Laurent PUJO-MENJOUET
PAS DE T

pujo@math.univ-lyon1.fr

SITE WEB : www.math.univ-lyon1.fr/~pujo

CAMPUS DE LA DOUA - BÂT. BRACONNIER
BUREAU 246

<u>EXAMEN</u> : QUESTIONS DE COURS / EXERCICES / PROBLÈMES (45')

<u>PROGRAMME</u> :

I INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

a. Rappels sur les fonctions, dérivées, primitives et intégrales
b. Définition des équations différentielles, résolution de ces équations quand elles sont linéaires
[c. Équations de BERNOULLI]
d. Applications démographiques

II Etude qualitative des equations différentielles

a. Equilibres, stabilité

b. Modèles linéaires, non linéaires

c. " de physiologie, epidemiologie, ...

III Bifurcations

a. Différents type de bifurcation

b. Applications aux modèls de medecine

I. Introduction aux équations différentielles

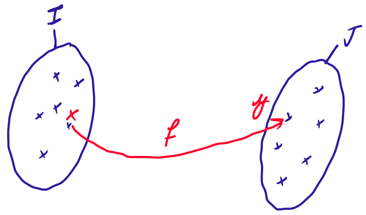
a. Rappels

① Définition d'une fonction

une fonction est une relation que l'on note en général f entre 2 ensembles.

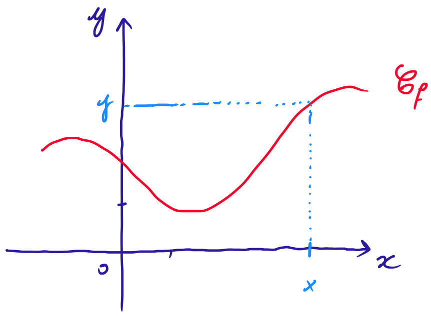
- un ensemble de depart $I \subset \mathbb{R}$
- un " d'arrivée $J \subset \mathbb{R}$

f met alors en relation un élément de I, qu'on note x, qui s'appelle l'antécédent
et un " de J, " " y " " l'image
I

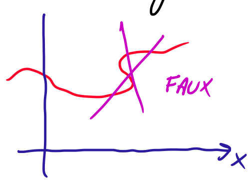


$y = f(x)$

En général, on représente la fonction f sur un repère CARTÉSIEN
cette représentation s'appelle graphe de f ou courbe de f et on la note $\mathcal{C}_f$



<u>ATTENTION</u> : les courbes de fonction ne reviennent jamais en arrière !!

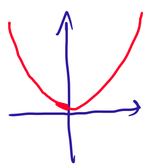


<u>NOTATION</u> :

$$f : I \to J$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

UNE BARRE

ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$



ATTENTION : ne pas confondre f → fonction

$f(x)$ → nombre

$\mathcal{C}_f$ → représentation de f

donc ne pas dire $f(x)$ est croissante (un nombre)

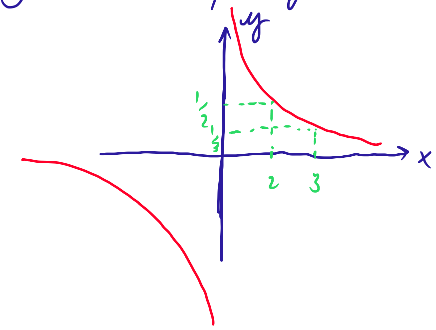
mais f est croissante

② Ensemble de définition : Il existe de nombreuses fonctions "classiques" on les définit sur ce qu'on appelle un ensemble de définition (ou encore domaine de définition) qu'on note $\mathcal{D}_f$ c'est un ensemble où chaque antécédent x a exactement une image y par f.

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$

ex : $x = 2$ $f(2) = \frac{1}{2}$ ...

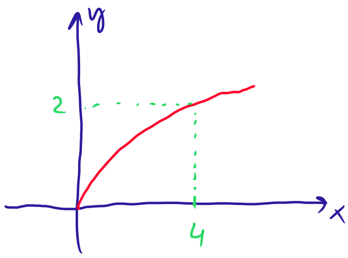
f est n'est pas définie en 0 donc $D_f \neq \mathbb{R}$, mais $D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$

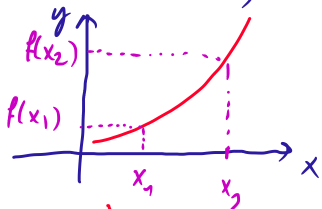
$f(4) = \sqrt{4} = 2$

$D_f \neq \mathbb{R}$ car la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.
donc $D_f = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$



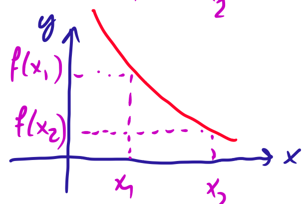
③ Fonctions croissantes, decroissantes, constantes

<u>croissante</u> :



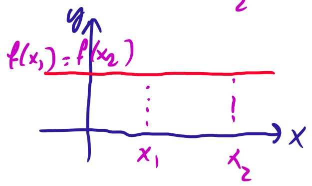
soient x_1 et $x_2 \in D_f$ avec $x_1 \leq x_2$
alors $f(x_1) \leq f(x_2)$

<u>decroissante</u>



soient $x_1, x_2 \in D_f$ avec $x_1 \leq x_2$
alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

<u>constante</u>

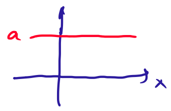


soient $x_1, x_2 \in D_f$ avec $x_1 \leq x_2$
alors $f(x_1) = f(x_2)$

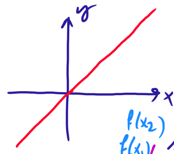
④ Quelques fonctions classiques

Quelques fonctions classiques

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto a$, $a \in \mathbb{R}$ (fonction constante)

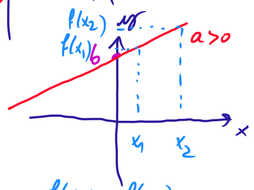


- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto x$ fonction identité

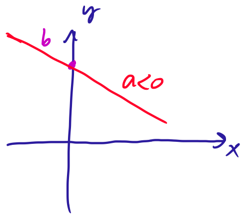


- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto ax+b$ fonction affine

coefficient directeur ↗ ↑ ordonnée à l'origine



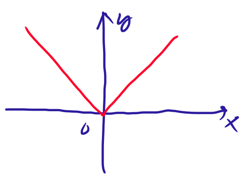
$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto |x|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

ex : $|-5| = 5$

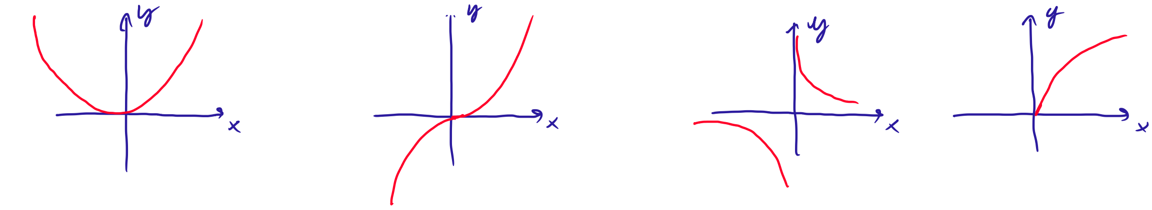


- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto x^2$
  y

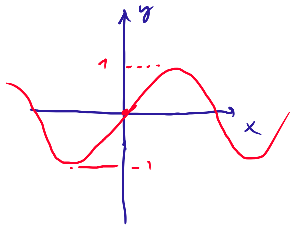
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$
y

$\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$

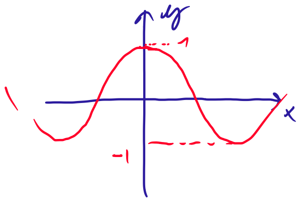
$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$
y



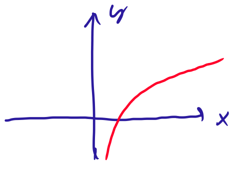
• $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$



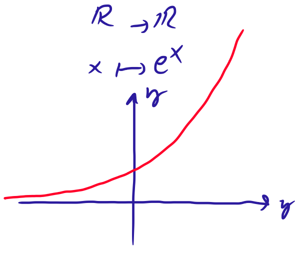
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$



$]0,+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$



$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$



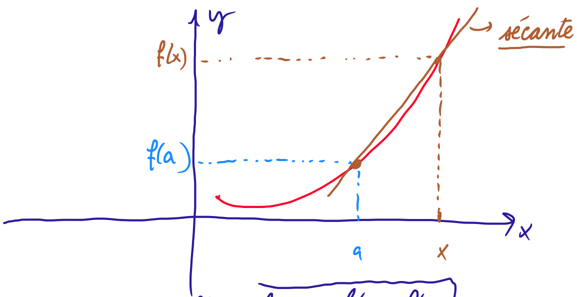
⑤ Dérivées

soit $f : I \to J$ une fonction

soit $a \in I$

on dit que f est dérivable en a si et seulement si

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ existe $f'(a)$ est appelée dérivée de f en a



$\lim_{x \to a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = f'(a)$

limite de la pente de la sécante quand $x \to a$ = pente de la tangente de $\mathcal{C}_f$ en $(a, f(a))$

Autre notation : $f'(a) = \boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$

si on pose $h = x - a$ si $x \to a$ alors $h \to 0$

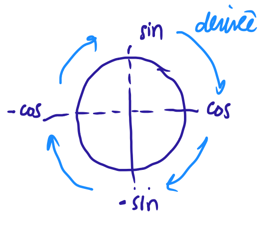
et $x = a + h$

et donc $\lim \frac{f(x) - f(a)}{}$ $\lim \frac{f(a+h) - f(a)}{}$

et donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \underline{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}} = f'(a)$

<u>dérivées classiques</u> :

	f	f'
	$a \quad (a \in \mathbb{R})$	0
	$ax+b$	a
	x^2	$2x$
$n \in \mathbb{N}$	x^n	$n x^{n-1}$
	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\boxed{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$
	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-1 \cdot x^{-1-1} = -1\, x^{-2} = -1 \cdot \frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{-1}{x^2}}$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\sin x$	$\cos x$
	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	e^x	e^x



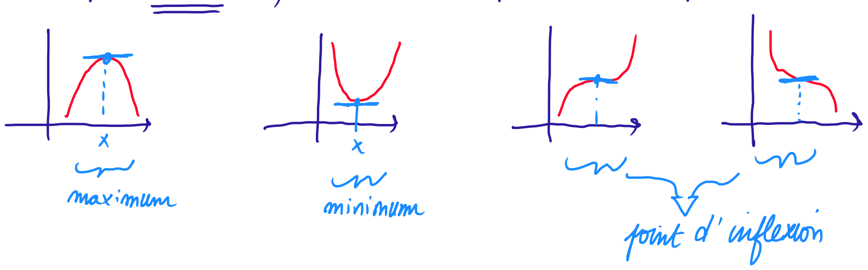
Propriétés : (i) • si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I

et si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est croissante (strictement)

$f'(x) < 0$ " f est décroissante (")

si $\boxed{\text{pour tout}}$, $f'(x) = 0$ f est constante

MAIS si $f'(x) = 0$ pour un seul x, ça veut dire que l'on a 4 cas possibles :



(ii) $$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

nouveauté : dérivée d'une fonction composée

Rappel : $f : I \to J \quad g : J \to K$

$$\underset{I}{x} \overset{f}{\longmapsto} \underset{J}{y = f(x)} \overset{g}{\longmapsto} \underset{K}{g(f(x))} = g \circ f(x)$$

exemple : si $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto ax+b$

$g \circ f(x) = \quad x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{x} \overset{g}{\longmapsto} g(\sqrt{x}) = a\sqrt{x}+b$

$f \circ g(x) : \quad x \overset{g}{\longmapsto} ax+b \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{ax+b}$

ATTENTION ! $\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$

EXERCICE : calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ avec $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto 3x^2$

$g \circ f(x) = g(f(x)) \quad x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} g(f(x))$ ici $x \mapsto e^x \mapsto 3(e^x)^2 = 3e^{2x}$

$f \circ g(x) = f(g(x)) \quad x \overset{g}{\longmapsto} g(x) \overset{f}{\longmapsto} f(g(x))$ ici $x \mapsto 3x^2 \mapsto e^{3x^2}$

dérivée d'une fonction composée :

$$(f\circ g)'(x) = \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(g\circ f)'(x) = \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$\sqrt{x} \rightsquigarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$

-applications : si u est une fonction :

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x) \qquad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$\left(\cos(u(x))\right)' = -\sin(u(x)) \cdot u'(x)$$

exercice : calculer ① $\left(e^{u(x)}\right)'$

② $\left(\ln(u(x))\right)'$

③ $\left(\sin(\underbrace{3x+2}_{u(x)})\right)'$

④ $\left(e^{\cos x}\right)'$

⑤ $\left(\ln(\sqrt{x})\right)'$

14 septembre 2022

$$(g\circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$g\circ f : x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g(f(x))$

exercices : 1) $(e^{u(x)})'$: $x \xmapsto{u} u(x) \xmapsto{exp} e^{u(x)}$

$$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

2) $(\ln(u(x)))'$: $x \xmapsto{u} u(x) \xmapsto{\ln} \ln(u(x))$

$$(\ln(u(x)))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

3) $(\sin(3x+2))'$: $x \longmapsto 3x+2 \longmapsto \sin(3x+2)$

donc $(\sin(3x+2))' = \cos(3x+2) \cdot 3 = 3\cos(3x+2)$

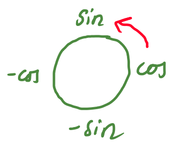
4) $(e^{\cos x})' = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\sin x \, e^{\cos x}$

5) $(\ln(\sqrt{x}))' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(\sqrt{x})^2} = \boxed{\frac{1}{2x}}$

6. Primitives

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$, f est continue sur I
une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I
telle que $F'(x) = f(x)$

exemple : $f(x) = \cos x$
$F(x) = \sin x + C$



Notation : on note en général $F(x) = \int f(x)dx$

Propriétés : Les primitives sont définies à une constante près !

Preuve : Soient F_1 et F_2 deux primitives de f $\quad (f : I \to \mathbb{R})$
Par définition : on a, $F_1' = f$
$-$ $F_2' = f$

donc pour tout $x \in I$, $\underbrace{F_1'(x) - F_2'(x)}_{} = f(x) - f(x) = 0$

$\underbrace{(F_1 - F_2)}_{\text{une fonction}}'(x) = 0$

une fonction dont la dérivée est nulle

donc $F_1(x) - F_2(x) = C$ $\quad (C \in \mathbb{R})$
c'est à dire $F_1(x) = F_2(x) + C$

tableau des primitives:

f	F
0	k , $k\in\mathbb{R}$
a	$ax+b$
x	$\frac{x^2}{2}+C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^{-1}=\frac{1}{x}$	$\ln x+C$
e^x	e^x+C
$x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$	$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$

$n\in\mathbb{Z}$, $n\neq -1$

$= \frac{x^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{3}x^{3/2}+C$

$\frac{x^2}{2} \rightsquigarrow \frac{2x}{2}=x$

$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\frac{(n+1)x^{n+1-1}}{n+1}$
$=x^n$

$\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{3}{2}$

Remarque : $(f\circ g(x))' = f'(g(x)).g'(x)$

donc $\int \underbrace{f'(g(x)).g'(x)}_{(f\circ g)'(x)}.dx = \int (f\circ g(x))'dx = f\circ g(x)+C$ car $\int f'(x)dx = f(x)+C$

exemple : 1) $\int \sin x\, e^{\cos x}dx = -\int(-\sin x)e^{\cos x}dx$ $\qquad (e^{\cos x})' = e^{\cos x}.(-\sin x)$

$= -\int (e^{\cos x})'dx = -e^{\cos x}+C$

2) $\int \frac{3}{2\sqrt{3x+5}}dx = \int (\sqrt{3x+5})'dx$ $\qquad (\sqrt{u(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}.u'(x)$

$= \sqrt{3x+5}+C$

3) $\int \frac{\overset{\nearrow u'(x)}{-\sin x}}{\underset{\searrow u(x)}{\cos x}}dx = \int (\ln(\cos(x)))'dx$ $\qquad (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$= \ln(\cos(x))+C$

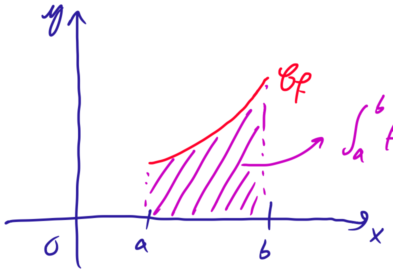
7. Integrales

Definition : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continue sur $[a,b]$

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f.

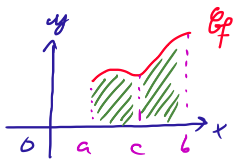
donc : la primitive $\int f(x)dx$ est une FONCTION, l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ est un NOMBRE primitive $\int f(x)dx$ est une FONCTION, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est un NOMBRE

Interprétation : si $f > 0$ sur $[a,b]$



Propriétés : 1. $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$



relation de Charles (CHASLES)

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (en effet : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$)

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

IMPORTANT 4. si $b = x$ (x variable)

$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$: c'est une fonction ! c'est même la

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$: c'est une fonction ! c'est même la primitive de f qui s'annule en a !

en effet : si $x = a$ on a $F(a) - F(a) = 0$

et $(F(x) - F(a))' = F'(x) - F(a)' = f(x) - 0 = f(x)$

Théorème fondamental du calcul : $\underbrace{\left(\int_a^x f(t)dt\right)'}_{\text{dérivée par rapport à } x} = f(x)$

Integrations par parties (IPP

rappel : $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

donc $f'(x)g(x) = (f(x).g(x))' - f(x)g'(x)$

ainsi en intégrant :

$$\int f'(x).g(x)dx = \int (f(x).g(x))'dx - \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'g = \int (fg)' - \int fg' = f.g - \int fg'$$

$$\int f'g = \int \underbrace{(fg)'}_{fg} - \int fg' = f.g - \int fg'$$

Exemple : $\int x e^x dx = ?$ $\quad g(x) = x$, $f'(x) = e^x$

on utilise l'intégration par parties

on pose : $f'(x) = e^x$ alors $f(x) = e^x$

et $g(x) = x$ alors $g'(x) = 1$

on applique la formule : $\int x e^x dx = \int (f.g)'(x) dx - \int f(x).g'(x) dx$

$$= f(x).g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

$$= e^x . x - \int e^x . 1 . dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

$$= e^x (x-1)$$

6. Équations différentielles

Définition : une équation différentielle d'ordre n est une équation qui relie une fonction x $(t \mapsto x(t))$ avec ses dérivées successives $x', x'', \dots, x^{(n)}$ de la façon suivante :

dérivée n ème

$n^{\text{ème}}$

$$F(t, x, x', x'', x^{(3)}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

ici x est une fonction de $I \to \mathbb{R}$
$t \mapsto x(t)$

exemple : x
x' : dérivée première
x'' : " seconde
$x^{(3)} = x'''$: " troisième
$x^{(n)}$: " $n^{\text{ème}}$

$x(t) = t^4 + 2t^3 + 4t + 5$
$x'(t) = 4t^3 + 6t^2 + 4$
$x''(t) = 12t^2 + 12t$
$x^{(3)}(t) = 24t + 12$ $x^{(4)}(t) = 24$ $x^{(5)}(t) = 0$

exemple d'équation différentielle : $3x''(t) + \cos(x'(t)) + x^2(t) + 3t = 0$

Définition : équation différentielle sous forme NORMALE

On appelle équation différentielle d'ordre n sous forme normale, une équation différentielle écrite de la façon suivante

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$$

Définition : équation différentielle autonome :

Définition : équation différentielle <u>autonome</u> :

une équation différentielle autonome d'ordre n est de la forme

$$F(x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad \text{(ne dépend pas explicitement de } t\text{)}$$

plus de t !

Définition : équation différentielle <u>LINÉAIRES</u> d'ordre n

Ce sont des équations de la forme

$$a_n(t)\,x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)}(t) + \dots + a_2(t)\,x''(t) + a_1(t)\,x'(t) + a_0(t)\,x(t) = g(t)$$

→ tous les coefficients $a_i(t)$ sont : soit constants
soit nuls
soit dépendant de t MAIS JAMAIS de x

→ les fonctions $x, x', \dots, x^{(n)}$ ne s'expriment qu'avec une puissance de 1

→ $g(t)$ est soit constante, soit nulle, soit dépend de t MAIS jamais de x

exemples :

		ORDRE	AUTONOME ?	LINÉAIRE ?
①	$x^{(3)} + t^2 x'' + \cos(t)\,x = e^t$	3	NON	oui
②	$\cos(x'') + x' = -5$	2	oui	non linéaire

② $\cos(x'') + x' = -5$ oui non linéaire

③ $3x^{(5)} + 5t^2 x'' = -\cos(x)$ 5 NON non linéaire

④ $3x^{(4)} + 2x' = 0$ 4 oui linéaire

⑤ $3x\, x^{(4)} + 2x' = 0$ 4 oui pas linéaire !

BONNE NOUVELLE : dans ce cours on n'étudie que les équations de la forme

$x' = f(t, x)$ (non autonome d'ordre 1)

ou $x' = f(x)$ (autonome d'ordre 1)

28 septembre 2022

Application à la biologie : Dynamique des populations

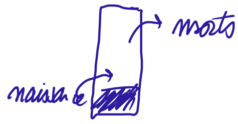
Fin du XVIII^{ème} siècle (1790 ≃) Révolution industrielle MALTHUS économiste

on note $P(t)$ la population au temps t

la variation de cette population au temps t dépend de 2 événements majeurs :

- naissances : b (birth) b

- naissances : b (birth) $\quad b, d \geq 0$
- morts : d (death)



en equation, ça se traduit par:

$$\underbrace{P'(t)}_{\text{variation}} = b . P(t) - d P(t)$$
$$= (b-d) P(t)$$
$$= k P(t) \qquad k = b-d \in \mathbb{R}$$

On reconnaît une equation differentielle:

$$\begin{cases} P'(t) = kP(t) \\ P(0) = P_0 > 0 \end{cases}$$

<u>Résolution</u> : $\quad P'(t) - kP(t) = 0$

on multiplie par $e^{-\int k dt} = e^{-kt}$

on obtient $\quad \left(P(t) e^{-kt}\right)' = 0$

$$\Rightarrow P(t) e^{-kt} = C \qquad , C \in \mathbb{R}$$

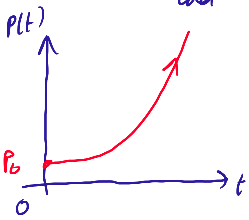
$$\Rightarrow P(t) = C e^{kt}$$

et comme $P(0) = P_0$ on a $P_0 = Ce^{k.0} = C \Rightarrow C = P_0$

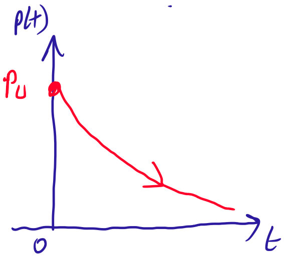
Donc $\boxed{P(t) = P_0 e^{kt}}$

Donc $\boxed{P(t) = P_0 e^{kt}}$ $\quad P_0 > 0$

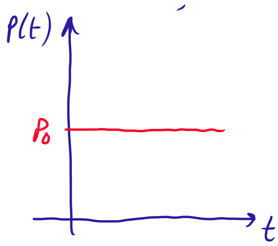
si $k>0$ càd $b-d>0$
càd $b>d$



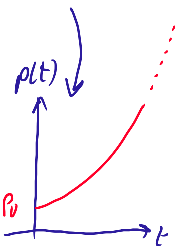
si $k<0$ càd $b<d$



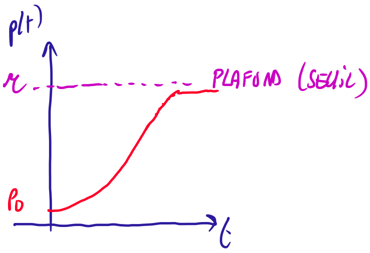
si $k=0$ càd $b=d$



≃ 1850



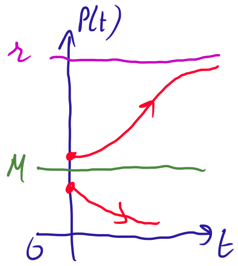
~



CAPACITÉ DE CHARGE
DE L'ENVIRONNEMENT
(CARRYING CAPACITY)

MODÈLE DE VERHULST (MODÈLE LOGISTIQUE)

$$P'(t) = K\, P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{r}\right) \qquad r>0$$



≈ 1950 ÉCOLOGUE AMÉRICAIN ALLEE

$0 \leq M \leq r \qquad r>0$

Remarque : les modèles de Verhulst et Allee sont des modèles non linéaires que l'on ne sait pas résoudre explicitement ("à la main")

Il faut donc trouver une autre méthode pour étudier ces modèles

→ résolution explicite : $P'(t) = f(P(t)) \ldots \Rightarrow P(t) = \ldots$

étude QUANTITATIVE

→ pas de résolution explicite $P'(t) = f(P(t)) \Rightarrow P(t) = ??$

étude QUALITATIVE

II Etude qualitative des équations différentielles

Mauvaise nouvelle : la plupart des equations différentielles représentant des modèles de biologie et médecine sont non linéaires

et on ne sait pas en général les resoudre explicitement

Comment faire alors pour les étudier ?

Réponse : on procède à ce qu'on appelle une étude qualitative du problème

Rappel : on étudie les equations de la forme $x' = f(t, x)$

ou bien $x' = f(x)$

Exemple : comment étudier qualitativement

$\boxed{x' = t}$, $t \in \mathbb{R}$

On va définir les solutions à partir des tangentes

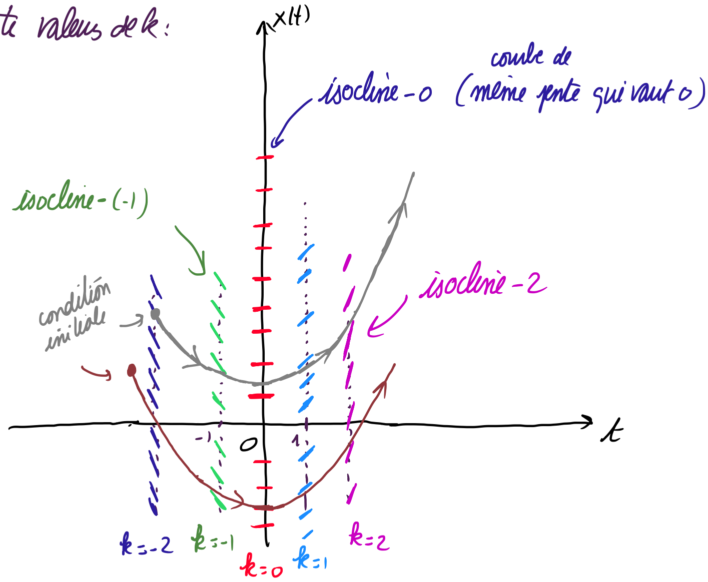
On rappelle que les pentes des tangentes en t sont données par $x'(t)$

or $x'(t) = t$ à chaque instant t, on connaît la valeur de la pente de la tangente
On étudie donc les pentes de la tangente à la courbe solution en résolvant $x' = k$ ← quand la pente vaut la valeur k

$\boxed{x' = t}$

Résolvons $x' = k$ pour différentes valeurs de k :

- si $k = 0$ (pente nulle)
  $x' = 0 \Leftrightarrow t = 0$
- si $k = 1$ (pente = 1)
  $x' = 1 \Leftrightarrow t = 1$
- si $k = -1$ (pente = -1)
  $x' = -1 \Leftrightarrow t = -1$

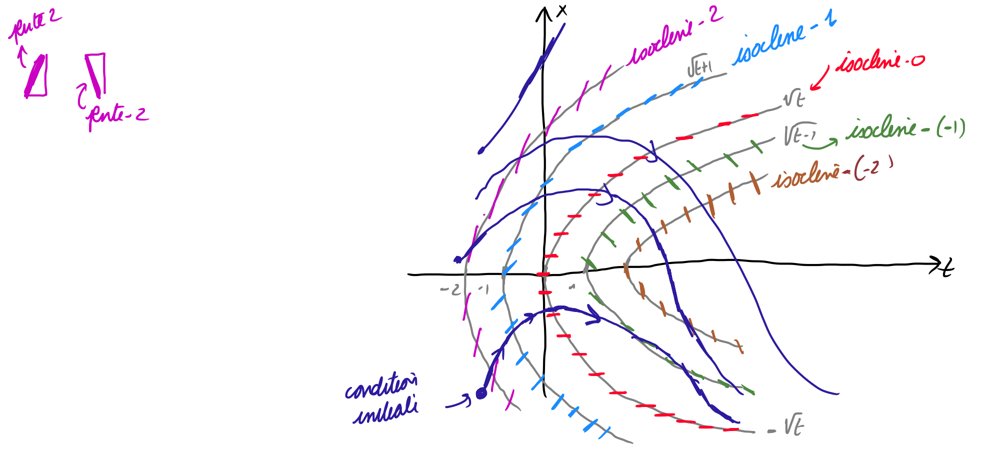


Rappel : $x'(t) = t \Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{2} + c$

<u>Définition</u> : on appelle isocline-k de l'équation $x' = f(t,x)$

l'ensemble des points $(\underset{\in \mathbb{R}}{t}, \underset{\in \mathbb{R}}{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que : $x' = k$ càd $\boxed{f(t,x) = k}$

<u>exemple</u> : chercher quelques isoclines-k de $\boxed{x' = x^2 - t}$



Remarque : que sont les isoclines - k de cette équation.

Elles sont définies par $x' = k$ or ici $x' = x^2 - t$

donc $x' = k \iff \boxed{x^2 - t = k}$

$\iff x^2 = k + t$ attention ici à chaque k donné $t + k$ doit être ≥ 0

si $\boxed{t \geq -k}$ $\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{k+t} \\ \text{ou } x = -\sqrt{k+t} \end{array}\right\}$ isoclines-k c.à.d qu'il faut prendre $\boxed{t \geq -k}$

• si $k = 0$ $x' = 0 \iff x^2 - t = 0$

$\iff x^2 = t$ avec $t \geq 0$

$\iff x = \sqrt{t}$ ou $x = -\sqrt{t}$

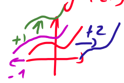
• si $k = 1$ $x' = 1 \iff x^2 - t = 1$

$\iff x^2 = 1 + t$ avec $t \geq -1$

si $t \geq -1$ $x = \sqrt{1+t}$

ou $x = -\sqrt{1+t}$

Rappel :



$y = f(x+1)$ on décale de -1 horizontalement

• si $k = -1$ $x' = -1 \iff x^2 - t = -1$

$\iff x^2 = t - 1$, $t \geq 1$

$\iff x = \sqrt{t-1}$

ou $x = -\sqrt{t-1}$

si $k = 2$

$x' = 2$

$\iff x^2 - t = 2$

$\iff x^2 = 2 + t$, $t \geq -2$

$x = \sqrt{2+t}$

ou

$x = -\sqrt{2+t}$

$y = f(x-2)$ on décale de $+2$

$y = f(x) + 1$ on décale de $+1$ verticalement

• si $k = -2$

$x' = -2$

exercice : représentations des solutions à partir des isoclines-k de l'équation de VERHULST : $x' = x(1-x)$

Solution : les isoclines-k de l'EDO $x' = x(1-x)$ sont données par $x' = k$ où $k \in \mathbb{R}$

$x' = k \iff x(1-x) = k$

$\iff x - x^2 = k$

$\iff x^2 - x + k = 0$ $\Delta = 1 - 4k$

ici : $a = 1$

$b = -1$

$c = k$

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

si $\Delta < 0$ pas de solutions

si $\Delta = 0$ 1 solution : $x_1 = \frac{-b}{2a}$

si $\Delta > 0$ 2 solutions

$x_1 = -b - \sqrt{\Delta}$

$\boxed{\text{si } \Delta < 0}$ càd $1 - 4k < 0$

$\iff 1 < 4k$

$\Leftrightarrow 1 < 4k$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4} < k}$ il n'y a pas de solutions: donc pas d'isoclines de pentes $> \frac{1}{4}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

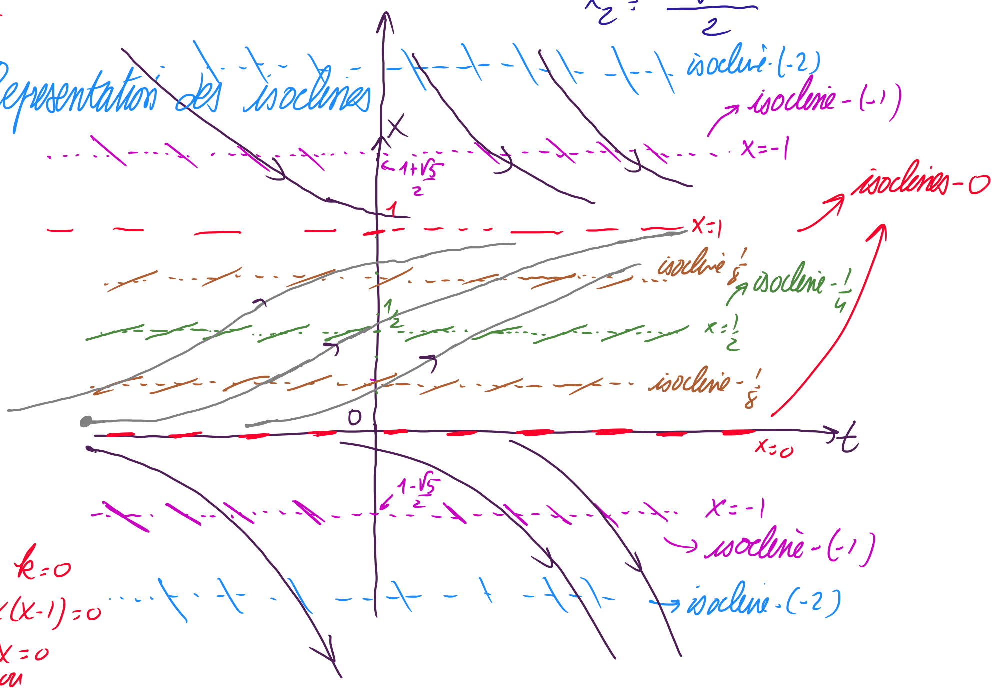
$\boxed{\text{si } \Delta = 0}$ càd $\boxed{k = \frac{1}{4}}$ il y a une seule solution: $\boxed{X = \frac{1}{2}}$ isocline $-\frac{1}{4}$

$\boxed{\text{si } \Delta > 0}$ càd $\boxed{k < \frac{1}{4}}$ il y a 2 solutions $x_1 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1-\sqrt{1-4k}}{2}$

$1 - 4k > 0$
$1 > 4k$
$\frac{1}{4} > k$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4k}}{2}$

Representation des isoclines



isoclines-0: $k=0$
$x' = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$

isoclines $-\frac{1}{4}$: il y a une seule isocline $x = \frac{1}{2}$

isoclines-(-1) si $k=-1$
on a $k < \frac{1}{4}$ donc 2 isoclines

$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-4k}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \simeq -0.618$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4k}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$

<u>Remarques</u> ① Pourquoi les solutions ne coupent jamais les droites $x=0$ et $x=1$?

Parce que l'edo s'écrit $x'=x(1-x)$

et on voit que $\boxed{\text{si } x=0}$, $x'=0$ on a alors $0=0(1-0)=0$ ✓

donc $x=0$ est une solution de l'edo

$\boxed{\text{si } x=1}$ $x'=0$ (car $x=1$: ne dépend pas de t) (dérivée d'une constante $=1$)

alors $x'=x(1-x)$ s'écrit $0=1(\underbrace{1-1}_{=0})=0$ ✓

donc $x=1$ est aussi solution de l'edo.

et on a vu (résultat d'existence et d'unicité des solutions) que les trajectoires solutions d'une edo NE PEUVENT PAS SE COUPER

donc comme $x=0$ et $x=1$ sont solutions, aucune autre solution ne peut couper ces 2 droites

② L'exemple ici est avec $x'=x(1-x)$

C'est de la forme $x'=f(x)$: <u>équation autonome</u>

Alors plusieurs règle marcheront pour ce type d'équation:

<u>Règle 1</u> : les isoclines nulles (isoclines $=0$) si elles existent (càd $x'=0 \Leftrightarrow f(x)=0$) sont également solutions de l'edo!

<u>Règle 2</u> : toutes les isoclines pour les edo autonomes sont horizontales de la forme $k=f(x)$

<u>Règle 3</u> ; les solutions (trajectoires) de l'edo ne coupent jamais les isoclines nulles!

Règle 4 : entre 2 isoclines nulles, les trajectoires sont monotone (soit

Règle 4 : entre 2 isoclines nulles, les trajectoires sont monotones (soit croissantes soit décroissantes)

Règle 5 : Dès qu'on a trouvé une trajectoire entre 2 isoclines nulles, les autres trajectoires dans la même zone sont juste translatées (décalées) par rapport à la première trajectoire dessinée

Remarque : dans l'équation $x' = x(1-x)$ on a $x=1$ et $x=0$
qui sont à la fois des isoclines (isoclines nulles) et des solutions
on les appelle les équilibres de l'équation

Définition : on appelle équilibres (ou solution stationnaire) (indépendant du temps)
de l'edo autonome $x' = f(x)$
les solutions notées x^* telles que $x^{*\prime} = 0$ càd $\boxed{f(x^*) = 0}$
(les équilibres sont donc les solutions de $f(x) = 0$)

Une fois trouvés les équilibres, nous regardons s'ils sont stables ou instables.

Question : comment trouver (dessiner) facilement les solutions de $x' = f(x)$
dans ce cas ?

Méthode : On considère l'edo autonome $x' = f(x)$
étape 1 : chercher les équilibres càd les solutions de $f(x) = 0$
étape 2 : Tracer un axe vertical où l'on reporte les équilibres trouvés
étape 3 entre chaque équilibre, on étudie le signe de $f(x)$ que l'on reporte sur l'axe.

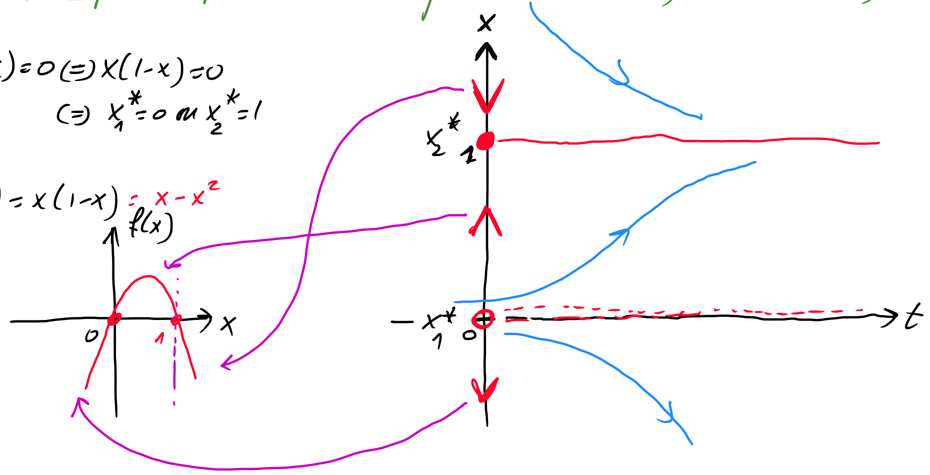
Exemple : reprenons l'exemple $x' = x(1-x)$ ici $f(x) = x(1-x)$

$X' = f(x)$

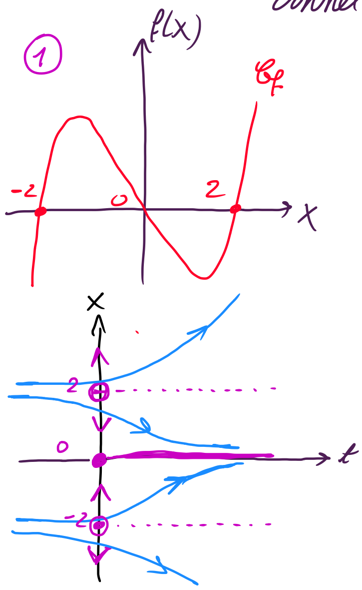
$f(x) = 0 \iff x(1-x) = 0$

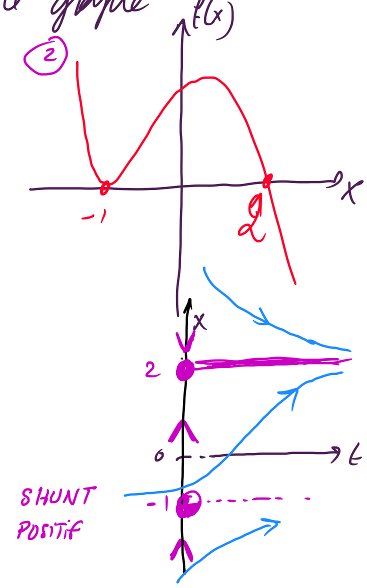
$\iff x_1^* = 0$ ou $x_2^* = 1$

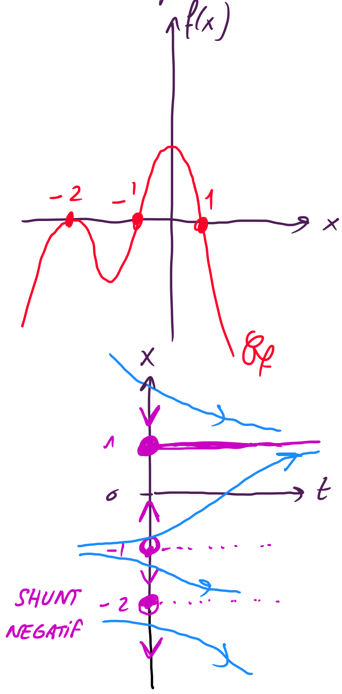
$f(x) = x(1-x) = x - x^2$



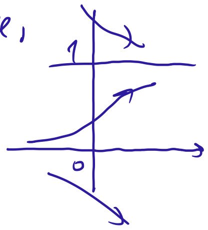
exercice : représenter les solutions de $x' = f(x)$ avec f qui est donnée par le graphe







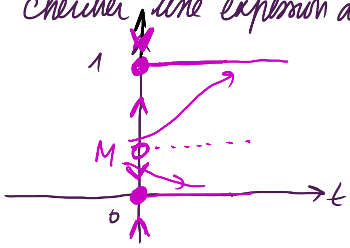
exercice ,



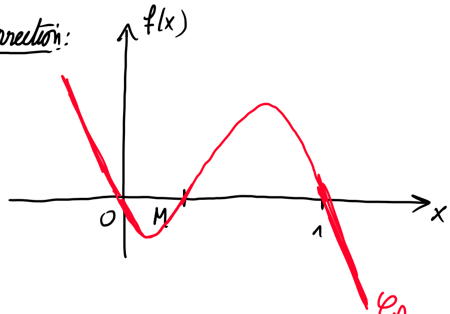
$\boxed{f(x) = x(1-x)}$ $x' = f(x)$

facile

Chercher une expression de f pour avoir : $M \in]0,1[$



correction :



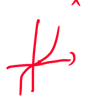
$$\begin{cases} f \text{ doit s'annuler en } 0, M \text{ et } 1 \\ \text{et } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

peut-on trouver une fonction simple ayant ces propriétés

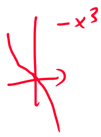
$f(x) = \cancel{x(x-M)(x-1)}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \{ x = 0$

$= \cancel{x(M-x)(x-1)}$

$= x(M-x)(1-x) \to x(M - x - Mx + x^2) = Mx - x^2 - Mx^2 \boxed{+x^3}$



$\boxed{f(x) = x(x-M)(1-x)} \to x(x - M - x^2 + Mx) = x^2 - Mx \boxed{-x^3} + Mx^2 \to$



$x' = x(1-x)(x-M)$ Modèle à effet ALLEE effet