

L2 - GROUPE 2 22 SEPTEMBRE

cours: Bonne nouvelle dans le cours, on étudiera des edo
(équations différentielles ordinaires) sous la forme
$$x'(t) = f(t, x(t))$$

mais avant ça, il faut définir ce qu'est une équation différentielle ordinaire.

Définition: équation différentielle ordinaire (edo)
une edo d'ordre n est une équation qui relie

une fonction $x : t \mapsto x(t)$ ($t \in I \subset \mathbb{R}$) avec l'équation qui relie les dérivées successives $x', x'', x''', \dots, x^{(n)}$ de la façon suivante

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, \underset{x^{(n-1)}(t)}{x^{(n)}(t)}) = 0$$

Notation: t variable
 x : fonction inconnue

Que veulent dire $x'', x''', \dots$? Ce sont les dérivées successives

Exemple: si $x: t \mapsto t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 5t + 1$

$$x^n \leadsto nx^{n-1}$$

alors $x'(t) = 4t^3 + 6t^2 + 6t + 5$

$$x''(t) = 12t^2 + 12t + 6$$

$$x'''(t) = 24t + 12$$

$$x^{(4)}(t) = 24$$

$$x^{(5)}(t) = 0 \quad \dots \quad x^{(6)}(t) = 0, \quad x^{(7)}(t) = 0, \dots$$

Exemple d'edo: $\underbrace{3x''(t) + \cos(x'(t)) + x(t) - 3t + 2}_{F(t, x(t), x'(t), x''(t))} = 0$ ordre 2

Définition edo sous forme normale

On appelle edo d'ordre n , sous forme normale toute équation de la forme $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$

Exemple MALTHUS $x'(t) = \underbrace{(b-d)}_{=k} x(t)$

$$\boxed{x'(t) = kx(t)}$$

Définition edo autonome

On appelle edo autonome, d'ordre n toute équation de la forme

$$F(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

le t n'apparaît que dans les x
pour savoir si une edo est autonome, on enlève les t des x et on regarde si t apparaît ailleurs

regarde si t apparaît ailleurs

exemple

① $3e^{x(t)} + x'(t) + x''(t)^2 = 0 \rightsquigarrow 3e^x + x' + x''^2 = 0$ autonome

② $t x'''(t) + 4 \cos(x(t)) = 0 \rightsquigarrow \underset{\uparrow}{t} x''' + 4 \cos(x) = 0$ pas autonome

Définition edo linéaire

On appelle edo linéaire d'ordre n toute équation de la forme

$$a_n(t) x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) x^{(n-1)}(t) + \dots + a_2(t) x''(t) + a_1(t) x'(t) + a_0(t) x(t) = g(t)$$

↳ les coefficients $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ et $g(t)$ sont

- soit nuls
- soit constants
- soit dépendent de t

MAIS JAMAIS il ne dépendent de x ou ses dérivées!!

• les fonctions $x, x', \dots, x^{(n)}$ ne s'expriment qu'avec une puissance 1 (monômes de degré 1), si l'edo est linéaire on ne peut pas avoir x'^2 , $\sqrt{x}$ ou $\cos(x^{(3)})$...

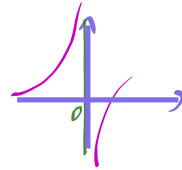
Exercice pour chacune des edo suivantes : donner l'ordre, dire si elles sont linéaires ou pas, autonomes ou pas, sous forme normale ou pas

edo	ordre	autonome	linéaire	forme normale
①. $x^{(5)}(t) + \ln(t)x''(t) + 3x(t) = 0$	5	non	oui	non. on peut la mettre sous forme normale $x^{(5)}(t) = -\ln(t)x''(t) - 3x(t)$
②. $\sin(x^{(3)}(t)) + 5x'(t) = 0$	3	oui	non	non, difficilement sous forme normale
③. $t x^{(4)}(t) + x(t)x'(t) = e^t$	4	non	non	non, forme normale: $x^{(4)}(t) = \frac{-x(t)x'(t) + e^t}{t}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$ soit $t > 0$ ou $t < 0$
④. $3x^{(3)}(t) + 5x'(t) = -2x(t)$	3	oui	oui	non, on peut la mettre sous forme normale
⑤. $x^2(t)x''(t) + x(t) = 0$	2	oui	non	non, on peut si on prend $t \in \mathbb{Z}$, b.g. $x(t) \neq 0$

forme normale $x''(t) = \frac{-x(t)}{x^2(t)} = -\frac{1}{x(t)}$

$$t x^{(4)}(t) + x(t)x'(t) = e^t$$

si x est différentiable alors x est continue



retour au début du cours

bonne nouvelle dans le cours on étudiera seulement les eds sous la forme

$x'(t) = f(t, x(t))$ → ordre 1, non autonome, sous forme normale

ou $x'(t) = f(x(t))$ → ordre 1, autonome, „

Exemple Équation de MALTHUS

On considère l'edo suivante

$$P'(t) = \overset{\text{naissances}}{b} P(t) - \overset{\text{morts}}{d} P(t)$$

$$P'(t) = (b - d) P(t)$$

si on pose $a = b - d$ l'edo s'écrit

$$\boxed{P'(t) = a P(t)} \quad (E)$$

si $a < 0$ ($b - d < 0$) $\nearrow$ moins de naissances que de morts, si $a = 0$ ($b = d$), si $a > 0$ ($b > d$)
 $b < d$

Question: comment résoudre l'équation $P'(t) = a P(t)$?

étape 1: on met (E) sous la forme $\boxed{P'(t) - a P(t) = 0} \quad (1)$
 $\swarrow$ coef = 1 $\swarrow$ coef = -a

étape 2: ASTUCE on multiplie (1) par $e^{\int -a dt}$ (car $\int -a = -at$)

(1) devient $\underbrace{e^{-\int a dt}}_{u(t)} P'(t) - \underbrace{a e^{-\int a dt}}_{u'(t)} P(t) = 0$ (2)

on pose $u(t) = e^{-\int a dt}$

Rappel: $(e^u)' = u e^u$

$(\int f(t) dt)' = f(t)$ ici $\rightarrow u(t) = e^{-\int a dt}$ donc $u'(t) = -a e^{-\int a dt}$

donc $(-a e^{-\int a dt})' = -a$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

(2) est sous la forme

$$u'P + uP' = 0$$

$$(u \cdot P)' = 0 \Leftrightarrow u \cdot P = c, \text{ constante } c$$

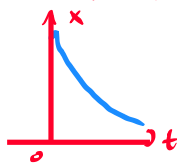
or $u = e^{-\int a dt}$ donc $uP = c \Leftrightarrow e^{-\int a dt} P(t) = c$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(t) = c e^{\int a dt}}$$

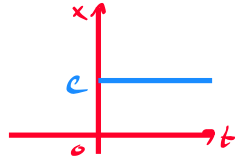
$$\int a dt = at + \left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow P(t) = c e^{at}$$

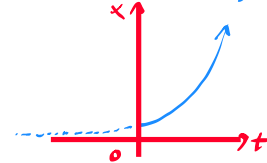
si $a < 0$ (bcd) $P(t) = c e^{-at}$



si $a = 0$ $P(t) = c e^0 = c$



si $a > 0$ $P(t) = c e^{at}$



Comment déterminer c à partir d'une condition initiale

exemple: on suppose que la population observée au temps $t=0$ est de P_0 individus

càd que $P(0) = P_0$

Comme la solution de l'équation de MALTHUS est $P(t) = c e^{at}$

on remplace t par 0: et on a $P(0) = c e^{a \cdot 0} = c$

$$\text{or } P(0) = \boxed{P_0 = c} \text{ donc } c = P_0$$

Par conséquent

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{at}}$$

Exercice: Résoudre

$$\textcircled{1} \begin{cases} x'(t) + 3x(t) = 0 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x'(t) + t x(t) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x'(t) + \frac{1}{t} x(t) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$