

8 septembre 2026 - GROUPE 2

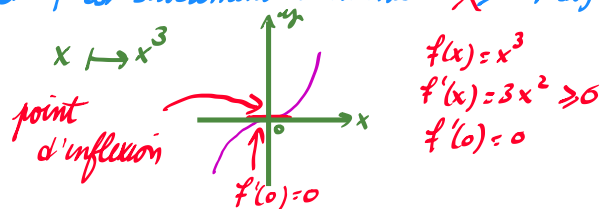
Propriété

- Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$
 - $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante
 - $f'(x) < 0$ " " " décroissante
 - $f'(x) = 0$ " " " constante

Attention:

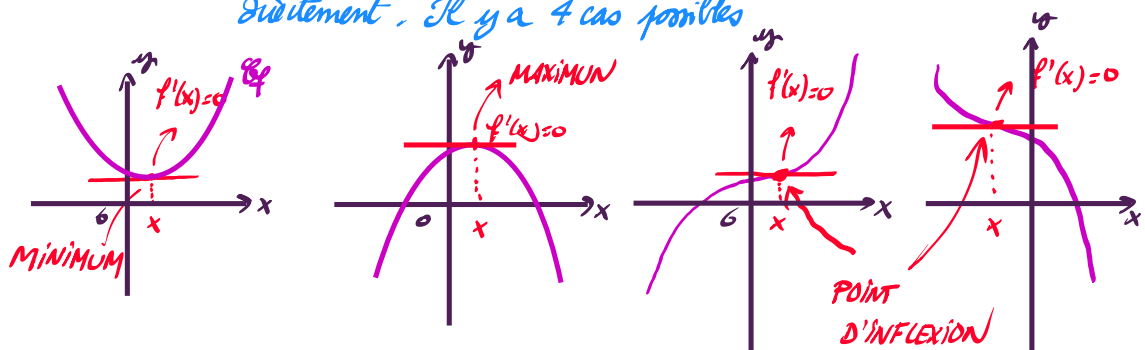
si f est strictement croissante $\nRightarrow f'(x) > 0$

exemple:



Attention:

si $f'(x) = 0$ pour un x "isolé" on ne peut pas conclure directement. Il y a 4 cas possibles



$$2. \quad \bullet \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$\bullet \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\bullet \quad (f/g)'(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$$

$$\cdot \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

3. NOUVEAUTÉ: dérivée d'une fonction composée

Question: qu'est-ce qu'une fonction composée?

Exemples:

$$1. f(x) = \frac{1}{\sin(x)} \quad f: x \xrightarrow{\sin} \sin x \xrightarrow{x \mapsto \frac{1}{x}} \frac{1}{\sin x}$$

$$2. f(x) = \cos(4x+1) \quad f: x \xrightarrow{x \mapsto 4x+1} 4x+1 \xrightarrow{\cos} \cos(4x+1)$$

De façon générale: soient f_1 et f_2 , deux fonctions

$$\text{on pose } f: x \xrightarrow{f_1} f_1(x) \xrightarrow{f_2} f_2(f_1(x))$$

$$\text{on a alors } f(x) = f_2(f_1(x)) = f_2 \circ f_1(x)$$

$$\text{et si } g: x \xrightarrow{f_2} f_2(x) \xrightarrow{f_1} f_1(f_2(x))$$

$$g(x) = f_1(f_2(x)) = f_1 \circ f_2(x)$$

Exemple: soient $f_1: x \mapsto e^x$ et $f_2: x \mapsto \sqrt{x}$

Que valent $f_1 \circ f_2(x)$ et $f_2 \circ f_1(x)$?

$$\cdot f(x) = f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = e^{\sqrt{x}}$$

$$\cdot g(x) = f_2 \circ f_1(x) = \sqrt{e^x}$$

Attention $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$

Quelle est alors la dérivée des fonctions composées?

$$\text{On pose } f(x) = f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x))$$

$$f'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x)$$

$$\text{et } g(x) = f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x))$$

$$g(x) = f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x))$$

$$g'(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$$

Exercice: ① soient $f_1: x \mapsto \cos x$ et $f_2: x \mapsto \frac{1}{x}$

Calculer $(f_1 \circ f_2)'$ et $(f_2 \circ f_1)'$.

② Soit $u: x \mapsto u(x)$ une fonction

Calculer a) $(u^2)'$ b) $(\sqrt{u})'$ c) $(\frac{1}{u})'$

d) $(e^u)'$ e) $(\ln(u))'$ f) $(\cos(u))'$ et $(\sin(u))'$

Solution: ① $(f_1 \circ f_2)' = ?$

ici $f_1(x) = \cos x$ donc $f_1'(x) = -\sin x$

et $f_2(x) = \frac{1}{x}$ donc $f_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2)'(x) &= f_1'(f_2(x)) = f_1'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f_2'(x) = \\ &= -\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} (f_2 \circ f_1)' &= f_2'(f_1(x)) \times f_1'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2} \cdot (-\sin(x)) \\ &= \frac{\sin}{\cos(x)^2}\end{aligned}$$

2) a) $(u^2)' = ?$

$$v^2 : x \xrightarrow{f_1} v(x) \xrightarrow{f_2} v^2(x)$$

$$v^2(x) = f_2(f_1(x)) \quad \text{où } f_1(x) = v(x) \text{ et } f_2(x) = x^2$$

$$f_2'(x) = v'(x) \quad f_2'(x) = 2x$$

$$\begin{aligned} \text{donc } v^{2'}(x) &= f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) \\ &= 2v(x) \times v'(x) \end{aligned}$$

connaitre par cœur : $(u^2)' = 2u \cdot u'$

b) $(\sqrt{u})' = ?$

$$\sqrt{u} : x \xrightarrow{f_1} v(x) \xrightarrow{f_2} \sqrt{v(x)}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{v(x)} &= f_2(f_1(x)) \quad \text{où } f_1(x) = u(x) \text{ et } f_2(x) = \sqrt{x} \\ f_1'(x) &= u'(x) \text{ et } f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \sqrt{u(x)}' &= f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \end{aligned}$$

connaitre par cœur : $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

c) $\frac{1}{u} : x \xrightarrow{f_1} u(x) \xrightarrow{f_2} \frac{1}{u}(x)$

$$\frac{1}{dx} f_1(x) = u(x)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x}$$

et $f_1'(x) = u'(x)$

$$f_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{donc } \left(\frac{1}{u(x)} \right)' = f_2'(f_1(x)) \times f_1'(x)$$

$$= -\frac{1}{u^2} \quad x u'$$

connaitre par cœur:

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

d. $e^{u(x)} : x \xrightarrow{f_1} u(x) \xrightarrow{f_2} e^{u(x)}$

$$(e^{u(x)})' = (f_2 \circ f_1)'(x) = f_2'(f_1(x)) \times f_1'(x) \\ = e^{u(x)} \times u'(x)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= u(x) \\ f_1' &= u'(x) \\ f_2 &= e^x \\ f_2' &= e^x \end{aligned}$$

connaitre par cœur

$$(e^u)' = u' e^u$$

e. $\ln(u) : x \xrightarrow{f_1} u(x) \xrightarrow{f_2} \ln(u(x))$

$$\ln(u(x)) = f_2(f_1(x)) \text{ où } f_1(x) = u(x) \text{ et } f_2(x) = \ln(x) \\ f_1'(x) = u'(x) \text{ et } f_2'(x) = \frac{1}{x}$$

donc $(\ln(u(x)))' = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$

donc $(\ln(u(x)))' = f_2'(f_1(x)) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$
 $= \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

connaitre par cœur: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

f) $\cos(u) : x \xrightarrow{f_1} u(x) \xrightarrow{f_2} \cos(u(x))$

donc $\cos(u(x)) = f_2(f_1(x))$ où $f_2(x) = \cos x$ et $f_1(x) = u(x)$

donc $f_2'(x) = -\sin x$ et $f_1'(x) = u'(x)$

ainsi $\cos(u(x))' = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$
 $= -\sin(u(x)) \cdot u'(x)$

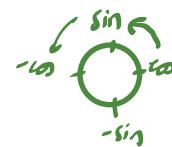
connaitre par cœur: $(\cos u)' = -\sin(u) \cdot u'$
 et de façon analogue $(\sin u)' = \cos(u) \cdot u'$

6. Primitives

Définition Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ avec f continue sur I
une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I
telle $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$
On la note aussi $F(x) = \int f(x) dx$

Exemple

Si $f(x) = \sin x$ que vaut $\int f(x) dx$?
 $\int f(x) dx = -\cos x$



Proposition: les primitives sont définies à une constante près
c'est à dire que les primitives de f s'écrivent $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$
où C est une constante

Preuve

Soient F_1 et F_2 deux primitives de f
Par définition on a $F_1'(x) = f(x)$

$$\text{et } F_2'(x) = f(x)$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (F_1 - F_2)'(x) = 0$$

$$u' = 0 \rightarrow u = C$$

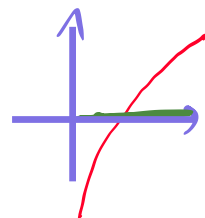
$$\Leftrightarrow (F_1 - F_2)(x) = C$$

$$\Leftrightarrow F_1(x) - F_2(x) = C \Leftrightarrow$$

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Tableau des primitives

f	F
k	$kx + C$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
x^2	$\frac{x^3}{3} + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$



Proprietăți:

$$① \int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$② \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx + C$$

$$③ \int (f(x) + g(x))' dx = f(x) + g(x) + C$$

$$④ \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = \int (f(x)g(x))' dx = f(x) \cdot g(x) + C$$

$$⑤ \int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx = \int \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$$

$$⑥ \int f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) dx = \int (f_2(f_1(x)))' dx = f_2(f_1(x)) + C$$

Exercice

Calculer ① $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx$ ② $\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$

③ $\int u'(x) e^{u(x)} dx$ ④ $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

⑤ $\int \frac{3}{e^{\sqrt{3x+5}}} dx$

1) $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + c$

2) $\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$ est de la forme $\int \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc :

$$\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln |\cos(x)| + c$$