

23 sept. 2026 - L2 CM 3/4

→ L'objectif de ce cours est d'étudier des équations différentielles ordinaires (edo), d'ordre 1, autonomes, sous forme normale, et non linéaires, c'est-à-dire des équations sous la forme

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{si } t \in I \subset \mathbb{R}$$

autonome $\downarrow$ $x' = f(x)$

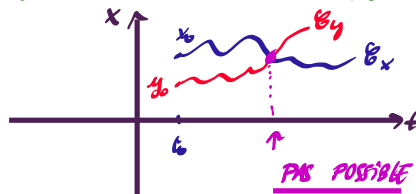
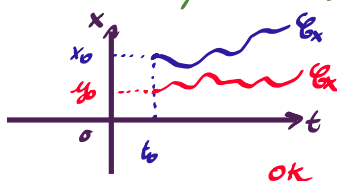
avec $x: I \rightarrow J$ ($I, J \subset \mathbb{R}$)
 $t \mapsto x(t)$

et $f: J \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$

on suppose f continue sur J
définie sur J
et f' continue sur J

Propriété Si f est continue sur J alors on a existence et unicité de la solution de l'edo $x'(t) = f(x(t))$ dès que l'on donne une condition initiale $x(t_0) = x_0$ avec $t_0 \in I$ (conséquence du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ)

Remarque: dit d'une autre façon, cette propriété signifie que par un point donné il ne peut passer qu'une seule solution (à cause de l'unicité) or encore les courbes représentant les solutions NE PEUVENT JAMAIS SE COISER!



Remarque: conséquence: si la fonction $x(t) = 0$ pour tout t (fonction identiquement nulle, on écrit $x \equiv 0$) est solution de l'edo $x'(t) = f(x(t))$ (on l'appelle solution TRIVIALE) alors aucune autre solution ne pourra s'annuler (c'est-à-dire croiser l'axe des abscisses)





Propriété: (importante)

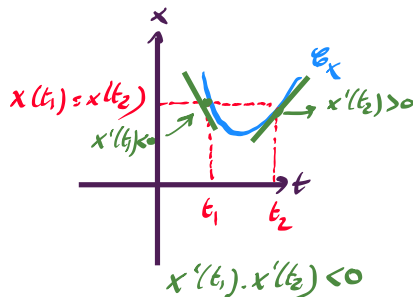
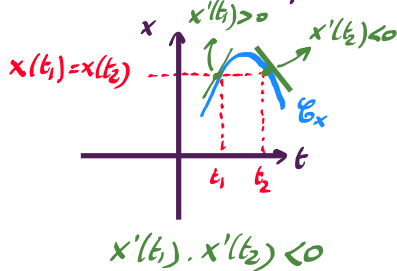
les solutions non constantes de $x'(t) = f(x(t))$ avec $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable et f' continue sur J sont MONOTONES

(c'est-à-dire soit croissantes tout le temps, soit décroissantes tout le temps)

Preuve: Démonstration par l'absurde

On suppose par l'absurde qu'une solution de $x'(t) = f(x(t))$ n'est pas monotone sur I

On a alors 2 cas possibles



or par définition $x'(t) = f(x(t))$ (car x est solution de l'éq.)

donc $x'(t_1) = f(x(t_1))$

et $x'(t_2) = f(x(t_2))$

donc $x'(t_1) \cdot x'(t_2) < 0 \Leftrightarrow f(x(t_1)) \cdot f(x(t_2)) < 0$ or $x(t_1) = x(t_2)$

$\Leftrightarrow f(x(t_1)) \cdot f(x(t_1)) < 0$ ✓

$\Leftrightarrow (f(x(t_1)))^2 < 0$ CONTRADICTION

Conclusion x est obligée d'être monotone sur I

On peut alors passer à la section suivante

II Étude qualitative des équations différentielles

Introduction Dans la grande majorité des cas, on ne sait pas résoudre les eqs.

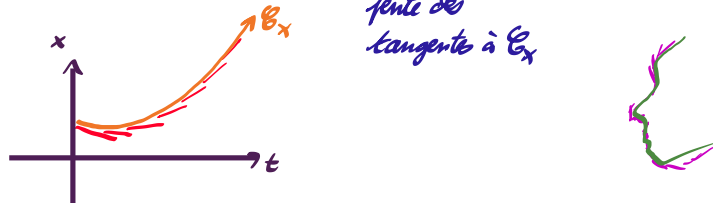
Il est donc quasiment impossible d'avoir des solutions EXPLICITES de ces équations et de faire ce qu'on appelle une étude QUANTITATIVE du problème.

Par contre, dans certains cas, il est possible de faire ce qu'on appelle une étude QUALITATIVE du problème, autrement dit on ne connaît pas la solution exacte mais on sait comment elle va se comporter en temps long. (quand $t \rightarrow +\infty$)

On appelle ça un comportement ASYMPTOTIQUE

Question comment procéder à l'étude qualitative d'une solution d'edo?

Réponse : grâce aux tangentes en effet: $x'(t) = f(x(t))$ ≠ donné



Exemple : on considère l'edo $x'(t) = t$ (*)

Comment dessiner l'allure des solutions de cette équation

étape 1 on recherche les courbes où les tangentes (pentes) sont les mêmes c'est à dire les courbes telles que $x'(t) = k$

or $x'(t) = f(t, x(t))$ donc $x'(t) = k \Leftrightarrow f(t, x(t)) = k$

Ici $f(t, x(t)) = t$ car $x'(t) = t$ (*)

on cherche les courbes tels que $t = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ donné

$k=0$ (pente nulle) $x'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$

$k=1$ (pente = 1) $x'(t)=1 \Leftrightarrow t=1$

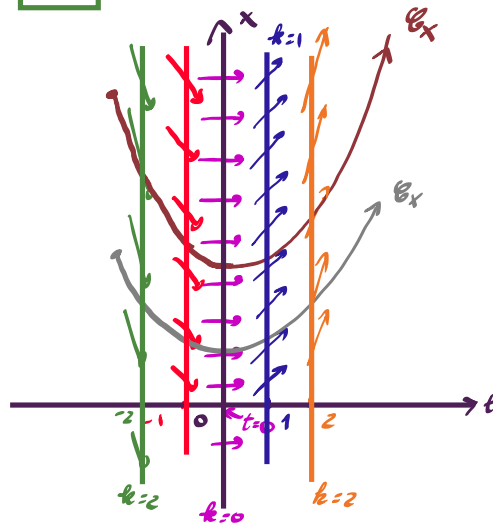
$k=-1$ (pente = -1) $x'(t)=-1 \Leftrightarrow t=-1$

$k=2$ (pente = 2) $x'(t)=2 \Leftrightarrow t=2$

$k=-2$ (pente = -2) $x'(t)=-2 \Leftrightarrow t=-2$

Rappel $x'(t) = t$

donc $x(t) = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c$



Autre exemple : Représenter les solutions de l'edo $x'(t) = x^2(t) - t$ (*)

On va représenter d'abord les courbes où les pentes des tangentes des solutions de l'edo sont les mêmes.

C'est à dire que pour un nombre réel k donné on cherche les solutions de $x'(t) = k$, $k \in \mathbb{R}$

$$\text{al } x'(t) = k \Leftrightarrow x' = k$$

$$\Leftrightarrow x^2 - t = k \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = t + k \rightarrow \text{il faut que } t+k \geq 0 \text{ pour un } t \in \mathbb{R} \text{ donné}$$

$$\text{càd } t \geq -k$$

$$\text{si } t \geq -k \Leftrightarrow x = \sqrt{t+k} \text{ ou } x = -\sqrt{t+k}$$

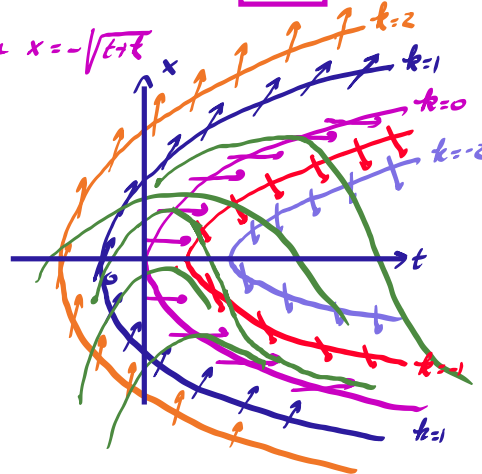
$$\bullet \boxed{k=0} \quad t \geq 0 \text{ alors } x = \sqrt{t} \text{ et } x = -\sqrt{t}$$

$$\boxed{k=1} \quad t \geq -1 \text{ alors } x = \sqrt{t+1} \text{ et } x = -\sqrt{t+1}$$

$$\boxed{k=-1} \quad t \geq 1 \text{ alors } x = \sqrt{t-1} \text{ et } x = -\sqrt{t-1}$$

$$\boxed{k=2} \quad t \geq -2 \text{ alors } x = \sqrt{t+2} \text{ et } x = -\sqrt{t+2}$$

$$\boxed{k=-2} \quad t \geq 2 \text{ alors } x = \sqrt{t-2} \text{ et } x = -\sqrt{t-2}$$



Définition On appelle isocline - k (de même pente - k) de l'edo $x'(t) = f(t, x(t))$ l'ensemble des points du plan tels que $x'(t) = k$ c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation: $f(t, x(t)) = k$

Attention! en général les isoclines ne sont pas solution de l'edo

Exercice: déterminez les isoclines - k de l'edo $x'(t) = x(t)(1 - x(t))$

$$\text{qu'on écrit sous forme simplifiée } x' = x(1-x)$$

$$\text{pour ça on pose } f: x \mapsto x(1-x) \text{ et l'edo est } x' = f(x)$$

les isoclines - k de l'edo veulent $x' = k$ c'est-à-dire $f(x) = k$ et donc ici $x(1-x) = k$

les isoclines - k de l'edo veulent $x' = k \Leftrightarrow x(1-x) = k, k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x - x^2 = k$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + k = 0$$

$$\boxed{\Delta = 1 - 4k}$$

• si $\Delta > 0$ c'est-à-dire $1 - 4k > 0 \Leftrightarrow 1 > 4k$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4} > k}$$

on a alors 2 solutions $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4k}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4k}}{2}$ } 2 isoclines - k



solution



isocline

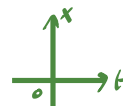
$$\text{Rappel: } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{si } \Delta > 0 \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{si } \Delta = 0 \quad x_0 = \frac{-b}{2a}$$

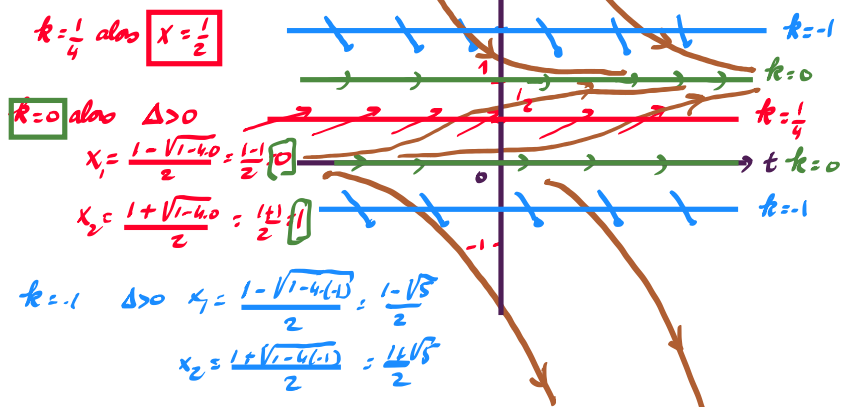
si $\Delta < 0$ pas de solution réelle



• si $\Delta = 0$ c-à-d $k = \frac{1}{4}$ on a une seule solution $x_0 = \frac{1}{2}$ → une seule isocline $-\frac{1}{4}$

• si $\Delta < 0$ c-à-d si $k > \frac{1}{4}$ aucune solution → pas d'isocline $-k$

Trçons les isoclines:



Remarque: $x'(t) = x(t)(1-x(t))$
 pour tout t si $x(t) = 0$ $x'(t) = 0$ $x' = x(1-x)$
 $0 = 0(1-0) = 0$
 pour tout t $x(t) = 1$ $x'(t) = 0$ $x' = x(1-x)$
 $0 = 1(1-1) = 0$

