

Laurent PUJO-MENJOUET
↑ PAS de t

pujo@math.univ-lyon1.fr
www.math.univ-lyon1.fr ~pujo

DDUA - BÂT BRACONNIER BUREAU 246

PROGRAMME

I. Introduction aux équations différentielles

- a. Rapels sur les fonctions, les dérivées, les primitives et intégrales
- b. Définition des équations différentielles,
résolution des ces équations quand elles sont linéaires
- (c. équation de BERNOLLI
↑ pas de c)
- d. Applications à la biologie et la médecine

II Étude qualitative des équations différentielles

- a. Équilibres et stabilité
- b. Modèles linéaires et modèles non linéaires
- c. Modèles de biologie et médecine

/ III Bifurcation

- a. Différents types de bifurcation
- b. Applications à la biologie & la médecine

(

6. Applications à la biologie & la médecine)

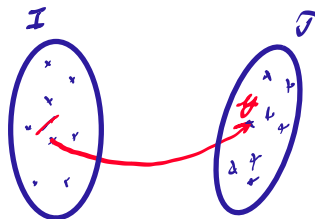
I Introduction aux équations différentielles

a. Rapels

① Définition d'une fonction

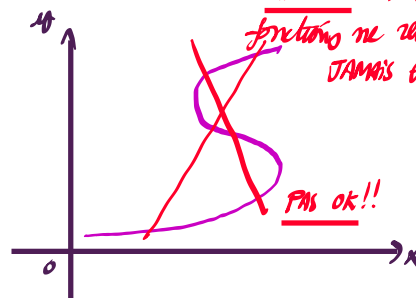
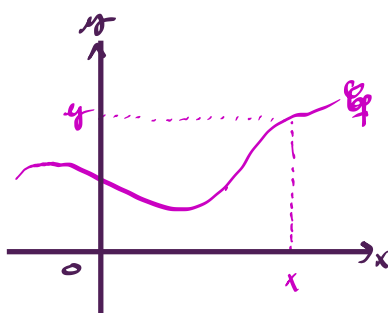
Définition: une fonction est une relation que l'on note en général f
entre 2 ensembles . un ensemble de départ : $I \subset \mathbb{R}$
un ensemble d'arrivée : $J \subset \mathbb{R}$

f met en relation un élément de I que l'on note x (antécédent)
et un " " de J " " y (image)



on note $y = f(x)$

Rappel: en général on représente la fonction f dans un repère CARTESIEN
cette représentation s'appelle GRAPH de f ou courbe représentative
de f et on la note $\mathcal{C}_f$



NOTATION:

$f: I \rightarrow J$ ← ensemble
 $x \mapsto y = f(x)$ ← élément
barre ↗ ↘

Exemple f

Exemple: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = x^2$



ATTENTION: ne pas confondre

f : fonction

$f(x)$: un nombre

$\mathcal{G}_f$: représentation graphique de f

donc il ne faudra PAS écrire:

~~$f(x)$~~ est croissante mais f est croissante

② Domaine de Définition

~ Il existe de nombreuses fonctions classiques. On les définit sur ce qu'

Il existe de nombreuses fonctions classiques. On les définit sur ce qu'on appelle un domaine de définition (on dit aussi ensemble de définition) que l'on note D_f .

C'est un ensemble où chaque antécédent x a exactement une image y par f .

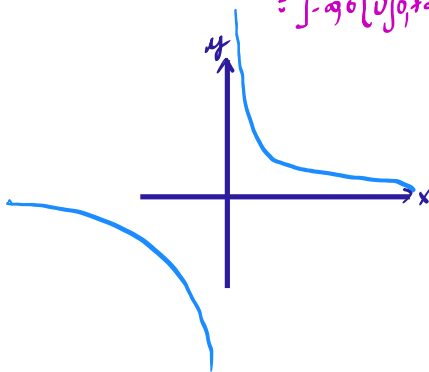
Exemples ① Déterminer le domaine de définition de f_1 et f_2

avec $f_1: x \mapsto \frac{1}{x}$ et $f_2: x \mapsto \sqrt{x}$

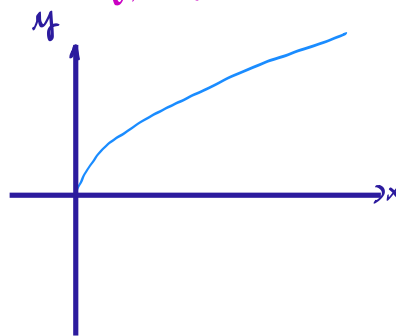
② Représenter $\mathcal{D}_{f_1}$ et $\mathcal{D}_{f_2}$

Solution

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f_1} &= \mathbb{R}^* \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ &=]-\infty[\cup]0; +\infty[\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f_2} &= \mathbb{R}^+ \\ &= [0; +\infty[\end{aligned}$$



3. Fonctions croissantes, décroissantes, constantes

- croissante**

soient x_1 et $x_2 \in \mathcal{D}_f$ avec $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$
- décroissante**

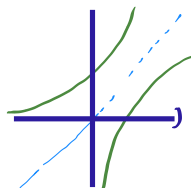
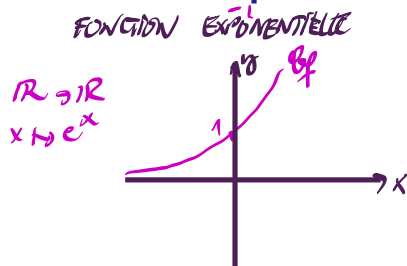
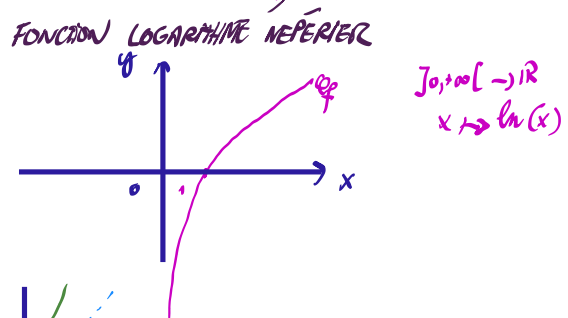
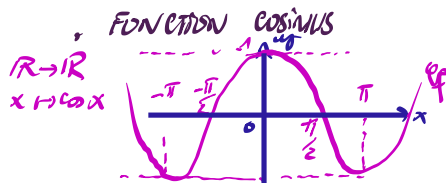
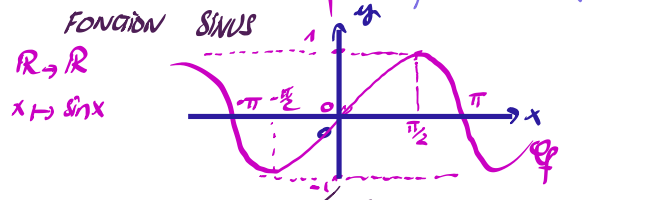
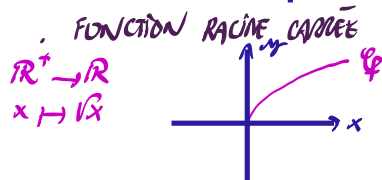
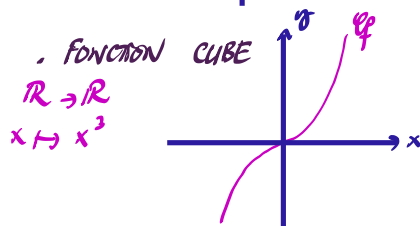
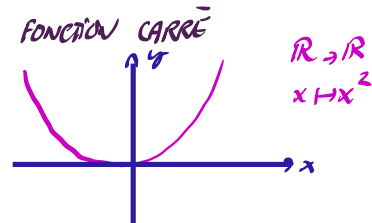
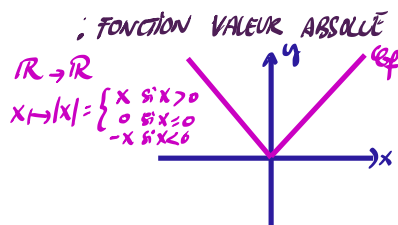
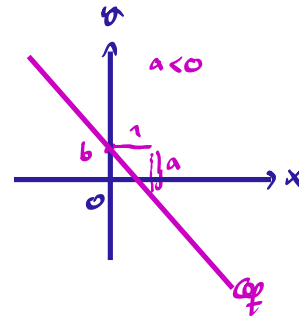
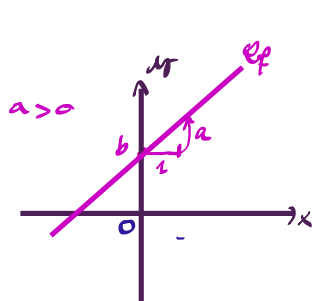
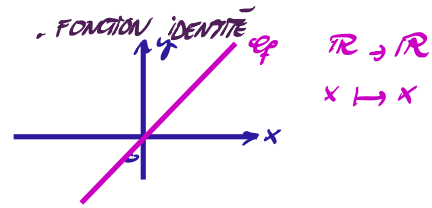
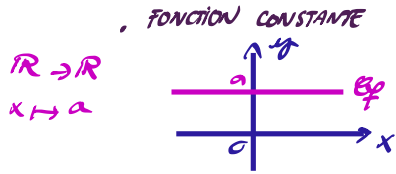
soient x_1 et $x_2 \in \mathcal{D}_f$ avec $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$
- constante**

soient x_1 et $x_2 \in \mathcal{D}_f$ alors $f(x_1) = f(x_2)$

4. Quelques fonctions classiques

FONCTION CONSTANTE

FONCTION IDENTITÉ



■

■

■

■

5. Dérivées

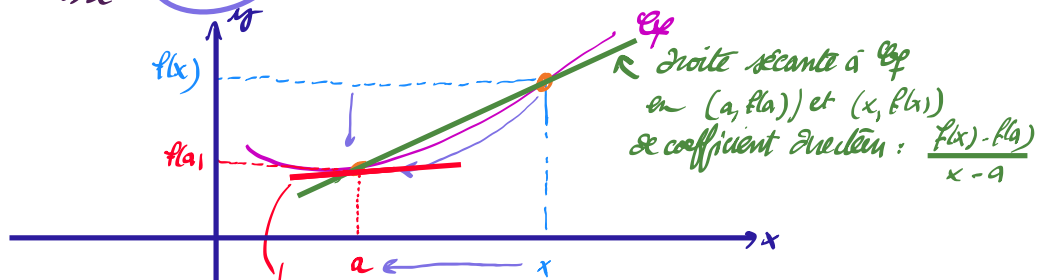
Soit $f: I \rightarrow J$ une fonction

soit $a \in I$

on dit que f est dérivable en a si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ existe.}$$

$f'(a)$ est appelé dérivée de f en a



tangente à $\mathcal{C}_f$
 en $(a, f(a))$
 se note $f'(a)$

→ ça veut dire que $x = a+h$

Autre notation

si on pose $h = x - a$ si $x \rightarrow a$ alors $h \rightarrow 0$

et on a $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ $\left(\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \Leftrightarrow h \rightarrow 0}} \frac{f(x) - f(a)}{\substack{x-a \\ \Leftrightarrow h}} \right)$

Dérivées classiques:

	f	f'
constante	a (ou k)	0
affine	$ax + b$	a
carré	x^2	$2x$
puissance	x^n	$n x^{n-1}$
racine carrée	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
inverse	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
cosinus	$\cos x$	$-\sin x$
sinus	$\sin x$	$\cos x$
ln	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
exp	e^x	e^x

$x^{1/2} \rightarrow \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $x^{-1} \rightarrow -1 x^{-1-1} = -1 x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$



