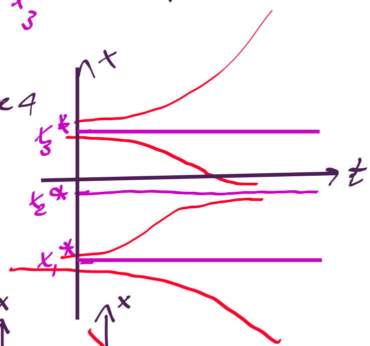
<u>étape 2</u> on trace $\mathcal{C}_f$:



étape 3

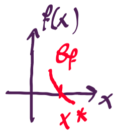


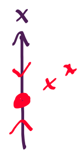
étape 4

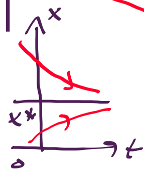


portrait de phase

<u>Définition</u> : 1) si x^* est tel que

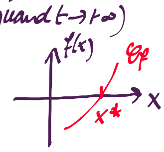


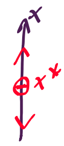


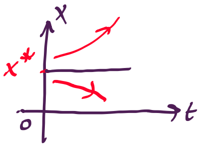


x^* est alors un équilibre ASYMPTOTIQUEMENT STABLE (A.S.)
(quand $t \to +\infty$)

2) si x^* est tel que



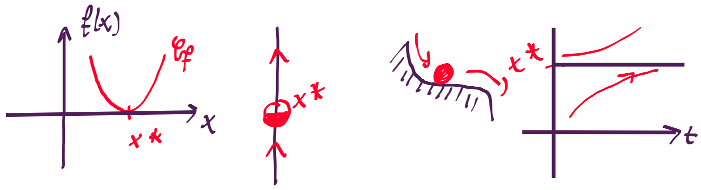




x^* est un équilibre instable

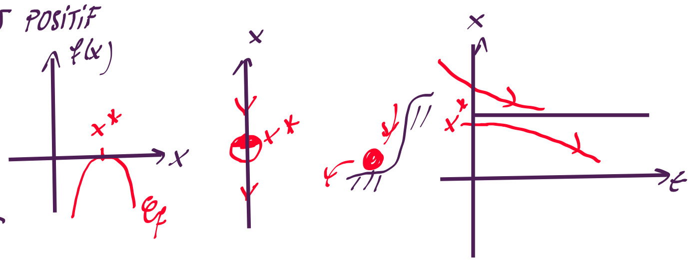
. f(x)

3) si x^* est tel que



x^* est appelé SHUNT POSITIF

4. si x^* est t.q.



x^* est un SHUNT NEGATIF

Exercice: étudier les solutions de $x' = x(x-1)^2$

Recherche des équilibres x^*: ils vérifient $x^{*\prime}=0$ càd $f(x^*)=0$ où $f(x)=x(x-1)^2$

$$f(x^*)=0 \iff x^*(x^*-1)^2=0$$

$$\iff \boxed{x^*=0} \text{ ou } (x^*-1)^2=0$$

$$(x^*-1)(x^*-1)=0 \text{ donc } \boxed{x^*=1}$$

$x^*=0$ 1 racine simple

⇒ stable ou instable

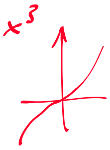
1 racine double ⇒ $x^*=1$ est un shunt

graphe de f:

$f(x) = x(x-1)^2$

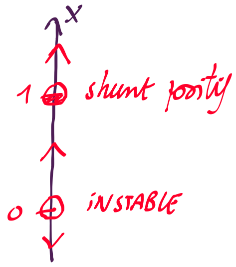
en l'∞ se comporte comme

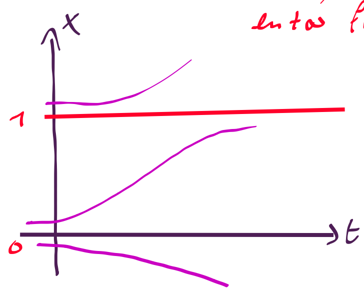
$x \cdot x^2 = x^3$



en $-\infty$, $f(x) \to -\infty$

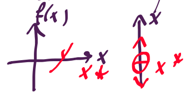
en $+\infty$ $f(x) \to +\infty$



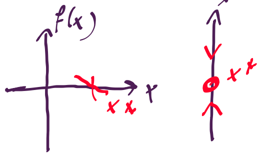


Question : comment connaître la nature (stable ou instable) et le type (shunt, ...) d'un équilibre si on ne sait pas tracer le graphe de f ?

ASTUCE : propriété : on suppose qu'il existe un équilibre x^* de $x' = f(x)$

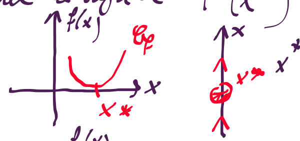
① si $f'(x^*) > 0$ 

alors x^* est instable

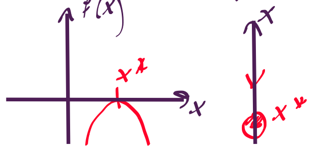
② si $f'(x^*) < 0$ 

alors x^* est A.S.

③ si $f'(x) = 0$ → on doit alors chercher le signe de $f''(x^*)$

si $f''(x^*) > 0$ 

x^* SHUNT POSITIF

si $f''(x^*) < 0$ 

SHUNT NÉGATIF

• si $f''(x^*) = 0$ on cherche le signe de $f'''(x^*)$

si $f'''(x^*) > 0$ instable

< 0 stable

$= 0$ on cherche $f^{(4)}(x^*)$

⋮

si $f^{(n)}(x^*) \neq 0$

si n est paire si $f^{(n)}(x^*) > 0$ shunt positif

< 0 " negatif

si n est impair si $f^{(n)}(x^*) > 0$ instable

< 0 A.S.

Application : Reprendre l'exercice $x' = x(x-1)^2$

on a $f(x) = x(x-1)^2$

① les equilibres verifient $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 0}$ ou $\boxed{x = 1}$

② Calculons $f'(x)$: $f'(0)$ et $f'(1)$

on $f(x) = x(x-1)^2 = x(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x$

donc $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

en $x^* = 0$ $f'(0) = 1$ donc $x^* = 0$ instable

en $x^* = 1$ $f'(1) = 3.1 - 4 + 1 = 0$

calculons $f''(x) = 6x - 4$ et $f''(1) = 6 - 4 = 2 > 0 \Rightarrow x^* = 1$ shunt positif !