

1^{er} septembre 2025

Laurant PUJO-MENJOUE
↑ sans t

DOLA - BÂT. BRACONNIER - 246

mail: pujo@math.univ-lyon1.fr

web: www.math.univ-lyon1.fr/~pujo

PROGRAMME:

I Introduction aux équations différentielles

- a. Rappels sur les fonctions, les dérivées, les primitives et intégrales
- b. Définition des équations différentielles, résolution de ces équations quand elles sont linéaires
- c. Equations de BERNDULLI
↑ pas de i
- d. Applications à la biologie

- II Etude qualitative des équations différentielles
- a. Equilibres et stabilité
 - b. Modèles linéaires et non linéaires
 - c. Modèles de physiologie, épidémiologie, etc...

III Bifurcations

- a. Différents types de bifurcations
- b. Applications aux modèles de médecine

I Introduction aux équations différentielles

exercices

a. Rapels

① Définition d'une fonction

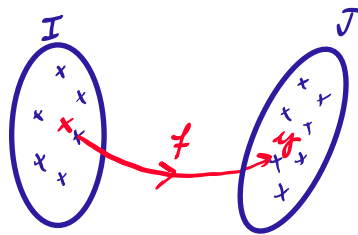
Une fonction est une relation que l'on note en général f entre 2 ensembles

- un ensemble de départ : $I \subset \mathbb{R}$

- un ensemble d'arrivée : $J \subset \mathbb{R}$

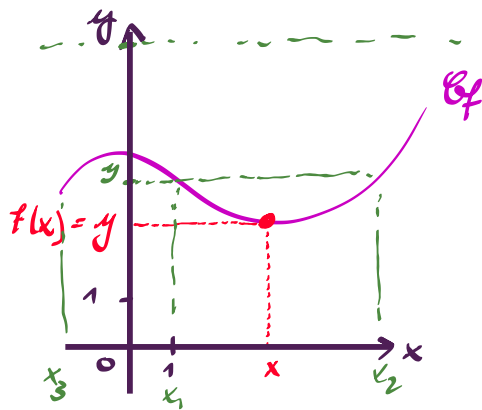
f met en relation un élément de I que l'on note x (antécédent)

et un " " J " " y (image)

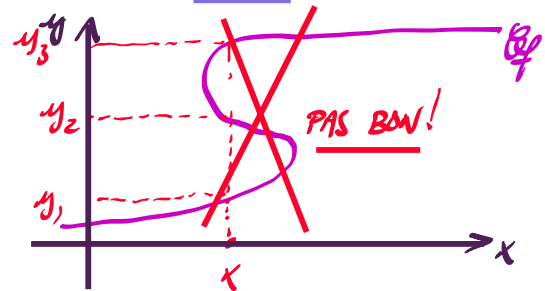


on note $y = f(x)$

Remarque: en général, on représente la fonction f sur un repère CARTESIEN
cette représentation s'appelle GRAPH de f ou COURBE REPRÉSENTATIVE de f
et on la note $\mathcal{C}_f$



ATTENTION! les courbes de fonctions
NE REVIENTENT JAMAIS en arrière!



NOTATION:

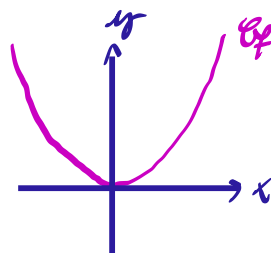
$$f: I \rightarrow J$$

$$\text{base } x \mapsto y = f(x)$$

exemple:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = x^2$$



ATTENTION! ne pas confondre

f : fonction

$f(x)$: un nombre

$\mathcal{G}_f$: représentation graphique

donc il ne faudra pas écrire ~~f~~ est croissante mais f est croissante

② Domaine de Définition

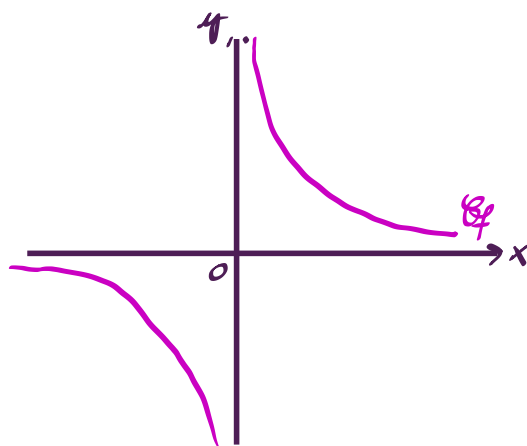
Il existe de nombreuses fonctions "classiques". On les définit sur ce qu'on appelle un domaine de définition (on dit aussi ensemble de définition) que l'on note $\mathcal{D}_f$.

C'est un ensemble où chaque antécédent x exactement une image y par f .

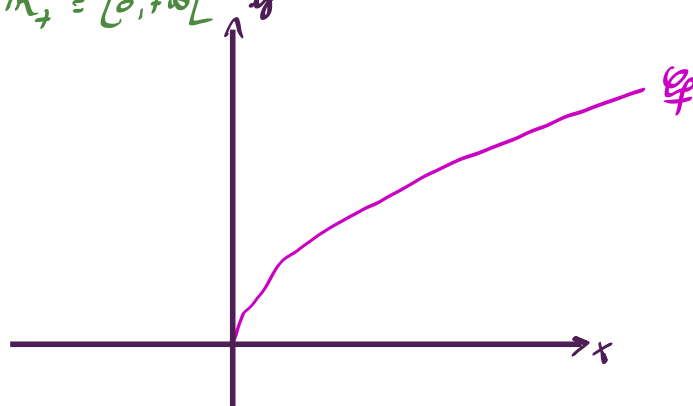
Exemples : 1. $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

2. $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$

Solution ① $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
 $\mathbb{R}^*$

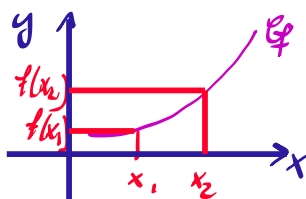


② $\Delta_{f_2} = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$



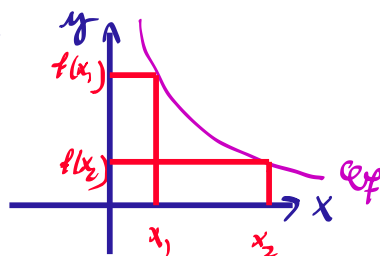
3. Fonctions croissantes, décroissantes, constantes

• croissante



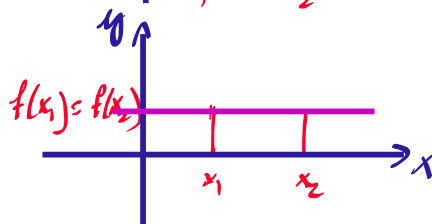
soient x_1 et $x_2 \in \mathcal{D}_f$ avec $x_1 \leq x_2$
alors $f(x_1) \leq f(x_2)$

• décroissante



soient x_1 et $x_2 \in \mathcal{D}_f$ avec $x_1 \leq x_2$
alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

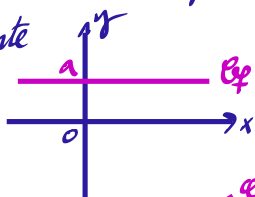
• constante



soient x_1 et $x_2 \in \mathcal{D}_f$ avec $x_1 \leq x_2$
alors $f(x_1) = f(x_2)$

④ Quelques fonctions classiques

• fonction constante
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto a$

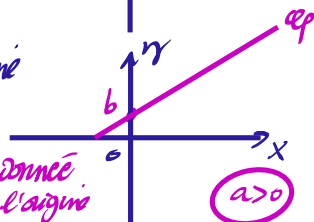


• fonction affine

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto ax+b \rightarrow$ ordonnée
 coefficient $\nearrow$ à l'origine
 direction

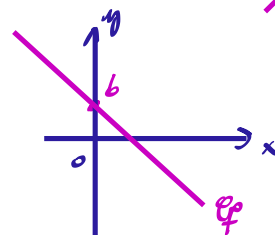
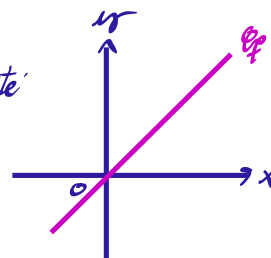
• fonction valeur absolue

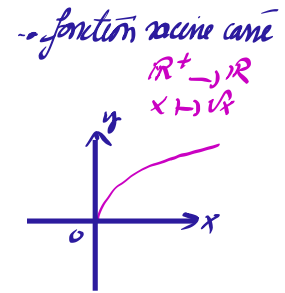
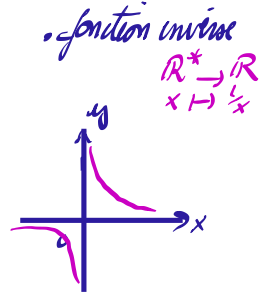
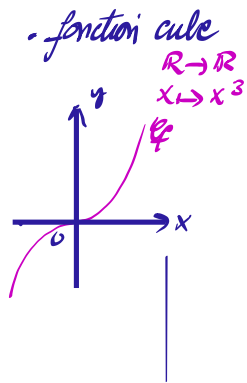
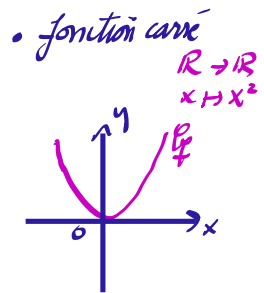
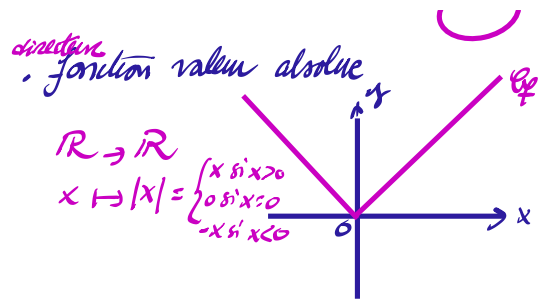


• fonction identité

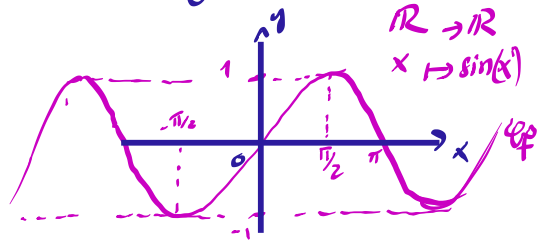
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x$

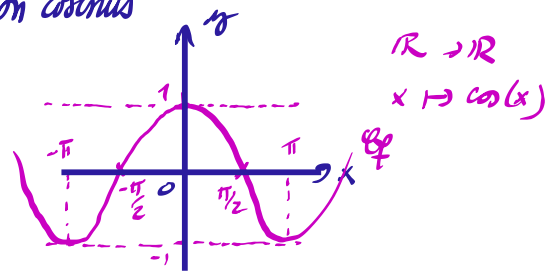




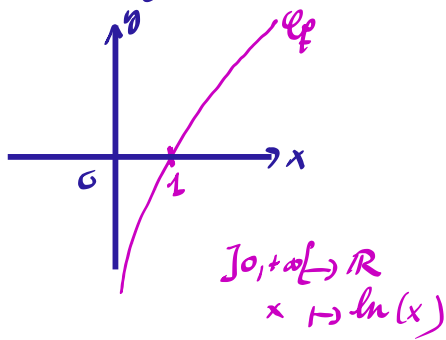
• fonction sinus



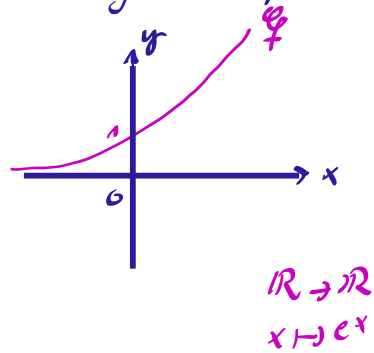
• fonction cosinus



• fonction logarithme népérien



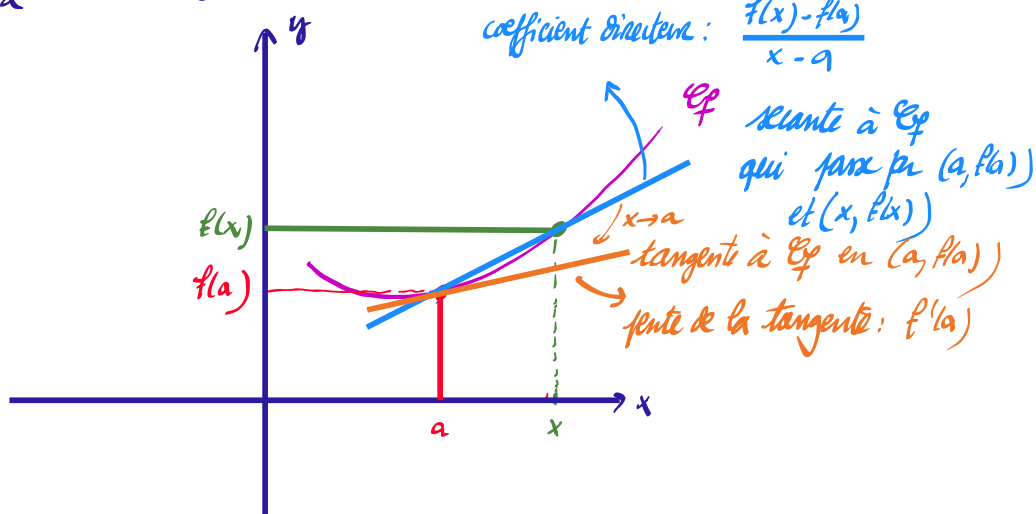
• fonction exponentielle



⑤ Dérivées soit $f: I \rightarrow J$ une fonction
soit $a \in I$

On dit que f est dérivable en a si et seulement si

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ existe, $f'(a)$ est appelée dérivée de f en a

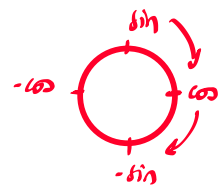


Autre notation: on a $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

si on pose $h = x - a$ alors $x = a + h$ et si $x \rightarrow a$ alors $x - a = h \rightarrow 0$
et par conséquent $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Dérivées classiques :

	f	f'
constante	$a (a \in \mathbb{R})$	0
affine	$ax+b$	a
carré	x^2	$2x$
puissance	x^n	$n x^{n-1}$
racine carré	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
inverse	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-1 x^{-1-1} = -1 x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
cosinus	$\cos(x)$	$-\sin x$
sinus	$\sin(x)$	$\cos x$
logarithme népérien	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
exponentielle	e^x	e^x



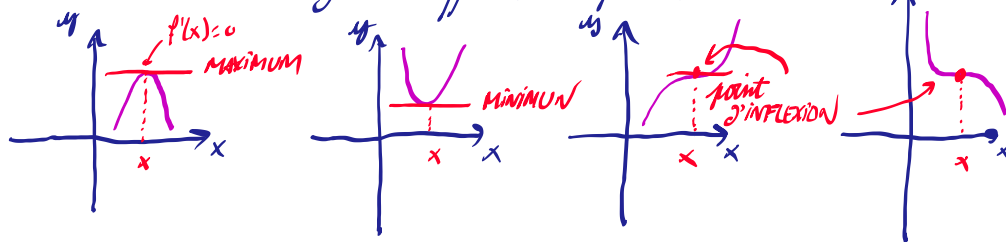
8 septembre 2025

Propriété: 1. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$

- . $f'(x) > 0$ alors f est STRICTEMENT CROISSANTE
- . $f'(x) < 0$ " " DECROISSANTE
- . $f'(x) = 0$ alors f est CONSTANTE

ATTENTION: Si $f'(x) = 0$ pour un "x isolé" on ne peut pas conclure directement. Il y a en effet 4 cas possibles

Directement. Il y a en effet 4 cas possibles



$$\begin{aligned} 2. (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

3. NOUVEAUTÉ: dérivée d'une fonction composée

$$\begin{aligned} f(x): \\ f: x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Question: qu'est-ce qu'une fonction composée?

Exemple:

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= \sqrt{\cos(x)} & x &\xrightarrow{\cos} \cos(x) \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{\cos(x)} \\ 2. f(x) &= \frac{1}{3x+2} & x &\xrightarrow{x \mapsto 3x+2} 3x+2 \xrightarrow{x \mapsto \frac{1}{x}} \frac{1}{3x+2} \end{aligned}$$

De façon générale : soient f_1 et f_2 , deux fonctions

On pose: $x \xrightarrow{f_1} f_1(x) \xrightarrow{f_2} f_2(f_1(x))$
 $\searrow$
 f $f(x) = f_2(f_1(x))$

La fonction f est la composée de 2 fonctions f_1 et f_2 et on note:

$f(x) = f_2(f_1(x))$ on écrit encore $f(x) = f_2 \circ f_1(x)$ ↗ ROND

Exemples : si $f_1: x \mapsto \sqrt{x}$ et $f_2: x \mapsto \sin x$

a. Que vaut $f_1 \circ f_2(x)$? $x \xrightarrow{\sin} \sin x \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{\sin x}$

b. Que vaut $f_2 \circ f_1(x)$? $x \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{x} \xrightarrow{\sin} \sin(\sqrt{x})$



ATTENTION: L'ORDRE COMTE

Autrement dit $f_1 \circ f_2(x) \neq f_2 \circ f_1(x)$

Quelle est la dérivée d'une fonction composée?

Soit $f = f_2 \circ f_1$ c'est à dire $f(x) = f_2(f_1(x))$

Alors $f'(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$

exemple: si $f_1: x \mapsto \sqrt{x}$ et $f_2: x \mapsto \sin x$

ici $f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f_2'(x) = \cos x$

① $f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \sqrt{\sin(x)}$

$$(f_1 \circ f_2)'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x$$

$x \in]0, \pi[$ (par ex.)

② $f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = \sin(\sqrt{x})$

$$(f_2 \circ f_1)'(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exercice: Soit u une fonction ($u: x \mapsto u(x)$)

Déterminez les dérivées de:

- (a) u^2 (b) $\sqrt{u}$ (c) e^u (d) $\ln(u)$

solution

(a) Dérivée de u^2 :

$$x \xrightarrow[\text{f}_1]{u} u(x) \xrightarrow[\text{f}_2]{x \mapsto x^2} u(x)^2$$

$$f_1(x) = u(x) \text{ et } f_2(x) = x^2$$

$$f'_1(x) = u'(x) \text{ et } f'_2(x) = 2x$$

$$\text{Ici } u^2(x) = f_2(f_1(x))$$

$$\text{Donc } u^2(x)' = f'_2(f_1(x)) \cdot f'_1(x) \\ = 2u(x) \cdot u'(x)$$

$$\text{Conclusion: } u^2(x)' = 2u(x) \cdot u'(x)$$

⑥ Dérivée de $\sqrt{u}$:

$$x \mapsto u(x) \mapsto \sqrt{u(x)}$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= u(x) \text{ et } f_2(x) = \sqrt{x} \\ f_1'(x) &= u'(x) \text{ et } f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \text{Ici, } \sqrt{u(x)} &= f_2(f_1(x)) \\ \text{Donc } \sqrt{u(x)}' &= f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x) \end{aligned}$$

Conclusion: $\sqrt{u(x)}' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

⑦ e^u : $x \xrightarrow[f_1]{u} u(x) \xrightarrow[f_2]{x \mapsto e^x} e^{u(x)}$

$$f_1(x) = u(x) \text{ et } f_2(x) = e^x \quad \text{donc } f_1'(x) = u'(x) \text{ et } f_2'(x) = e^x$$

$$\text{Ici } e^{u(x)} = f_2(f_1(x)) \quad \text{Donc } (e^{u(x)})' = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

Conclusion: $(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$

⑧ $\ln(u)$: $x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{\ln} \ln u(x)$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= u(x) & f_2(x) &= \ln(x) \\ f_1'(x) &= u'(x) & f_2'(x) &= \frac{1}{x} \\ \ln(u(x)) &= \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \end{aligned}$$

Conclusion: $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

En résumé (à connaître par cœur)

$$(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

on aurait pu aussi montrer que:

$$\cos(u) = -u' \sin(u)$$

$$\sin(u) = u' \cos(u)$$

$$e^u = u'e^u$$

$$\ln u = \frac{u'}{u}$$

$$\sin(u) = u' \cos(u)$$

$$\frac{1}{u} = -\frac{u'}{u^2}$$

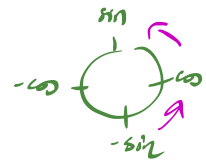
6. Primitives

Définition

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$) avec f continue sur I
une primitive de f sur I est une fonction F
dérivable sur I , telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$
On la note aussi $F(x) = \int f(x) dx$

Exemple:

Si $f(x) = \cos x$ que vaut $\int f(x) dx$?
on a $\int f(x) dx = F(x)$ où $\int \cos(x) dx = \sin x$
est une primitive de $\cos$.



Propriété: attention les primitives sont définies à une constante près
c'est-à-dire que les primitives de f s'écrivent : $F(x) + k$ (où $k \in \mathbb{R}$
est une constante)

Preuve: Soient F_1 et F_2 deux primitives de f

Par définition: $F_1'(x) = f(x)$

- $F_2'(x) = f(x)$

$$\underline{F_1'(x) - F_2'(x) = 0} \quad \text{or} \quad (F_1 - F_2)' = F_1' - F_2'$$

donc on a $(F_1 - F_2)'(x) = 0$ $\rightarrow$ fonction dont la dérivée est nulle

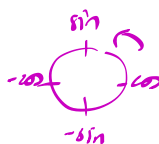
Donc $F_1(x) - F_2(x) = k$ (constante)

donc $F_1(x) = F_2(x) + k$

Quelques primitives connues:

Quelles sont les primitives de:

f	F
k	$kx + c$ (c est constante)
x	$\frac{x^2}{2} + c$
x^2	$\frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$



Rappel: $(kf(x))' = k \cdot f'(x)$

$$\frac{1}{2} (x^2)' = (2x)^1$$

$$\frac{1}{2} (x^2)' = x$$

$$(\frac{1}{2} x^2)' = x$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Propriété des primitives:

$$\int f(x) dx = F(x) \\ \text{alors } F'(x) = f(x)$$

$$① \int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$② \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$③ \int (f(x) + g(x))' dx = \int (f'(x) + g'(x)) dx = \int f'(x) dx + \int g'(x) dx$$

$$\begin{aligned} ① &= f(x) + C_1 + g(x) + C_2 \\ &= f(x) + g(x) + C \quad (\text{car } C = C_1 + C_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ④ \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx \\ = \int (f(x)g(x))' dx = f(x)g(x) + C \end{aligned}$$

$$(5) \int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx = \int \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$$

$$(6) \int f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) dx = \int (f_2 \circ f_1)'(x) = f_2 \circ f_1(x) + C \\ = f_2(f_1(x)) + C$$

Example:

$$(1) \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int (\ln|u(x)|)' dx = \ln|u(x)| + C$$

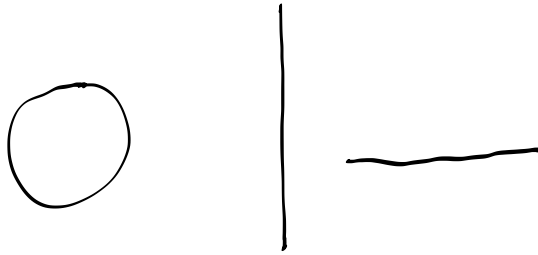
$$(2) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\sin' x}{\sin x} dx = \ln|\sin(x)| + C$$

$$(3) \int u'(x) e^{u(x)} dx = \int (e^{u(x)})' dx = e^{u(x)} + C$$

$$(4) \int x^2 e^{x^3} dx = \int 3x^2 e^{x^3} = \int \frac{1}{3} (3x^2 e^{x^3}) dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \int x^2 e^{x^3} dx &= \int \frac{3}{3} x^2 e^{x^3} = \int \frac{1}{3} (3x^2 e^{x^3}) dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int (e^{x^3})' dx \\
 &= \frac{1}{3} e^{x^3} + C
 \end{aligned}$$

exercice: Déterminer $\int \frac{3}{2\sqrt{3x+5}} dx$



10 septembre 2025

Exercice Déterminer les primitives de $x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{3x+5}}$

$$\int \frac{3}{2\sqrt{3x+5}} dx = \int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} dx = \sqrt{u(x)} + C = \sqrt{3x+5} + C$$

on pose $u(x) = 3x+5$
 $u'(x) = 3$

Propriété intégration par parties

Rappel : soient u et v , deux fonctions dérivables

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)' - uv' = u'v \quad \text{qu'on peut écrire} \quad \boxed{u'v = (uv)' - uv'}$$

$$\begin{aligned} \text{alors} \quad \int u'v dx &= \int ((uv)' - uv') dx \\ &= \int (uv)' dx - \int uv' dx \end{aligned}$$

Rappel : $\int f'(x) dx = f(x) + C$

$$\boxed{\int u'v dx = uv - \int uv' dx} \quad \text{formule d'intégration par parties}$$

Exemple : Calculer $\int x e^x dx$

on pose: $u'(x) = e^x \rightarrow$ donc $u(x) = e^x$
et $v(x) = x \rightarrow$ donc $v'(x) = 1$

Par intégration par parties $\int x e^x dx = \underbrace{x e^x} - \int \underbrace{1 \cdot e^x dx}$
 $= x e^x - \int e^x dx$
 $= x e^x - e^x + C$
 $= \boxed{e^x(x-1) + C}$

Exercice : $\boxed{\int \ln x dx}$ $= \int \underset{u'}{\uparrow} 1 \cdot \underset{v}{\uparrow} \ln x dx = \underset{u}{\uparrow} x \cdot \underset{v}{\uparrow} \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 \cdot dx$
 $= x \ln x - x + C$
 $= \boxed{x(\ln x - 1) + C}$
On pose $u'(x) = 1$ donc $u(x) = x$
 $v(x) = \ln x$ donc $v'(x) = \frac{1}{x}$

⑦ Intégrales

Définition

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec f continue sur $[a, b]$

On note l'intégrale de a à b de f , l'expression suivante:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f$$

Question: quelle est la différence entre une primitive et une intégrale?

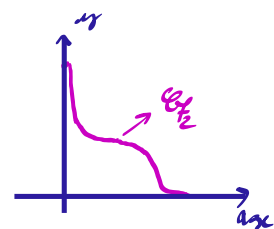
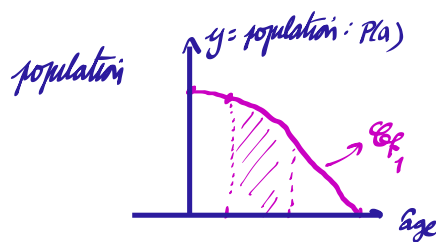
primitive: $\int f(x) dx = F(x) + C$
 pas les bornes a et b $\nearrow$ fonction

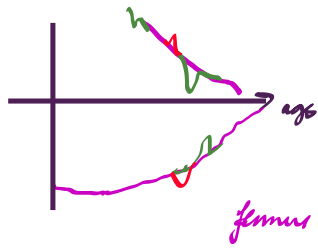
intégrale: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
 il y a $\nearrow$ les bornes a et b un nombre

Interprétation:



Hommes





0 | 20ans | 50ans | 20ans | age a

age

$$\int_{20}^{50} P(a) da = \text{population entre 20 et 50 ans}$$

$$\text{population totale: } \int_0^{+\infty} P(a) da.$$

Remarques: on a $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \rightarrow$ nombre

- si $b = x$ alors on a $\int_a^x f(s) ds = F(x) - F(a) \rightarrow$ fonction
 ↑ attention
 prendre une variable $\neq x$
- si $b = a$ on a $\int_a^a f(s) ds = F(a) - F(a) = 0$
- si $b = x$: $\left(\int_a^x f(s) ds \right)' = (F(x) - F(a))' = \underset{1}{F(x)'} - \underbrace{F(a)'}_{=0} = \boxed{f(x)}$

$$\boxed{\left(\int_a^x f(s) ds \right)' = f(x)} \quad \text{théorème fondamental du calcul}$$

Exemple: calculer ① $\int_0^2 x^2 dx$ ② $\int_1^2 \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} dx$

③ $\int_0^1 \cos(x) e^{\sin x} dx$ ④ $\left(\int_0^x \sin(\cos(\sqrt{t})) dt \right)'$

- ① on calcule d'abord la ^{avec $c=0$} primitive de $x \mapsto x^2$: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$
 donc $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} - 0 = \boxed{\frac{8}{3}}$
 $\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $F(x) \quad F(b) \quad F(a)$
 $a=0 \quad b=2$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x) + c]_a^b$$

$$= F(b) + c - (F(a) + c)$$

$$= F(b) + c - F(a) - c$$

② $\int_1^3 \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} dx$ on sait que $\int \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} dx = \sqrt{3x+2} + c$

donc $\int_1^3 \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} dx = \left[\sqrt{3x+2} \right]_1^3 = \sqrt{3 \cdot 3 + 2} - \sqrt{3 \cdot 1 + 2}$
 $= \boxed{\sqrt{11} - \sqrt{5}}$

b. Equations différentielles
Motivation utilise les équations

Motivation :

on utilise les équations différentielles pour décrire certains phénomènes qui varient en fonction du temps (ou alors d'autres paramètres: la température, la pression, l'âge...)

Par exemple :

• comment évolue la concentration et l'efficacité d'un médicament dans le corps :

le médicament est dégradé par l'organisme
il peut être efficace ou pas pour certains organes
il peut y avoir des effets secondaires, de la résistance, ou de l'accoutumance...

→ c'est la PHARMACOKINÉTIQUE - PHARMACODYNAMIQUE (PK-PD)

• comment évolue une épidémie : en fonction du nombre d'infectés, des personnes saines, de la méthode de transmission, du type de pathogène etc...

• Dynamique de population

évolution d'une population $P(t)$

la variation par rapport au temps de cette population s'écrit: $P'(t)$

(on écrit aussi $\frac{d}{dt}P(t)$)

MALTHUS (1790)



$$P'(t) = bP(t) - dP(t) = (b-d)P(t)$$

$$= k P(t)$$

on pose $k = b-d$

$$f'(x) = f(x)$$

équation différentielle:

$$P'(t) = k P(t)$$

Définition: une équation différentielle ordinaire (on note EDO) d'ordre n est une équation qui relie une fonction: $x: t \mapsto x(t)$ ($t \in I \subset \mathbb{R}$) avec ses dérivées successives $x', x'', x''', x^{(4)}, \dots, x^{(n)}$ de la façon suivante:

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

Notation: t : variable
 x : fonction inconnue

Exemple: dérivées successives:
soit $x: t \mapsto t^4 + 2t^3 + 3t^2 + t + 1$

alors $x'(t) = 4t^3 + 6t^2 + 6t + 1$

$$x''(t) = 12t^2 + 12t + 6$$

$$) = 12t^2 + 12t + 6$$

$$x'''(t) = 24t + 12$$

$$x^{(4)}(t) = 24$$

$$x^{(5)}(t) = 0$$

Exemple d'EDO

$$\underbrace{3x''(t) + \cos(x'(t)) + x^2(t) - 3t + 2}_{F(t, x, x', x'')} = 0$$

Définition

EDO sous forme normale

On appelle EDO sous forme normale, d'ordre n , toute équation de la forme

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

Exemple : $x'(t) = f(t, x(t))$ ou encore MALTHUS: $p'(t) = k p(t)$

Définition

EDO autonome

On appelle EDO autonome, d'ordre n , toute équation de la forme

$$F(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

ne dépend pas explicitement de t !! le t n'apparaît que dans le x

Définition: EDO linéaires

On appelle EDO linéaire d'ordre n , toute équation de la forme:

$$a_n(t) x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) x^{(n-1)}(t) + \dots + a_2(t) x''(t) + a_1(t) x'(t) + a_0(t) x(t) = g(t)$$

- les coefficients: $a_1, a_2, \dots, a_n$ et la fonction g : sont:
 - soit nuls
 - soit constants
 - soit des fonctions de t

MAIS JAMAIS des fonctions de x et de ses dérivées:
on ne peut pas avoir par exemple: $a_2(x(t), x'(t))$

- les fonctions $x, x', x'', \dots, x^{(n)}$ ne s'expriment qu'avec une puissance de 1 !!!

• les fonctions $x, x', x'', \dots, x^{(n)}$ ne s'expriment qu'avec une puissance de t !!!
 c'est à dire qu'on n'a jamais x'^2 ou $\cos(x(t))$ ni $\sqrt{x}$ ni e^x , $\ln x, \dots$
 puissance $\uparrow$ $\cos$

exercice : pour chacune des edo suivantes : donner l'ordre, dire si elles sont linéaires ou pas, dire si elles sont autonomes ou pas, dire si elles sont sous forme normale ou pas

	ORDRE	AUTONOME	LINÉAIRE	FORME NORMALE
① $x^{(3)}(t) + t^2 x''(t) + \cos(t) x(t) = e^t$	3	NON	OUI	non (mais on peut la mettre sous forme normale)
② $\cos(x''(t)) + x'(t) = 5$	2	OUI	NON	non (difficilement sous forme normale)
③ $3x^{(5)}(t) + 5t^2 x''(t) = -\cos(x(t))$	5	NON	NON	(*)
④ $3x^{(4)}(t) + 2x'(t) = 0$	4	OUI	OUI	(*)
⑤ $3x(t)x^{(4)}(t) + 2x'(t) = 0$	4	OUI	NON	(*) ... un peu plus compliqué

$$a_4(t)x^{(4)}(t) + a_3(t)x'(t) = 0$$

$$x^{(3)}(t) = e^t - t^2 x''(t) - \cos(t) x(t)$$

$$\textcircled{1} \sin(t) x'(t) + \cos(t) x(t) = 1$$

avec $t \in]0, \pi[$

$$\textcircled{2} x'(t) + \frac{1}{2\sqrt{t}} x(t) = 2 \quad \text{avec } t > 0$$

soit $t \in]0, \pi[$

$$\rightarrow x'(t) + \frac{\cos}{\sin(t)} x(t) = \frac{1}{\sin(t)}$$

~~$$x(t) + \frac{\sin}{-\cos} x(t) = -\cos(t)$$~~

~~$$\rightarrow e^{\int -\cos(t)} x'(t) + \frac{\sin}{\cos} x e^{\int -\cos(t)} x(t) = -\cos(t) x e^{\int -\cos}$$~~

~~$$\rightarrow e^{\int -\cos(t)} \cdot x(t) = \int -\cos e^{-\cos}$$~~

~~$$\Rightarrow x(t) = \int -\cos e^{-\cos} + e^{\cos} = 1$$~~

on multiplie par $e^{\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt}$ or $\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ forme $\int \frac{u'}{u} = \ln |u(t)|$

ainsi, on a $e^{\ln |\sin(t)|} = e^{\ln \sin(t)} = \sin(t)$
 car $t \in]0; \pi[$

L'équation s'écrit: $\sin(t) x'(t) + \sin(t) \times \frac{\cos(t)}{\sin(t)} x(t) = \frac{\sin(t)}{\sin(t)} = 1$

$$\underbrace{\sin(t)}_{u(t)} x'(t) + \underbrace{\cos(t)}_{u'(t)} x(t) = 1$$

$$\Leftrightarrow (\sin(t) \times x(t))' = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(t) \times x(t) = \int 1 dt + K$$

$$\Leftrightarrow \sin(t) \times x(t) = t + K_2 - K_1 = t + K \text{ car } K = K_2 - K_1$$

$$x(t) = \frac{t + K}{\sin(t)} \text{ or } t \in]0; \pi[\text{ donc } \frac{t + K}{\sin(t)} \text{ est défini}$$

$$(2) \quad x'(t) + \frac{1}{2\sqrt{t}} x(t) = 2 \quad t > 0$$

on multiplie (E) par $e^{\int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt}$

24 septembre 2025

CM 3/4

L'objectif aujourd'hui est d'étudier des EDO d'ordre 1, AUTONOMES, sous forme normales et non linéaires, c'est à dire des edo de la forme

$$\boxed{x'(t) = f(x(t))} \quad \text{si } t \in I \subset \mathbb{R} \quad (x' = f(x))$$

avec $x : I \rightarrow J$ ($I, J \subset \mathbb{R}$) et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ f est continue sur J
inconnue $\nearrow$ $t \mapsto x(t)$ donnée $\nearrow$ $x \mapsto f(x)$ dérivable sur J
et f' continue sur J

Propriété: Si f est continue sur J alors on a l'existence et l'unicité de la solution de l'edo $x'(t) = f(x(t))$ dès que l'on donne une condition initiale $x(t_0) = x_0$, avec $t_0 \in I$ (conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz)

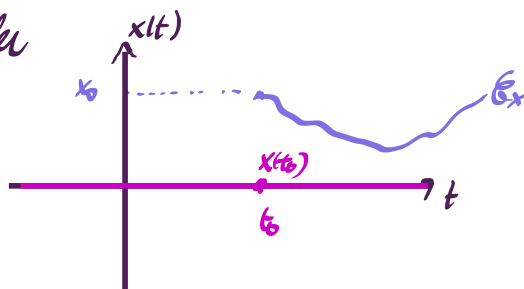
Remarque: dit d'une autre façon, ça signifie que par un point donné, il ne peut passer qu'une seule solution (à cause de l'unicité) ou encore

les courbes représentant les solutions NE PEUVENT PAS SE CROISER





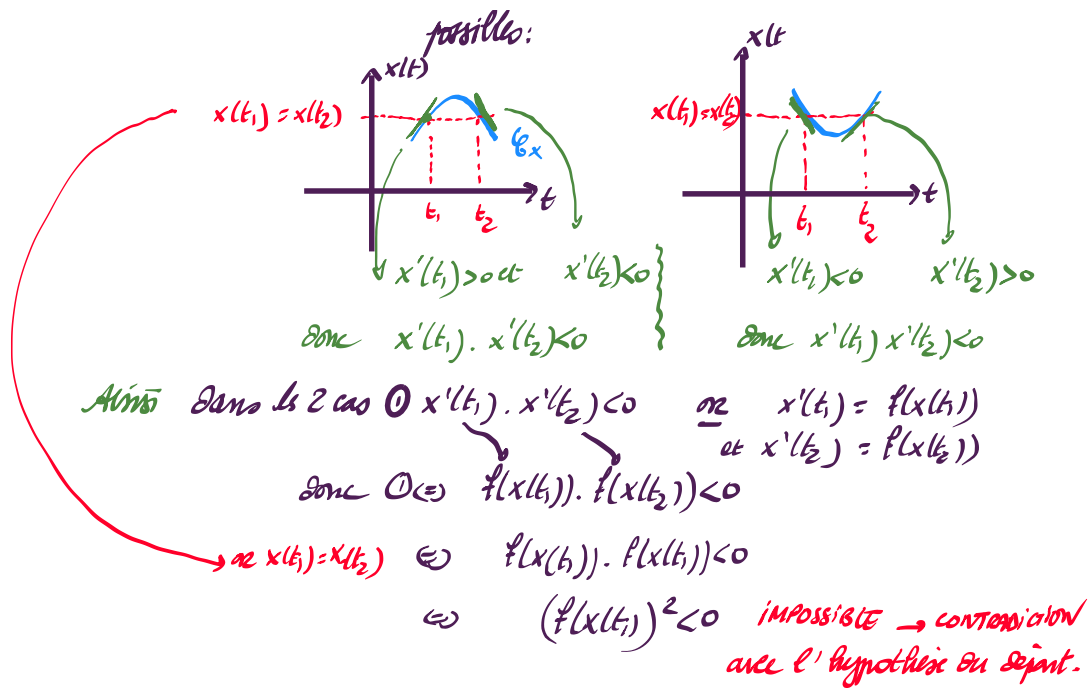
Conséquence : si la fonction $x(t) = 0$ pour tout t (fonction nulle) est solution de $x'(t) = f(x(t))$ alors aucune autre solution ne pourra s'annuler



Propriété (importante) des solutions non constantes de $x'(t) = f(x(t))$
avec $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, où f est continue sur J , sont monotones
(càd que x est soit croissante sur I , soit décroissante sur I)

Preuve: Démonstration par l'absurde
On suppose que la solution des $x'(t) = f(x(t))$ n'est pas monotone sur I .
Alors on a 2 cas possibles:

$x(t)$



Par conséquent les solutions de $x'(t) = f(x(t))$ sont MONOTONES!

Ceci nous permet de passer à la section suivante:

II Etude qualitative des équations différentielles

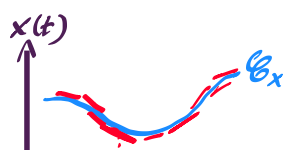
Introduction Dans la majorité des cas, on ne sait pas résoudre les edo.

Il est donc quasiment impossible d'avoir des solutions EXPLICITES de ces équations et de faire ce qu'on appelle une étude QUANTITATIVE du problème.

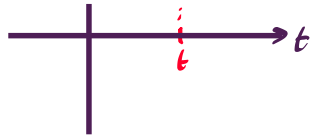
Par contre dans certains cas, il est possible de faire ce qu'on appelle une étude QUALITATIVE c'est-à-dire que l'on ne connaît la solution de façon exacte mais on sait comment elle se comporte en temps long. (c'est-à-dire quand $t \rightarrow +\infty$). On appelle ça un comportement ASYMPTOTIQUE.

Question: comment procéder à l'étude qualitative d'une solution d'une edo?

Réponse: grâce aux tangentes : edo : $x'(t) = f(t, x(t))$



$\hookrightarrow$ connue
 pente de la tangente en $x(t)$;



Exemple : On considère l'EDO $x'(t) = t$ EDO d'ordre 1, non autonome, linéaire sous forme normale

Comment dessiner l'allure des solutions sans les calculer

étape 1 on recherche les courbes où les tangentes (pentas) sont les mêmes c'est à dire les solutions de

$$x'(t) = k \quad \text{ou} \quad x'(t) = f(t, x(t))$$

soit $x'(t) = k \Leftrightarrow f(t, x(t)) = k$

Ici $f(t, x(t)) = t$ (on a $x'(t) = t$)

donc $x'(t) = k$ est équivalent à résoudre $t = k$, avec $k \in \mathbb{R}$

$k=0$: $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$k=1$: $x'(t) = 1 \Leftrightarrow t = 1$

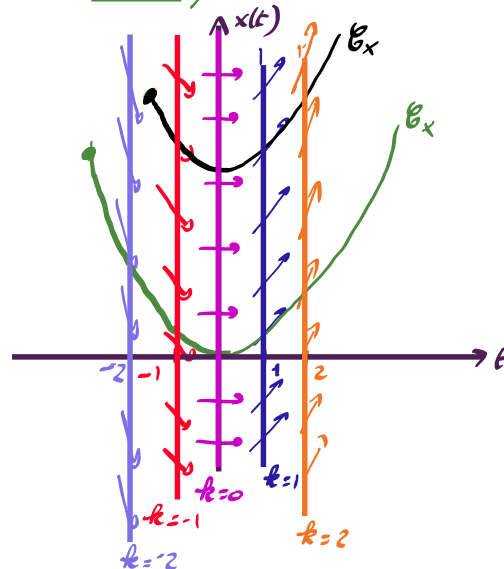
$k=-1$: $x'(t) = -1 \Leftrightarrow t = -1$

$k=2$: $x'(t) = 2 \Leftrightarrow t = 2$

$k=-2$: $x'(t) = -2 \Leftrightarrow t = -2$

$$x'(t) = t$$

$$\text{donc } x(t) = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C$$



Autre exemple:

Exemple: Représenter les solutions de l'EDO

$$x'(t) = x^2(t) - t$$

On va représenter les solutions de cette EDO grâce aux tangentes de $x(t)$:

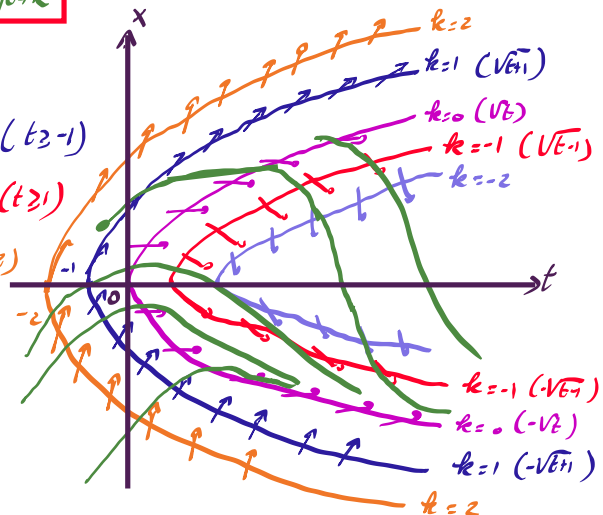
On cherche donc la solution de $x'(t) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$

On $x'(t) = k \Leftrightarrow x^2 - t = k$ (on enlève le t de $x(t)$ pour simplifier)

$$\Leftrightarrow x^2 = t + k \rightarrow \text{il faut que } t + k \geq 0 \text{ donc pour un } k \in \mathbb{R} \text{ donné } t + k \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -k$$

$$\text{si } t \geq -k \Leftrightarrow x = \sqrt{t+k} \text{ ou } -\sqrt{t+k}$$

- $k=0$ alors $x'=0 \Leftrightarrow x = \sqrt{t}$ ou $x = -\sqrt{t}$
- $k=1$ alors $x'=1 \Leftrightarrow x = \sqrt{t+1}$ ou $x = -\sqrt{t+1}$ ($t \geq -1$)
- $k=-1$ alors $x'=-1 \Leftrightarrow x = \sqrt{t-1}$ ou $x = -\sqrt{t-1}$ ($t \geq 1$)
- $k=2$ alors $x'=2 \Leftrightarrow x = \sqrt{t+2}$ ou $x = -\sqrt{t+2}$
- $k=-2$ alors $x'=-2 \Leftrightarrow x = \sqrt{t-2}$ ou $x = -\sqrt{t-2}$



Définition : On appelle isocline- k ("de même pente k ") de l'edo $x'(t) = f(t, x(t))$ l'ensemble des points du plan tels que $x'(t) = k$ c-à-d l'ensemble des solutions de l'équation $f(t, x(t)) = k$

Attention en général les isoclines ne sont pas solutions de l'edo.

Exercice Dessiner les isoclines- k de l'edo $x'(t) = x(t)(1-x(t))$
 $\hookrightarrow x' = x(1-x) = f(x)$

Les isoclines- k de l'edo viennent

$$x' = k \text{ c-à-d } x(1-x) = k, k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 = k$$

$$x^2 - x + k = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot k$$

Rappel : $ax^2 + bx + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

si $\Delta < 0$ aucune solution

$$\text{si } \Delta = 0 \quad x = \frac{-b}{2a}$$

si $\Delta > 0$

$$(\Rightarrow) x^2 - x + k = 0$$

$\uparrow$ $a=1$ $\uparrow$ $b=-1$ $\uparrow$ $c=k$

$$\Delta = 1 - 4k$$

si $\Delta > 0$ 2 solutions

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{et } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 4k < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < 4k$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4} < k}$$

PAS DE SOLUTION, DONC PAS D'ISOCLINE k pour $k > \frac{1}{4}$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4k = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k = \frac{1}{4}}$$

une seule isocline: $\boxed{x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}}$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 4k > 0$$

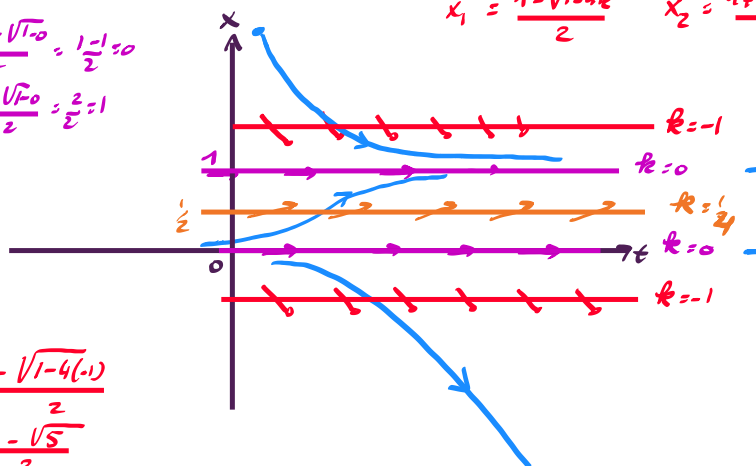
$$\Leftrightarrow 1 > 4k$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4} > k}$$

on a 2 courbes possibles: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4k}}{2} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4k}}{2}$$

• $k=0$: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$
 $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$



$k = \frac{1}{4}$ $x = \frac{1}{2}$

$k = -1$ $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(-1)}}{2}$
 $= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618...$

Remarque: de cet exemple on en tire plusieurs propriétés:

• on rappelle l'équation autonome $x'(t) = f(x(t))$

qu'on peut écrire sous forme simplifiée $x' = f(x)$

• les isoclines- k de cette équation sont toutes des lignes droites horizontales venant de $x' = k$ c-à-d solutions de $f(x) = k \rightarrow$ on trouve $x = \text{constante}$

• il y a une isocline particulièrement intéressante: c'est l'isocline-0 (appelée isocline-nulle) elle vient de $x' = 0$ c-à-d $f(x) = 0$

on trouve $x = \text{constante}$ t.q. $x' = 0$
 et donc $x'' = f'(x)$ c'est le seul moment

et $f(x)=0$ donc $x''=0$ c'est le seul moment

où l'isocline est également solution de l'eq.

- Si $f'(x)$ continue on a en plus existence et unicité des solutions
ce qui veut dire qu'aucune autre solution ne peut couper les isoclines nulles.

- NOTATION: les solutions des isoclines-0 portent un nom spécifique:
ce sont les équilibres (ou encore solution stationnaire)

↓
ce sont des solutions qui sont
des constantes (indépendantes de t)

on note les équilibres x^*

Pour résumer: les équilibres x^* vérifient $x^{*'}=0$ i.e. $f(x^*)=0$

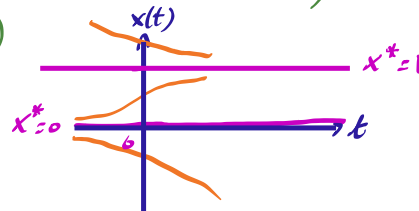
exemple: dans l'exemple précédent: $x'=x(1-x)$

les équilibres x^* vérifient $x^{*'}=0$ i.e. $x^*(1-x^*)=0$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^*=0} \text{ et } \boxed{x^*=1}$$

il y a donc 2 équilibres (solutions stationnaires)

et par existence et unicité des solutions, les autres solutions ne peuvent
les "couper")



Question: quelle est la méthode à suivre pour obtenir ce type de courbes
de façon simple:

Réponse: grâce à l'étude du signe de $\boxed{f(x)}$

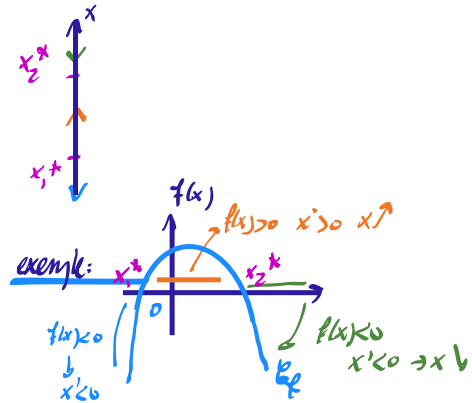
Comment: on considère l'eq $x'=f(x)$

- ① on cherche les solutions de $f(x)=0 \rightarrow$ ça nous donne les équilibres x^*
- ② on trace une droite verticale: $\uparrow x^*$

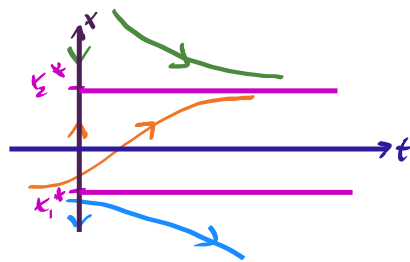
③ on place les x^* sur cette droite (supposons qu'on ait x_1^* et x_2^*)

④ on étudie le signe de f :

$$x' = f(x)$$

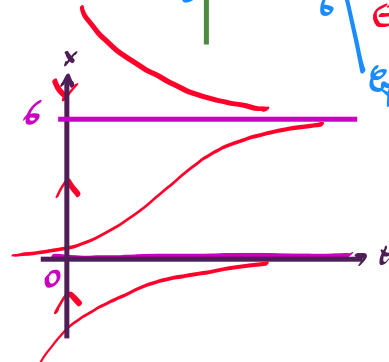
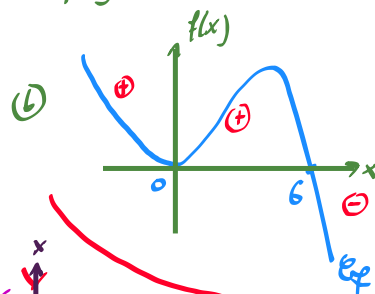
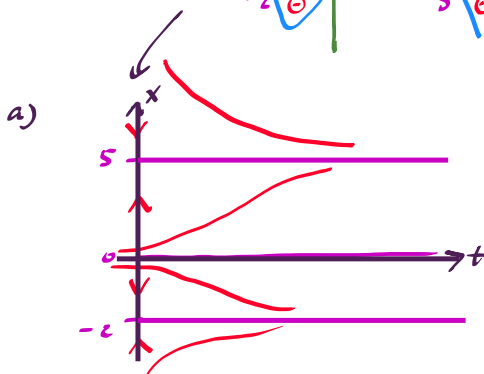
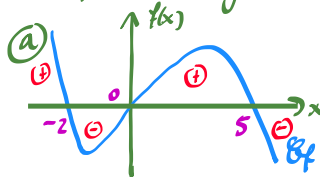


⑤ on en déduit les courbes solutions:



Exemples: tracer les solutions de l'EDO $x' = f(x)$

où f est de la forme:



exercice même question avec (a) $f(x) = x(x+1)(x-2)$

(b) $f(x) = x(x-3)^2$

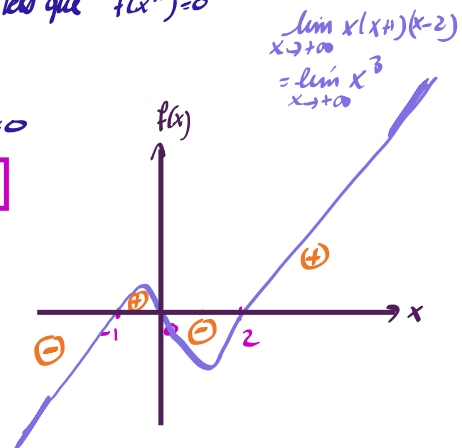
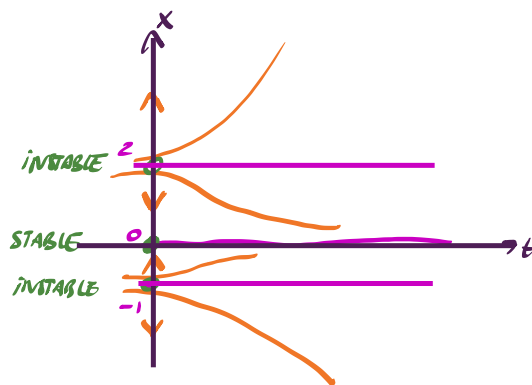
a. $x' = x(x+1)(x-2)$

on cherche les équilibres : c'est à dire les x^* constants tels que $f(x^*) = 0$

on $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x+1=0$ ou $x-2=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x^* = 0}$ ou $\boxed{x^* = -1}$ ou $\boxed{x^* = 2}$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+1)(x-2)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$

b. $x' = x(x-3)^2$

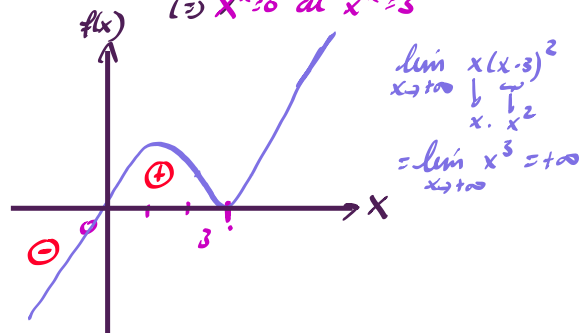
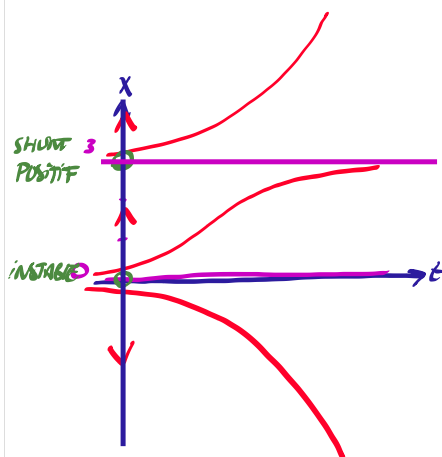
$f(x) = x(x-3)^2$

les équilibres viennent $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x(x-3)^2 = 0$

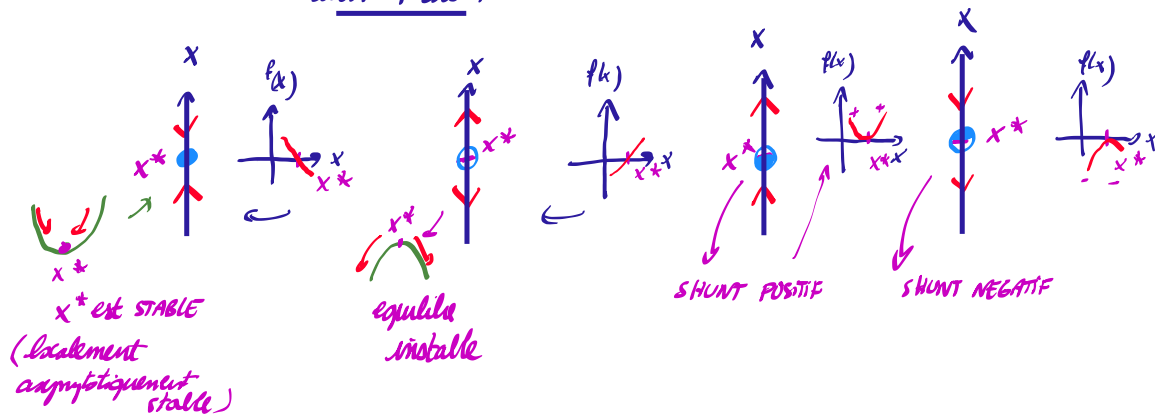
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x-3=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x^* = 0}$ ou $\boxed{x^* = 3}$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-3)^2$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot x^2$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

Remarque : dans les exemples précédents on remarque que l'on peut avoir 4 cas :



1^{er} octobre 2025 - correction test 1 :

1. Une edo autonome d'ordre n est de la forme

$$F(x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \text{ où } t \in \text{ICIR.}$$

Ex : $x'(t) = 3x(t)$

2. a. $3 \leq x^{(4)}(t) + \cos(t) x''(t) + 6x'(t) + 21x(t) = e^t$

→ ordre : 4. (deux $x^{(4)}$)

→ autonome : non à cause par exemple de $3t$

→ linéaire : oui car de la forme $a_4(t)x^{(4)}(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t)$

→ pas sous forme normale

→ pas sous forme normale

b. $\cos(x(t)) \cdot x'(t) + 5x(t) = \ln(x^2(t))$

→ ordre: 1 à cause de x'

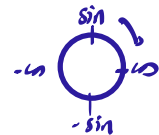
→ autonome: oui (tous les t apparaissent avec x et sa dérivée)

→ linéaire: non (à cause de $\cos(x(t))$)

→ pas sous forme normale

Exercice: a. $\int \underbrace{\cos(x)}_{u'} \underbrace{\sin(x)}_u dx$

de la forme $\int u' u dx = \frac{1}{2} \int 2u' u dx$
 $= \frac{1}{2} u^2 + C$
 $= \boxed{\frac{1}{2} \sin^2 x + C}$



$(u^2)' = 2u u'$

b. $\int_0^1 \frac{12x^2+3}{4x^3+3x+1} dx$

si $u(x) = 4x^3+3x+1$
 $u'(x) = 12x^2+3$

de la forme $\int \frac{u'}{u} dx = [\ln|u(x)|]_0^1$

$= [\ln|4x^3+3x+1|]_0^1$

$= \ln|4 \cdot 1^3+3 \cdot 1+1| - \ln(0+0+1)$

$= \boxed{\ln 8}$

c. $\int_1^x (\ln(\cos(s)))' ds = \ln(\cos(x))$

$(\int_a^x f(s) ds)' = f(x)$