- Résoudre une équation différentielle ordinaire d'ordre 1, autonome ou pas, linéaire

On considère une edo de la forme

$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ où a et b sont continues sur $I \subset \mathbb{R}$ avec $t \in I$

on suppose aussi que

$x(t_0) = x_0$, $t_0 \in I$ condition initiale

Méthode : étape 1 : on se ramène à la forme

(E) $1 \cdot x'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} x(t) = 0$ sous condition que $a(t) \neq 0$ sur I

on a 1.

étape 2 on multiplie (E) par $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$

Dans ce cas là, (E) s'écrit $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot x'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x(t) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\left(e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot x(t) \right)' = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot x(t) \right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x(t) = c \quad , c \in \mathbb{R}$$

étape 3 On isole $x(t)$: on obtient $\boxed{x(t) = c e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}}$

étape 4 On calcule c à partir de la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Remarque si l'edo est sous la forme $a(t)x'(t) + b(t)x(t) = d(t)$ ← pas 0 !!

On utilise la même méthode :

1. on divise par $a(t)$ (si $a(t) \neq 0$ pour $t \in I$)
2. on multiplie par $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$

et on a : $x'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} x(t) = \frac{d(t)}{a(t)}$

qui donne $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x(t) = \frac{d(t)}{a(t)} e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x(t) \right)' = \frac{d(t)}{a(t)} e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$$

Conclusion on intègre des 2 côtés :

$$e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x(t) = \int \frac{d(t)}{a(t)} e^{\int \frac{b(s)}{a(s)} ds} dt + C$$

et donc $x(t) = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \left(\int \frac{d(t)}{a(t)} e^{\int \frac{b(s)}{a(s)} ds} dt + C \right)$

Exercice :

1. $\begin{cases} x'(t) + 3x(t) = 0 \quad (E) \\ x(0) = 2 \end{cases}$

Etape 1 : (E) est déjà sous la forme $x'(t) + a(t)x(t) = 0$

Etape 2 : On multiplie (E) par $e^{\int 3dt} = e^{3t}$

Ce qui donne $e^{3t} \cdot x'(t) + 3e^{3t} x(t) = 0$

$\Leftrightarrow (e^{3t} \cdot x(t))' = 0$

$\Leftrightarrow e^{3t} \cdot x(t) = C$

Etape 3 : On isole $x(t)$

$x(t) = C \cdot e^{-3t}$

Etape 4 : On calcule C à partir de la condition initiale $x(0) = 2$

$x(0) = C \cdot e^{-3 \times 0}$

$\Leftrightarrow 2 = C$

Conclusion : La solution du problème $= x(t) = 2e^{-3t}$

avec $t \in \mathbb{R}$

(2)

② $\begin{cases} x'(t) + t\,x(t) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Etape 1 (E) est déjà sous la forme $x'(t) + t\,x(t) = 0$

On passe directement à l'étape 2

Etape 2 On multiplie (E) par $e^{\int t\,dt} = e^{\frac{t^2}{2}}$

$$e^{\frac{t^2}{2}} \times x'(t) + t \times e^{\frac{t^2}{2}} \times x(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{t^2}{2}} \times x(t)\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{t^2}{2}} \times x(t) = C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Etape 3 On isole $x(t)$

$$x(t) = C\,e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Etape 4

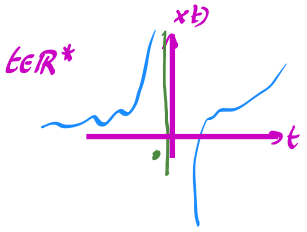
On calcul C, on sait que $x(0) = 1$ donc

$$x(0) = C \times e^{-\frac{0}{2}^2} \Leftrightarrow x(0) = C$$

$$C = 1$$

Conclusion: La solution est $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ avec $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) + \frac{1}{t}x(t) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$



étape 1 : (E) est déjà sous la forme $x'(t) + \frac{1}{t}x(t) = 0$

Remarque : Ici on prend $t \in I \subset]0;+\infty[$ car la condition initiale est $x(1) = 1$ ↳ $t = 1$

On passe alors à l'étape 2.

étape 2 : On multiplie (E) par $e^{\int \frac{1}{t}dt} = e^{\ln|t|}$

par $e^{\ln} = e$

comme $t > 0$, $|t| = t$

donc $e^{\ln|t|} = e^{\ln(t)} = t$

Ce qui donne $t\,x'(t) + \frac{t}{t}\,x(t) = 0$

$\Leftrightarrow t\,x'(t) + x(t) = 0$

$\Leftrightarrow (t\,x(t))' = 0$

$\Leftrightarrow t\,x(t) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$

étape 3 : On isole $x(t)$

$x(t) = \frac{c}{t}$ avec $t \in]0;+\infty[$

étape 4 : On calcule c

$x(1) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{c}{1} = 1$

$\Leftrightarrow c = 1$

Conclusion : La solution est $x(t) = \frac{1}{t}$ avec $t \in]0;+\infty[$

Examen 2023

Ex 1 Partie 1 : $(E)\ x'(t) = f(x(t))$ où $f : x \mapsto (x+1)(x-1)x^2$

L'ordre de (E) est 1 (plus grande dérivée est x')

(a). L'ordre de (E) est 1 (plus grande dérivée est x')

Elle est autonome, tous les t sont dans x ou x'.

(E) s'écrit $x'(t) = (x+1)(x-1)x^2$, n'est pas de la forme $a(t)x'(t) + b(t)x(t) = d(t)$, car on a x^2 et le terme $(x+1)(x-1)$

donc (E) n'est pas linéaire

(b) Les équilibres x^* de (E) vérifient $x^{*\prime} = 0$ càd $f(x^*) = 0$

ce sont les racines de f !!

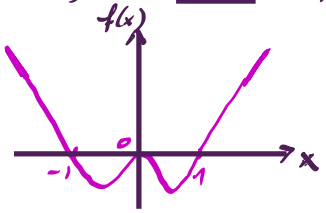
On $f(x) = 0 \iff (x+1)(x-1)x^2 = 0$

$\iff x+1 = 0$ ou $x-1 = 0$ ou $x^2 = 0$

$\iff \boxed{x = -1}$ ou $\boxed{x = 1}$ ou $\boxed{x = 0}$

Conclusion: les équilibres de (E) sont donc -1, 0 et 1.

c) et d) Méthode (représentation graphique)



$(x+1)(x-1)x^2 \underset{\infty}{\sim} x \cdot x \cdot x^2$

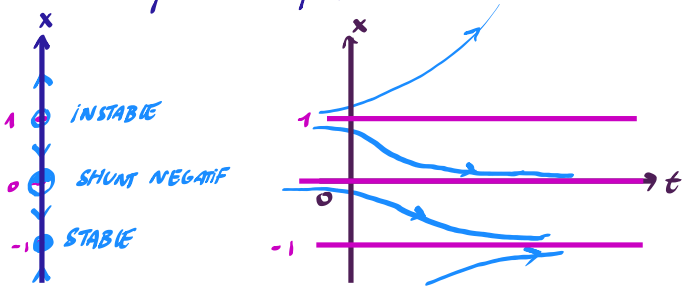
$\underset{\infty}{\sim} x^4$ et $\lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$

et $\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$

Méthode (tableau de signes)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $(x+1)(x-1)x^2$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le portrait de phase:



Partie 2 (E) $2t^3x'(t) + 6t^2x(t) = t^2$ avec $x(1)=1$

(a) L'ordre de (E) est 1 (x' est la plus haute dérivée)

Elle n'est pas autonome à cause des termes $2t^3$, $6t^2$ et t^2

Elle est linéaire car de la forme $a(t)x'(t) + b(t)x(t) = d(t)$

avec $a(t) = 2t^3$, $b(t) = 6t^2$ et $d(t) = t^2$

(b) **Résolution de (E) :** (E) $2t^3x'(t) + 6t^2x(t) = t^2$

$x'(t) + \frac{6t^2}{2t^3}x(t) = \frac{t^2}{2t^3}$

$\Leftrightarrow x'(t) + \frac{3}{t}x(t) = \frac{1}{2t}$ (E)

avec $t \in I \subset]0,+\infty[$ car $x(1)=1$

on multiplie par $e^{\int 3/t\,dt} = e^{3\int \frac{1}{t}dt}$

$= e^{3\ln|t|} = e^{3\ln t}$ car $t>0$

$= (e^{\ln t})^3 = \boxed{t^3}$

(E) $t^3x' + \frac{3}{t}t^3x = \frac{t^3}{2t}$

$\Leftrightarrow t^3x' + 3t^2x = \frac{t^2}{2}$

$\Leftrightarrow 2t^3x + 6t^2x = t^2$

On remarque que $(2t^3)' = 6t^2$

Par conséquent (E) est de la forme $(2t^3x(t))' = t^2$

On passe directement à la fin de l'étape 2

On intègre des 2 côtés, et on obtient

$2t^3x(t) = \int t^2dt$

$2t^3x(t) = \frac{t^3}{3} + C$, $C \in \mathbb{R}$

étape 3 on isole $x(t)$: pour ça on divise par $2t^3$

on suppose donc $t \in I \subset]0,+\infty[$ car $x(1)=1$ ↑ condition initiale avec $t_0 = 1 > 0$

on obtient $x(t) = \frac{t^3}{3.2.t^3} + \frac{C}{2t^3}$

$= \frac{1}{6} + \frac{C}{2t^3}$

étape 4 On calcule C avec $x(1)=1$

$x(1)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} + \frac{C}{2.1^3} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} + \frac{C}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6} + \frac{3C}{6} = 1$

$\Leftrightarrow 1 + 3C = 6$

$\Leftrightarrow 3C = 6-1 = 5 \Leftrightarrow \boxed{C = 5/3}$

Conclusion la solution est $\boxed{x(t) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6t^3}}$ avec $t \in]0,+\infty[$