

9 septembre 2026. CM.

Exercices, ① $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int (\ln |u(x)|)' dx = \ln |u(x)| + C$

② $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ on remarque que $\sin'(x) = \cos x$

donc $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ est de la forme $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx$ avec $u(x) = \sin x$

alors $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin(x)| + C$

③ $\int u'(x) e^{u(x)} dx = \int (e^{u(x)})' dx = e^{u(x)} + C$

④ $\int x^2 e^{x^3} dx = ?$ on remarque que $(x^3)' = 3x^2$

Par conséquent $\int \frac{3}{3} x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx$ de la forme $\frac{1}{3} \int u'(x) e^{u(x)} dx$

alors $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} (e^{x^3} + C)$

⑤ $\int \frac{3}{2\sqrt{3x+5}} dx$ on rappelle que $(\sqrt{u(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x)$

or ici on remarque que $(3x+5)' = 3$

donc $\int \frac{3}{2\sqrt{3x+5}} dx$ est de la forme $\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \int (\sqrt{u(x)})' dx = \sqrt{u(x)} + C$

$\int \frac{1}{2\sqrt{3x+5}} dx$ est de la forme $\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \int \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = \sqrt{u(x)} + C$

Si on donc $\int \frac{3}{2\sqrt{3x+5}} dx = \boxed{\sqrt{3x+5}} + C$

Propriété: intégration par parties

Rappel: soient u et v deux fonctions dérivables

alors $(uv)' = u'v + uv'$ qu'on peut écrire: $\boxed{(uv)' - uv' = u'v}$

alors $(uv)' = u'v + uv'$ qu'on peut écrire: $(uv)' - uv' = u'v$

en intégrant des 2 cotés on obtient: $\int ((uv)' - uv') dx = \int u'v dx$

$\int f' dx = f$ $\Rightarrow \int (uv)' dx - \int uv' dx = \int u'v dx$
 $\Rightarrow uv - \int uv' dx = \int u'v dx$

qu'on écrit plutôt:

$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$ formule d'intégration par parties

Exemple: Calculer $\int x e^x dx$ ce n'est pas de la forme $\int u'(x) e^{u(x)} dx$ car que
 si $u(x) = x$ $u'(x) = 1$ et pas x

on utilise alors la méthode d'intégration par parties (I.P.P.)

on pose $u'(x) = e^x$ donc $u(x) = e^x$
 et $v(x) = x$ donc $v'(x) = 1$

on applique la formule d'intégration par parties et on obtient:

$\int x e^x dx = e^x \cdot x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$
 $\int \overset{\uparrow}{v} \overset{\uparrow}{u'} = uv - \int v'u$ $= \boxed{e^x(x-1) + c}$

exemple: Calculer $\int \ln(x) dx$?

Astuce: $\int \ln(x) dx = \int \underset{u'}{\uparrow} 1 \cdot \underset{v}{\uparrow} \ln(x) dx$ on pose $u'(x)=1$ $u(x)=x$
 et $v(x)=\ln x$ $v'(x)=\frac{1}{x}$

on applique la formule d'intégration par parties et obtient

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int \underset{u'}{\uparrow} 1 \cdot \underset{v}{\uparrow} \ln(x) dx = \underset{u \cdot v}{\ln(x) \cdot x} - \int \underset{u \cdot v'}{x \cdot \frac{1}{x}} dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + C \\ &= \boxed{x(\ln x - 1) + C} \end{aligned}$$

7. Intégrales

Définition: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec f continue sur $[a, b]$

On note l'intégrale de a à b de f l'expression suivante

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)} \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f$$

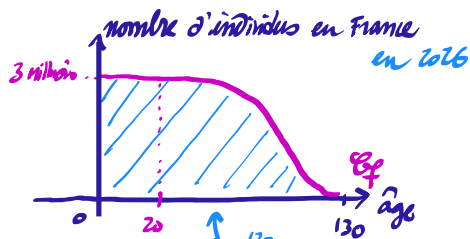
$= \underset{a}{\boxed{F(x)}} \overset{b}{\quad}$

Quelle est la différence entre une primitive et une intégrale ?

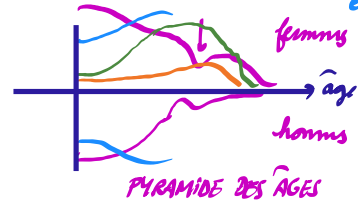
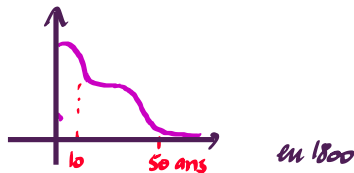
PRIMITIVE
 pas de bornes a et b → $\int f(x) dx = F(x) + C$
 ↑
FONCTION

INTEGRALE: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
 ↑ on a mis les bornes a et b
NUMÉRIQUE

Interpretation biologique de l'intégrale:
nombre d'individus en France



$\int_0^{130} f(x) dx =$ nombre total d'individus de tous les âges pour un certain temps, en 2026



Remarques: on a $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \rightarrow$ nombre

• si on pose $b=x$ $\int_a^x f(s) ds = F(x) - F(a)$
 $\uparrow$ changer la variable $\uparrow$ fonction

• si on pose $b=a$ $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$

• si $b=x$ $\int_a^x f(s) ds = F(x) - F(a)$ constante dérivée de constante
 si on derive: $(\int_a^x f(s) ds)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) - 0 = f(x)$ (car F est la primitive de f)

conclusion $(\int_a^x f(s) ds)' = f(x)$ **théorème fondamental du calcul**

Exercice: calculer ① $\int_0^2 x^2 dx$ ② $\int_1^2 \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} dx$

③ $\int_0^1 \cos(x) e^{\sin x} dx$ ④ $(\int_0^x \sin(\cos(\sqrt{s})) ds)'$

① $\int_0^2 x^2 dx$: il faut d'abord trouver une primitive (sans la constante)

$\rightarrow$ ici primitive de $f(x) = x^2$ c'est $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} = F(x)$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= [F(x) + C]_a^b \\ &= F(b) + C - (F(a) + C) \\ &= F(b) - F(a) + \underbrace{C - C}_{=0} \end{aligned}$$

donc $\int_0^2 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} - 0 = \boxed{\frac{8}{3}}$

$\int_0^2 f(x) dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$

$$\int_0^2 f(x) dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$$

② $\int_1^2 \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} dx$: on a vu + haut qu'une primitive de
 $f: x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$ est $F: x \mapsto \sqrt{3x+2}$ ←

Ainsi $\int_1^2 \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} dx = [\sqrt{3x+2}]_1^2 = \sqrt{3 \cdot 2 + 2} - \sqrt{3 \cdot 1 + 2} = \boxed{\sqrt{8} - \sqrt{5}}$

③ $\int_0^1 \cos(x) e^{\sin(x)} dx$: calculons une primitive F de $f: x \mapsto \cos(x) e^{\sin(x)}$
on remarque que $\sin'(x) = \cos(x)$ donc f est de la forme
 $f(x) = u'(x) e^{u(x)}$ on a une primitive de ce type de fonction
 $F(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \sin(x)$

Ainsi $F(x) = e^{\sin(x)}$

Par conséquent $\int_0^1 \cos(x) e^{\sin(x)} dx = [e^{\sin(x)}]_0^1 = e^{\sin(1)} - e^{\sin(0)} = e^{\sin(1)} - e^0 = e^{\sin(1)} - 1$

④ $\left(\int_0^x \sin(\cos(\sqrt{s})) ds \right)' ?$

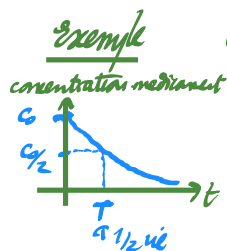
d'après le théorème fondamental du calcul $\left(\int_a^x f(s) ds \right)' = f(x)$

d'après le théorème fondamental du calcul $\left(\int_a^x f(s) ds\right)' = f(x)$
 i.e. $\left(\int_0^x \sin(\cos(\sqrt{s})) ds\right)' = \sin(\cos(\sqrt{x}))$

b. Equations différentielles

Matériau: applications en biologie et en médecine

On utilise les équations différentielles pour décrire certains phénomènes qui varient en fonction du temps (ou alors d'autres variables comme l'âge, le poids, la température, la pression...)



comment évolue la concentration d'un médicament dans le corps

- le médicament est dégradé dans le corps par l'organisme (on parle de demi-vie d'un médicament)
- il peut être efficace ou pas pour certains organes
- il peut y avoir des effets secondaires, de la résistance, de l'accoutumance

→ c'est la branche de PHARMACOCINÉTIQUE - PHARMACODYNAMIQUE

Exemple:

comment évolue une épidémie? (PK - PD)

en fonction du nombre d'infectés, des personnes saines (susceptibles), de la méthode de transmission, et le type de pathogène

Exemple

Dynamique de population

évolution d'une population $P(t)$

la variation par rapport au temps de cette population est par définition la dérivée de $P(t)$ qu'on note $\underline{P'(t)}$

si $P'(t) > 0 \Rightarrow P$ est croissante

si $P'(t) < 0 \Rightarrow P$ est décroissante

1^{ère} étude de dynamique de population: MALTHUS (1798) GOMME-BACHTIGNE

b: birth
d: death



↳ ÉCONOMIQUE

d : death



$$P'(t) = b.P(t) - d.P(t)$$

Si on pose $k = b - d$

$$= (b - d)P(t)$$

$$P'(t) = k.P(t)$$

$$f'(x) = k.f(x)$$