Laurent PUJO-MENJOUET

pujo@math.univ-lyon1.fr

Campus de la DOUA Bât. BRACONNIER

Bureau 246

Partiel : questions de cours / exercices / problème

Examen : " " "

PROGRAMME :

I Introduction aux équations différentielles

a. Rappel sur les fonctions, dérivées, primitives et intégrales (programme T^{ale} S)

b. Définitions d'équations différentielles, résolution d'éq. diff. linéaires

c. Equations de BERNOULLI
↑ pas de i

d. Applications démographiques, (éq. de MALTHUS, VERHULST), ...

II Etude qualitative des éq. diff.

a. Equilibres, stabilité

b. Modèles linéaires, non linéaires, stabilité

c. " de physiologie, épidémiologie, ...

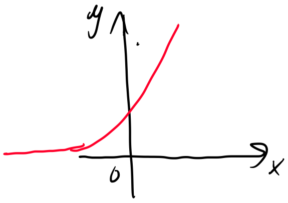
III Bifurcations

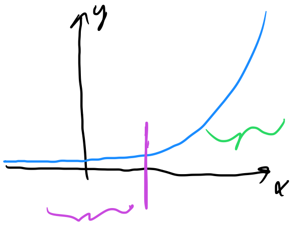
a. Bifurcations noeud col, fourches, transcritique, hystérèse

b. Applications aux modèls de médecine

I. Introduction aux équations différentielles

question : ① qu'est-ce qu'une croissance exponentielle





② qu'est-ce qu'une fonction

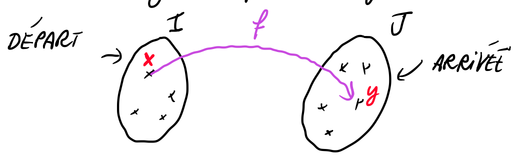
i. Définition d'une fonction :

Une fonction est une relation que l'on note en général f

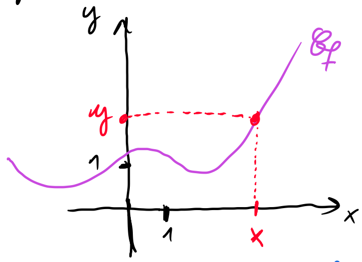
entre
- un élément x appartenant à un ensemble de DÉPART I (ici $I \subset \mathbb{R}$)

  x est appelé antécédent
- et un élément y appartenant à un ensemble d'ARRIVÉE J ($J \subset \mathbb{R}$)

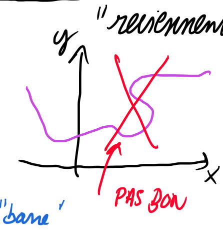
  y est appelé image



En général, on représente les fonctions sur un repère cartésien, cette représentation s'appelle graphe de f ou courbe de f et on la note $\mathcal{C}_f$



Attention : les courbes des fonctions ne "reviennent jamais en arrière !!"



ii. NOTATION :

ensembles I, J

pas de "barre"

$$f : I \to J$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

une barre

éléments

exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

ATTENTION : ne pas confondre f → fonction
$f(x)$ → un nombre
$\mathcal{C}_f$ → representation de f

donc ne pas dire la fonction $f(x)$ est croissante FAUX
mais la fonction f est croissante

iii. Ensemble de définition :

Il existe beaucoup de fonctions "classiques" (ou non classiques) et on les définit en general, sur ce qu'on appelle un ensemble de définition qu'on note D_f, c'est un ensemble où chaque antécédent a exactement une image et une seul par f :

ex : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$

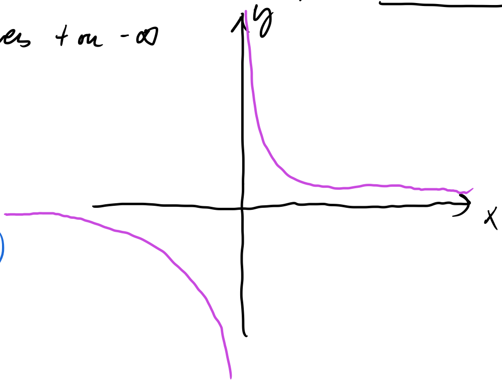
ex : $f(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$f(-3) = \frac{-1}{3} = -0{,}3333\ldots$

f est défini partout SAUF pour 0 : en effet on ne peut pas diviser par 0 !!

" $\frac{1}{0}$ " EXPLOSE vers $+$ ou $-\infty$



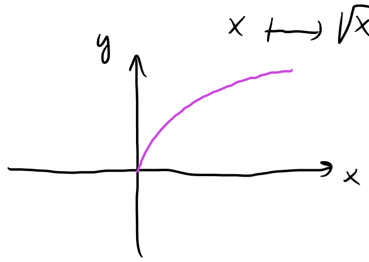
$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$= \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}$ privé de 0)

$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{x} = x^{-1}$

Autre exemple : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$ $\qquad f(4) = \sqrt{4} = 2$

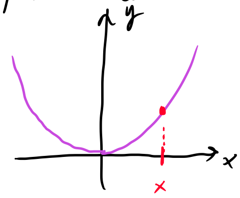


$D_f = [0, +\infty[\; = \mathbb{R}_+$

Exercice : quel est D_f pour $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$? $\qquad D_f =]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$

Remarque : quelques fois il n'y a pas de contraintes

ex : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

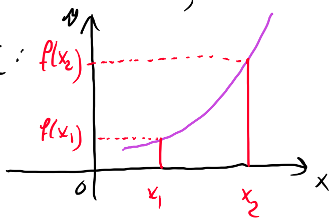


$D_f = \mathbb{R}$

$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)$

iv. Fonctions croissantes, décroissantes, constantes

· **CROISSANTE** :



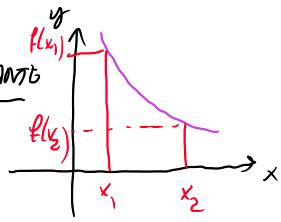
soient x_1 et $x_2 \in D_f$ avec $x_1 \leq x_2$

alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ (l'ordre ne change pas)

et si on a $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$

on dit que f est STRICTEMENT CROISSANTE

· **DÉCROISSANTE**



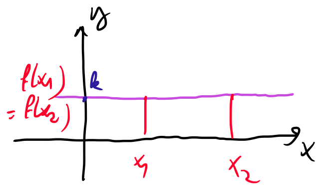
soient x_1 et $x_2 \in D_f$ avec $x_1 \leq x_2$

alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ l'ordre change !

et si on a $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$

on dit que f est strictement décroissante

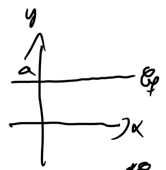
· **CONSTANTE**



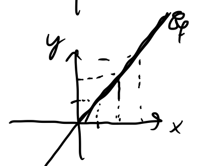
soient $x_1, x_2 \in D_f$ alors $f(x_1) = f(x_2)$

on la note $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto k$, k = constante

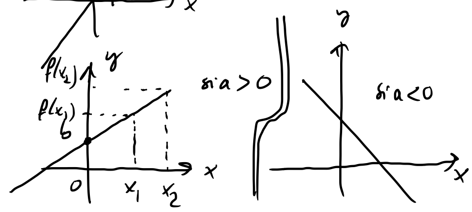
V. Quelques fonctions usuelles:



- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto a \quad , a \in \mathbb{R}$: fonction constante



- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto x$: fonction identité



- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: fonction affine
  $x \mapsto ax+b$
  pente ↑ ordonnée à l'origine

on calcule a: en faisant $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$; en effet: $f(x) = ax+b$.
on prend 2 points de $\mathcal{C}_f$:

① $f(x_1) = ax_1 + b$
② $f(x_2) = ax_2 + b$

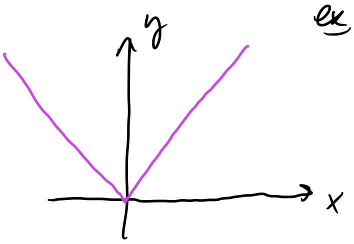
$$② - ① : \quad f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b)$$
$$= ax_2 + \cancel{b} - ax_1 - \cancel{b}$$
$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$
$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$ fonction valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

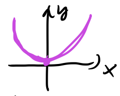
→ ATTENTION $-x$ est l'opposé de x, il peut être positif !

ex : si $x = -5$ $\quad -x = -(-5) = 5$

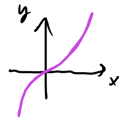


• $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$

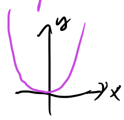
$n=2$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$



$n=3$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$



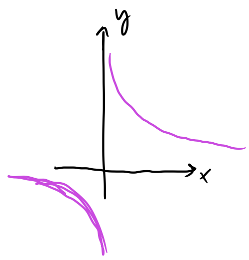
$n=4$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^4$



⋮

• $D_f \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$ (entier relatif : positif ou négatif)

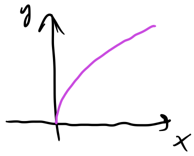
$n=-1$: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$



ATTENTION : si n est NÉGATIF
$D_f = \mathbb{R}^*$

si n est positif $D_f = \mathbb{R}$

• $D_f \to \mathbb{R}$ $D_f = \mathbb{R}_+$
$x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$



Par extension, $]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$

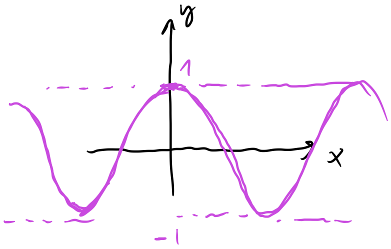
$\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

$]0,+\infty[$ $\quad x \mapsto x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ $\quad$ exemple : $p=2$ $q=3$: $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

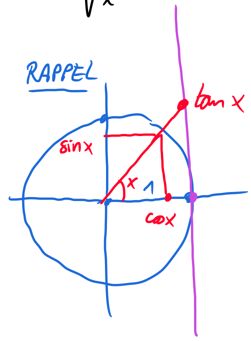
fonction trigonométrique :

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \cos x$

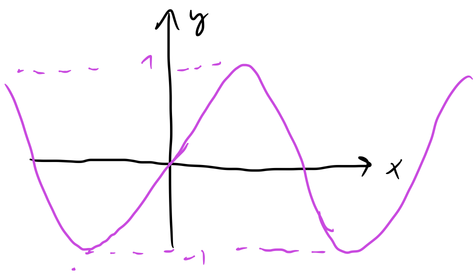


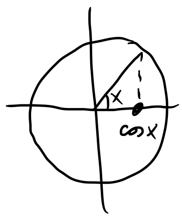
RAPPEL



$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sin x$





$D_f \to \mathbb{R}$

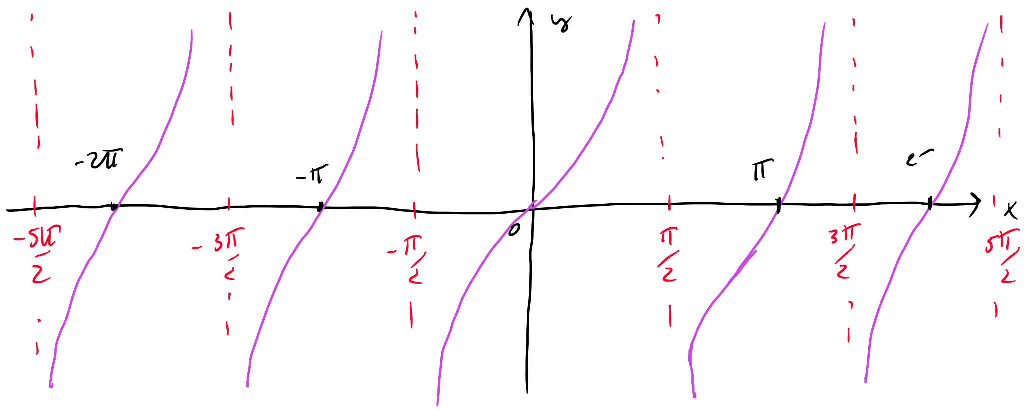
$x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\hookrightarrow$ $\tan x$ n'existe pas si $\cos x = 0$

or $\cos x = 0$ si et seulement si

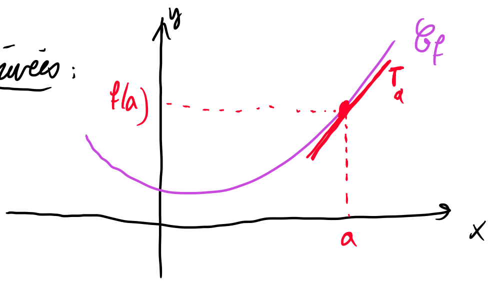
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$D_f = \left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{D}_f = \left] \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1) \right)$



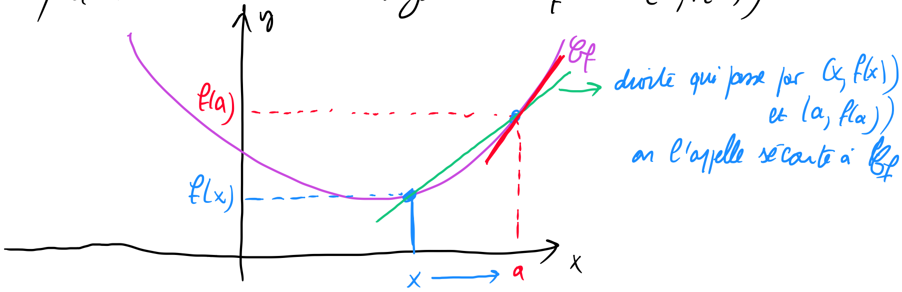
VI. Dérivées :



T_a : tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $(a, f(a))$

Définition : Soit $f : I \to J$ une fonction
soit $a \in I$
f est dérivable en a si et seulement si
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe, et on note $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$f'(a)$ est appelée dérivée de f en a
elle correspond à la PENTE de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(a, f(a))$



la pente de la sécante est : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{\text{tend}}$ vers la pente de la tangente T_a qui vaut $f'(a)$

Remarque : on a $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

si on pose $h = x-a$ si $x \to a$ alors $h \to 0$

$h = x-a$
donc $x = a+h$

et alors on écrit : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

exemple de dérivée:

15 septembre 2021
cours 2/8

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 3x+2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)+2-(3x+2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3x}+3h+\cancel{2}-\cancel{3x}-\cancel{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3$$

Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=3$

Remarque: on pourrait démontrer les dérivées suivantes:

f	f'
k $(k\in\mathbb{R})$	0
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$

Rappel: $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$
$x^{1/2} = \sqrt{x}$

$$\left(\sqrt{x} = x^{1/2} \overset{\text{dérivée}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \rightsquigarrow -1\, x^{-1-1} = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$-\cos \to \sin \to \cos$

$\sin x$	$\cos x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Rappel : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

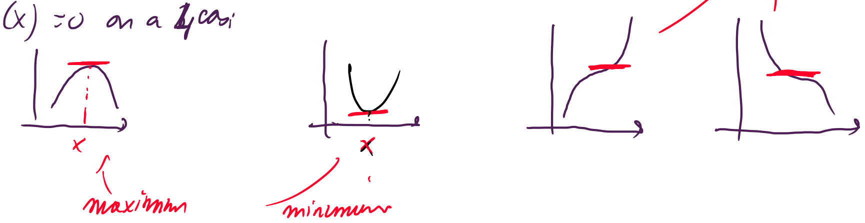
<u>Propriétés</u> : si $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ est dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$

si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est croissante

$f'(x) < 0$ " f est décroissante

points d'inflexion

si $f'(x) = 0$ on a 4 cas



Propriétés : $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

<u>Nouveauté</u> : dérivée de fonctions composées

Rappel : $f : I \to J$ $\quad g : J \to K$

$$x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g(f(x)) = g\circ f(x)$$

<u>ex</u> : si $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto ax+b$

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = a\sqrt{x}+b$$

et $f\circ g(x) = f(g(x)) = f(ax+b) = \sqrt{ax+b}$

exemple: $f: x \mapsto e^x$ $g: x \mapsto 3x^2$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = e^{3x^2}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(e^x) = 3(e^x)^2 = 3e^{2x}$$

propriété:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

exemple: $f: x \mapsto e^x$ $g: x \mapsto 3x^2$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{3x^2} \cdot 6x = 6xe^{3x^2}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 6e^x \cdot e^x$$

on en déduit quelques <u>résultats</u> :

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \qquad x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{\sqrt{\ }}{\longmapsto} \sqrt{f(x)}$$

$$(\cos(f(x)))' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\ln(f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

exercice, quelles sont les dérivées de :

$$(\sqrt{\cos(x)}) \ , \quad \sin(3x+2) \ , \quad e^{\cos x} \ , \quad \ln(\sqrt{x})$$

$$\left(\sqrt{\cos x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$$\sin(3x+2)' = \cos(3x+2) \cdot 3 = 3\cos(3x+2)$$

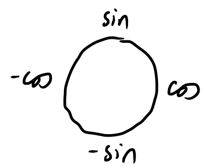
$$\left(e^{\cos x}\right)' = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\sin x \, e^{\cos x}$$

$$\left(\ln(\sqrt{x})\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2 \cdot x}$$

vii. <u>Primitives:</u>

<u>Definition:</u> Soit $f : I \to \mathbb{R}$, f continue sur I
une primitive de f sur I est une fonction F derivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$, $x \in I$

<u>exemple:</u> si $f(x) = \cos x$



$F(x) = \sin x$

Notation: on note en general $F(x) = \int f(x)dx$

Propriété : Les primitives sont définies à une constante près

En effet : Soient F_1 et F_2 deux primitives de f

Par définition $F_1' = f$

$F_2' = f$

donc $\underbrace{F_1' - F_2'}$ $= f - f = 0$

$(F_1 - F_2)' = 0$ (la dérivée de la fonction constante vaut 0)

donc $F_1 - F_2 = k$

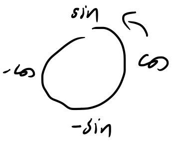
donc $F_1 = F_2 + k$

Par conséquent on définit une primitive de F à une constante près et on écrira : primitive de f : F + k

tableau des primitives :

	f	F
	0	k (constante)
	a	$ax+k$
	x	$\frac{x^2}{2}+k$
$(n\neq -1)$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$ $\quad \left(\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{\cancel{n+1}}\cdot(\cancel{n+1})\, x^{n+\cancel{1}-1} = x^n\right)$
	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+k$
	e^x	e^x+k

$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin(x)$	$-\cos x + k$



$$\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}$$

Remarque :

$$\int f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = f(g(x)) + k$$

$$\boxed{g'(x)\,e^{g(x)} = \left(e^{g(x)}\right)'}$$

ex :

dérivée du cos

$$\int \sin(x)\,e^{\cos x}\,dx = ? \qquad = -\int -\sin x\,e^{\cos x}\,dx = -e^{\cos x} + k$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{3x+5}}\cdot 3\,dx = ? \qquad = \sqrt{3x+5} + k$$

dérivée de 3x+5

$$\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \ln(\cos x) + k$$

car $\cos'(x) = -\sin x$

et on a $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

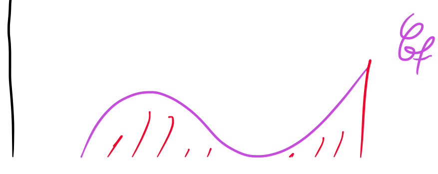
viii : Intégrales :

Définition : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continue sur $[a,b]$

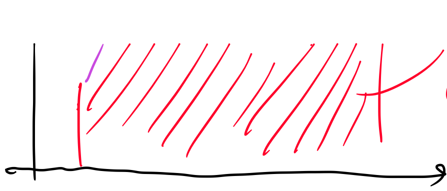
$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f

Interprétation : si f est > 0 sur $[a,b]$



$\int^b f(x)\,dx$



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Propriété :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\left(\text{en effet : } \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0\right)$$

Important : si $b = x$ $\quad \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$

c'est la primitive de f qui s'annule en a :

en effet : $\big(F(x)-F(a)\big)' = \underbrace{F'(x)}_{f} - \underbrace{F'(a)}_{0} = f(x)$

si $x = a$: $\quad F(a) - F(a) = 0$

Remarque, de façon générale :

$$F(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

est la primitive de f qui vaut y_0 quand $x = x_0$

en effet : $(F(x) - y_0)' = F'(x) - 0 = f(x)$.

et si $x = x_0$: $F(x_0) - y_0 = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt}_{0} = 0$

$\Leftrightarrow F(x_0) = y_0$

Théorème fondamental du calcul : $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

Integration par parties:

Rappel: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

donc $f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$

$$\int f'(x)g(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

22 septembre 2021
cours 3/8

b. Equations différentielles

Définition:

Une equation différentielle d'ordre n est une equation qui relie une fonction x avec ses derivées successives jusqu'à la n^{ieme} derivée de la forme suivante:

avec ses dérivées successives jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ dérivée de la forme suivante :

$$F(t, x, x', x'', x^{(3)}, \dots, x^{(n)}) = 0$$ ordre de la dérivée

ici : x est une fonction : $x : I \to J$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$

(normalement $I \subset \mathbb{R}^N$, $J \subset \mathbb{R}^P$)

$x : I \to J$ avec x dérivable n fois (au moins)
$t \mapsto x(t)$

Dans ce cours $F : I \times J \times J \times J \dots \times J \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) \mapsto F(t, x, x', \dots, x^{(n)})$

<u>Exemple</u> : $x^{(3)}(t) + 4x''(t) - \cos(x(t)) = t^2$

dérivée 3ème de x

x

x' : dérivée première

x'' : " seconde $((x')')$

$x^{(3)}$ " 3ème

$\vdots$

$x^{(n)}$ " $n^{\text{ième}}$.

<u>exemple</u>. si $x(t) = t^4 + 2t^3 + 4t + 5$

$x'(t) = 4t^3 + 6t^2 + 4$

$x''(t) = 12t^2 + 12t$

$x'''(t) = 24t + 12$

$x^{(4)}(t) = 24$

$x^{(4)}(t) = 24$

$x^{(5)}(t) = 0$

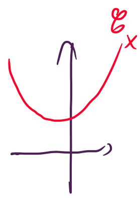
autre exemple : $x'(t) = t$

alors $x(t) = \frac{t^2}{2} + k$, k constante $\in \mathbb{R}$

Remarque : la constante est donnée par ce qu'on appelle la condition initiale

exemple : si $x(0) = 1$ à $t=0$ $\underbrace{x(0)}_{1} = \frac{0^2}{2} + k$

$1 = 0 + k$ alors $k = 1$



donc $\begin{cases} x'(t) = t \\ x(0) = 1 \end{cases}$ nous donne comme solution $\boxed{x(t) = \frac{t^2}{2} + 1}$

exemple : $x'(t) = x(t)$

alors $x(t) = e^t$

en effet : $x'(t) = e^t = x(t)$

Definition : equation differentielle sous forme normale d'ordre n

ce sont des equations differentielles d'ordre n de la forme

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$$

Definition : equation differentielle autonome d'ordre n

ce sont des equat. diff. d'ordre n de la forme

$$F(x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

ça ne depend pas de t de façon explicite

$x'' = -3\cos(t) \cdot x' + 5$

exemple :

(1) $x''(t) + 3\cos(t)\,x'(t) = 5$ $\xrightarrow{}$ pas autonome

ordre 2, on peut la mettre sous forme normale

(2) $x^{(4)}(t) + 3\cos(x'(t)) + 5\sqrt{x(t)} = 6$

ordre 4, on peut la mettre sous forme normale

$x^{(4)} = -3\cos(x') - 5\sqrt{x} + 6$ elle est autonome

(3) $\cos\left(\frac{1}{x'}\right) = x$

Definition : equation differentielle linéaire d'ordre n

Ce sont des eq. diff. d'ordre n de la forme

$$a_n(t)\, x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\, x'(t) + a_0(t)\, x(t) = g(t)$$

Remarque : les coefficients $a_j(t)$ ne dependent pas de x ni de ses derivés !!

et les $x, x', x'', \dots, x^{(n)}$ quand ils apparaissent sont DES MONOMES de degré 1

càd x, x'', … $x^{(3)}$ … MAIS PAS x^2 ou $(x^{(3)})^4$ …

ou encore $\sqrt{x}$ ou $\cos(x'')$, …

exemples :

$x^{(3)} + t^2 x'' + \cos(t)\, x = e^t$ linéaire, pas autonome d'ordre 3

pas linéaire $\cos(x'') + x' = -5$:

$3x^{(5)} + 5t^2 x'' = -\cos(x)$ pas linéaire

$3x^{(4)} + 2x' = 0$ linéaire et autonome

$3\, x\, x^{(4)} + 2x' = 0$

pas linéaire

pour être linéaire on doit avoir

pas linéaire

$a_4(x)\, x^{(4)} + a_1 x' = 0$

coef dépend de x

pour être linéaire on doit avoir

$a_4(t)\, x^{(4)} + a_1(t)\, x' = 0$

Bonne nouvelle : dans ce cours nous n'étudierons que les éq. diff. de la forme $x' = f(t, x)$ ou $x' = f(x)$ (que d'ordre 1)

Question : quelle est une éq. diff. linéaire d'ordre 1 (et sous forme normale) ?

- $x' + a(t)x = g(t)$ (cas non autonome)
- $x' + ax = b$ (cas autonome)

linéaire

Résolution de $x' + ax = 0$ (avec $a \neq 0$) a constante

(éq. diff. linéaire autonome)

(sans 2^{nd} membre, car $= 0$)

Méthode : étape 1 : on multiplie des 2 côtés par $e^{\int a dt} = e^{at}$

$x' + ax = 0$

s'écrit alors $e^{at} \cdot x' + \underbrace{ae^{at}}\, x = 0$

$(e^{f(t)})' = f'(t) e^{f(t)}$

ici $f(t) = at$

$f'(t) = a$

(Rappel : $(e^{at})' = ae^{at}$

Si on pose $u(t) = e^{at}$

$u'(t) = ae^{at}$

$\frac{1}{u(t)} = e^{-at}$

$\underbrace{u(t) \cdot x'(t) + u'(t) \cdot x(t)}_{(u(t) \cdot x(t))'} = 0$

$(u(t) \cdot x(t))' = 0$

donc $u(t) \cdot x(t) = k$ (k : constante)

donc $\boxed{x(t)} = \frac{k}{u(t)} = \boxed{k e^{-at}}$ où k est une constante

exercice : Resoudre (1) $x' + 5x = 0$ trouver k t.q. $x(0) = 1$

exercice

Resoudre ① $x' + 5x = 0$ trouver k t.q. $x(0) = 1$

② $x' + 10x = 0$ " $x(0) = 2$

③ $x' - x = 0$ " $x(1) = 1$

① $x' + 5x = 0$

- on multiplie par e^{5t}: $\underbrace{x' \cdot e^{5t} + 5e^{5t} \cdot x}_{(x \cdot e^{5t})' = 0} = 0$
- $(x \cdot e^{5t})' = 0$
- donc $x \cdot e^{5t} = k$, $k \in \mathbb{R}$
- ainsi $x(t) = k \cdot e^{-5t}$
- Finalement comme $x(0) = 1$ on a $\overset{1}{\overset{\shortparallel}{x(0)}} = k e^{-5 \times 0} = k e^0 = k$

  donc $\boxed{k = 1}$
- Solution $\boxed{x(t) = e^{-5t}}$

exercices: ① $x' + 6x = 0$ $x(2) = 5$

② $3x' + 2x = 0$ $x(1) = 1$

③ $x' - 5x = 1$ $x(0) = 1$

29 septembre 2021

cours 4/8

Résolution d'eq. differentielle

Résolution d'éq. différentielle
linéaire à coef. constants, avec "second membre"
$\underbrace{\text{second membre}}_{\text{(non homogène)}}$

$$x' + ax = b \quad , a, b \in \mathbb{R}^* \ (b \neq 0 \ , a \neq 0)$$

Méthode : on multiplie chaque membre par $e^{\int a\,dt} = e^{at}$

ce qui donne : $\underbrace{e^{at}x' + ae^{at}x}_{(x.e^{at})'} = be^{at}$

$$(x.e^{at})' = be^{at}$$

donc $\quad x\,e^{at} = \int be^{at}dt$

c'est à dire $\quad x.e^{at} = b\int e^{at}dt \quad$ or $\quad \int e^{at}dt = \frac{e^{at}}{a} \quad (a \neq 0)$

$$= b.\frac{e^{at}}{a} + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Par conséquent $\quad x = \frac{b}{a}\underbrace{e^{at}.e^{-at}}_{=1} + ke^{-at}$

ou encore : $\quad x = \frac{b}{a} + k\,e^{-at}$

Application en biologie (dynamique de population)

fin du XVIII ($1790 \simeq$) Révolution industrielle

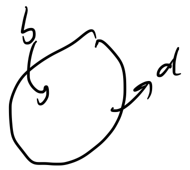
MALTHUS

Soit $P(t)$ la population au temps t

la variation de cette population au temps t dépend de 2 événements:

- naissances
- morts

en équations:



$$P'(t) = b.P(t) - d\,P(t)$$

$$P'(t) = (b-d)\,P(t)$$

et on suppose qu'à l'année $t = t_0$ par exemple 1790

la population $P(t_0) = P_0 > 0$

On a donc une eq. diff. à résoudre:

$$\begin{cases} P' = (b-d)P \\ P(t_0) = P_0 > 0 \end{cases} \qquad b, d > 0 \qquad \text{on pose } b-d = c$$

donc l'eq. s'écrit: $P' = cP$

$$\Leftrightarrow P' - cP = 0$$

$$\Leftrightarrow (P.e^{-ct})' = 0$$

$$\Leftrightarrow Pe^{-ct} = k$$

$$\Leftrightarrow P = ke^{ct} \qquad \text{et } P(t_0) = P_0$$

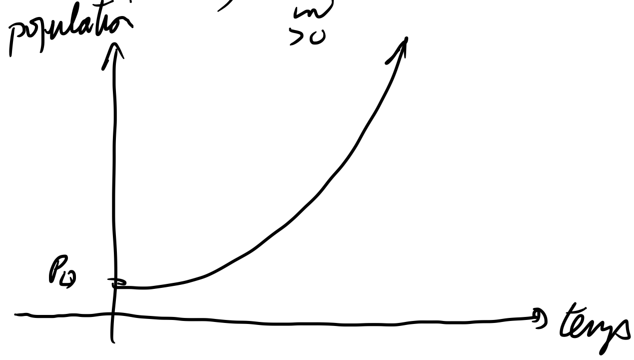
donc $ke^{ct_0} = P_0$ donc $k = P_0 e^{-ct_0}$

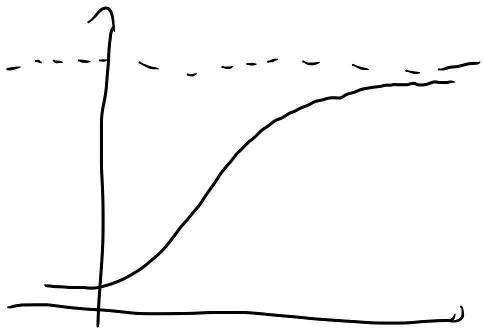
c'est à dire $P(t) = P_0 e^{-ct_0} e^{ct}$

$$= P_0 e^{c(t-t_0)}$$

Problème si $b > d$ (plus de naissance que de mort)

$c > 0$ $P(t) = \underbrace{k}_{>0} e^{ct}$





VERHULST ($\simeq$ 1845)

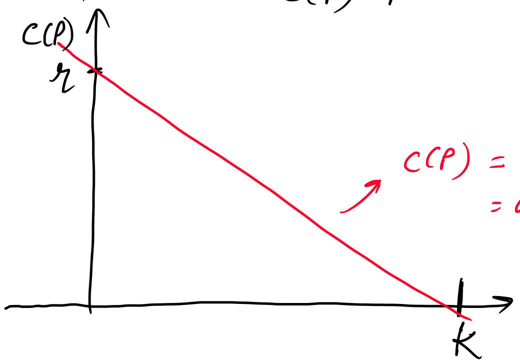
VERHULST ($\simeq$ 1845)

Verhulst a proposé le fait que la constante de croissance C :

$$P'(t) = \underset{\sim}{C}\, P(t)$$

n'est pas constante mais elle dépend de la population elle même

Autrement dit $P' = C(P) \cdot P$



$C(P) = a.P + b.$
$\quad = aP + r$

$b = r$
$a = \frac{r - 0}{0 - K} = -\frac{r}{K}$

$C(P) = -\frac{r}{K} P + r = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)$

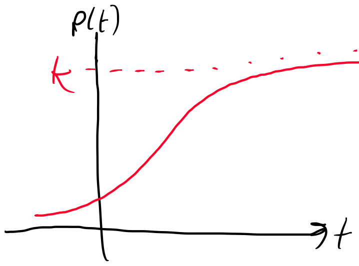
Ainsi équation de Verhulst:

$$P' = C(P).P = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$

$P' = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$ K : capacité de charge de l'environnement (CARRYING CAPACITÉ)

équation logistique. $r, K > 0$ r : croissance équation logistique. $r, K > 0$

r : croissance maximale quand P est très petite



équation logistique si on considère r, k égaux à 1 (pour simplifier le problème)

$$P' = (1-P)P$$

$$P' = P - P^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P' - P + P^2 = 0}$$

équation différentielle non linéaire à cause du P^2

<u>Définition</u> équations différentielles de BERNOULLI

pas de i

Une eq. de Bernoulli est une équation différentielle de la forme

$$\boxed{x' + f(t)x + g(t)x^r = 0}$$

f et g

où $r \in \mathbb{R}$, f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

ce sont des equations differentielles non lineaires à cause de x^r

- si $r=1$: $x' + f(t)x + g(t)x = 0$

$\Leftrightarrow x' + \underbrace{\left(f(t) + g(t)\right)}_{}x = 0$

$\Leftrightarrow x' + C(t)\,x = 0$ equation lineaire sans second membre

- si $r=0$: $x' + f(t)x + g(t).\underbrace{x^0}_{=1} = 0$

$\Leftrightarrow x' + f(t)x + g(t) = 0$

$\Leftrightarrow x' + f(t)x = -g(t)$ eq. diff. lineaire avec 2^{nd} membre

- si $r \neq 0$ et $r \neq 1$

on cherche les solutions $x > 0$

<u>méthode de résolution</u> : $x' + f(t)x + g(t)x^r = 0$

on divise par x^r

$$\frac{x'}{x^r} + f(t)\cdot\frac{x}{x^r} + g(t)\cdot\frac{x^r}{x^r} = 0 \quad \left(\text{rappel : } \frac{1}{x^r} = x^{-r}\right)$$

$\frac{x^r}{x^r} = 1$

$$\Leftrightarrow x' \cdot x^{-r} + f(t)\,x^{1-r} + g(t) = 0 \qquad \frac{x}{x^r} = x^1 \cdot x^{-r} = x^{1-r}$$

on fait un changement de variable :

on pose $\boxed{u(t) = x^{1-r}_{(t)}}$ $\qquad x^n_{(t)} \to n\,x^{n-1}\cdot x'$

alors $u'(t) = (1-r)\,x^{1-r-1}\cdot x'$ $\qquad f^r \to r f^{r-1}\cdot f'$

$= (1-r)\,x^{-r}x' \Rightarrow x^{-r}x' = \frac{u'}{1-r}$ (si $r \neq 1$)

$$\boxed{\frac{u'}{1-r} + f(t)\,u + g(t) = 0}$$

càd en multipliant par $1-r$:

$$\boxed{u' + (1-r)f(t)u + (1-r)g(t) = 0}$$ éq. diff. linéaire en u

on sait résoudre :

$$u' + (1-r)f(t)\,u = -(1-r)\,g(t)$$

on multiplie par $e^{\int (1-r)f(t)dt} = e^{(1-r)\int f(t)dt}$

on obtient : $\left(u \cdot e^{(1-r)\int f(t)dt}\right)' = -(1-r)\,e^{(1-r)\int f(t)dt}\,g(t)$

$$u \cdot e^{(1-r)\int f(t)dt} = -(1-r)\int e^{(1-r)\int f(t)dt} g(s)\,ds + k$$

$$\Rightarrow \quad u = e^{-(1-r)\int f(t)dt}\left(-(1-r)\int e^{(1-r)\int f(t)dt} g(s)\,ds + k\right)$$

OR : $u(t) = x^{1-r}(t)$ (avec $x>0$ donc $u>0$)

donc $x(t) = u^{1/1-r}$

donc $x(t) = \left(\qquad \right)^{1/1-r}$

si $u = x^2$
alors $x = u^{1/2}$

<u>Exercice</u>: résoudre l'équation de Verhulst "simplifiée"

$$x' = x(1-x) \qquad (P' = P(1-P))$$

avec $x(0) = 2$

$x' = x(1-x) \iff x' = x - x^2$

$$\iff \boxed{x' - x + x^2 = 0} \; (*)$$

on reconnait une eq. diff. de Bernoulli de la forme $x' + f(t)x + g(t)x^r = 0$

avec $f(t) = -1$
$g(t) = 1$
et $r = 2$

cherche les solutions $x > 0$ de ce problème on cherche les solutions $x>0$ de ce problème

Méthode : on divise (*) par x^2 : $x^{-2}x' - x^{-2}x + x^2 x^{-2} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^{-2}x' - \underbrace{x^{-1}}_{\left(x^{-1}=\frac{1}{x}\right)} + 1 = 0} \quad (**)$$

on pose $u = x^{-1}$ c'est à dire $u(t) = \frac{1}{x(t)}$ avec $u(0) = \frac{1}{x(0)} = \frac{1}{2}$

on a alors $u'(t) = -1\, x^{-2}(t) \cdot x'(t)$

donc $u' = -x^{-2}x'$ ainsi $x^{-2}x' = -u'$

et on remplace dans (**) :

$$-u' - u + 1 = 0$$

et en multipliant par -1 on obtient $\boxed{u' + u - 1 = 0}$ avec $u(0) = \frac{1}{2}$ (et $u = \frac{1}{x}$, $u>0$)

Resolvons $\begin{cases} u' + u = 1 & (1) \\ u(0) = 1/2 \end{cases}$

on multiplie (1) par $e^{\int 1\,dt} = e^t$

$$(1) \Leftrightarrow (u \cdot e^t)' = e^t$$

en intégrant des "2 côtés" on obtient

en intégrant des "2 côtés" on obtient

$$u \cdot e^t = \int e^t dt + k$$

donc $u(t) = e^{-t}\left(\int e^t dt + k\right) = e^{-t}\left(e^t + k\right) = 1 + ke^{-t}$

avec $u(0) = \frac{1}{2}$ on a : $1 + ke^{-0} = \frac{1}{2} \iff 1 + k = \frac{1}{2}$

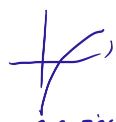
$\iff k = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

Par conséquent $u(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t}$

c'est à dire $u(t) = \frac{2 - e^{-t}}{2}$

on cherche $u > 0$ donc $u(t) > 0 \iff 2 - e^{-t} > 0$

$\iff 2 > e^{-t}$



$\iff \ln 2 > -t$ (car ln est croissante)

$\iff t > -\ln 2$

or si on prend $t \geq 0$, $t > -\ln 2$ est toujours vérifié donc $u(t) > 0$ pour $t \geq 0$

Enfin : $u(t) = \frac{1}{x(t)}$ donc $x(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{2}{2 - e^{-t}}$ avec $t \geq 0$

ne s'annule pas si $t \geq 0$

II Etude qualitative des eq. diff

Mauvaise nouvelle : la plupart des eq. diff. sont non linéaires et on ne peut pas les résoudre explicitement.

Comment faire alors pour les étudier ??

On fait ce qu'on appelle une étude qualitative du problème

exemple : $x' = t \quad , t \in \mathbb{R}$

on va dessiner les solutions grâce aux tangentes :

on cherche quand $x' = k$ (c'est à dire la pente de la tangente à la courbe est k)

$x'(t) = t \rightsquigarrow x = \frac{t^2}{2} + k$

ici : si $k = 0$

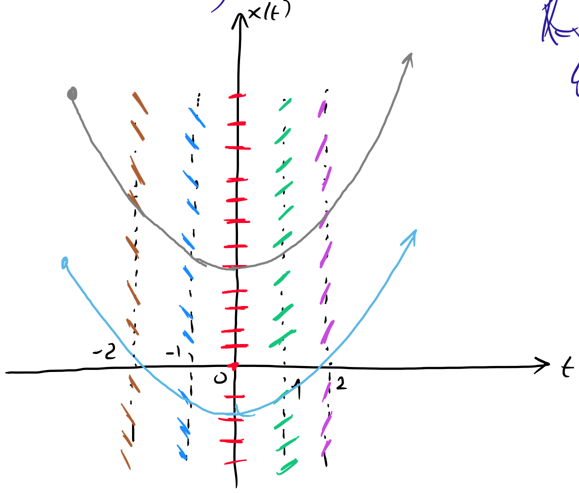
$x' = 0 \iff t = 0$

si $k = 1$ $x' = 1 \iff t = 1$

si $k = -1$ $x' = 1 \iff t = -1$

si $k = 2$ $x' = 2 \iff t = 2$

si $k = -2$ $x' = -2 \iff t = -2$



Définition : On appelle isocline-k de l'équation $x' = f(t,x)$ l'ensemble des points $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x' = k$ c'est à dire $\boxed{f(t,x) = k}$

exemple : Dessiner l'allure des solutions de l'éq. diff $x' = x^2 - t$ en vous servant des isoclines-k

solution : $x' = k \iff x^2 - t = k$ (à chaque $k \in \mathbb{R}$ donné)

$\iff x^2 = k + t$ si $k + t \geq 0$ càd $t \geq -k$

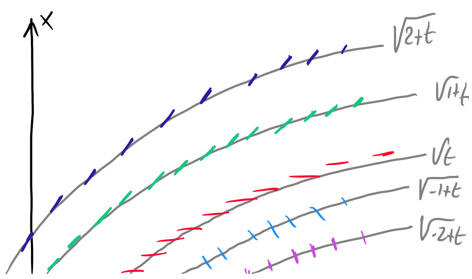
$\iff x = \sqrt{k+t}$ ou $-\sqrt{k+t}$

si $k = 0$: $x' = 0 \iff x = \sqrt{0+t}$ ou $-\sqrt{0+t}$

$= \sqrt{t}$ ou $-\sqrt{t}$, $t \geq 0$

si $k = 1$ $x' = 1 \iff x = \sqrt{1+t}$ ou $-\sqrt{1+t}$

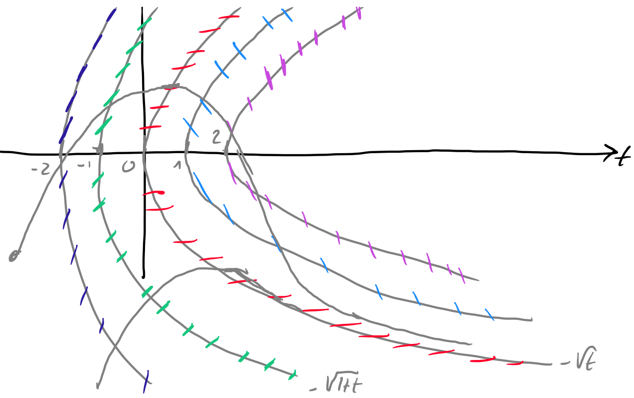
$k =$ $' = -1 \iff X = \sqrt{-1+t}$ ou $-\sqrt{-1+t}$



si $k=-1$ $\quad x'=-1 \iff x=\sqrt{-1+t}$ ou $-\sqrt{-1+t}$

si $k=2$ $\quad x'=+2 \iff x=\sqrt{2+t}$ ou $-\sqrt{2+t}$

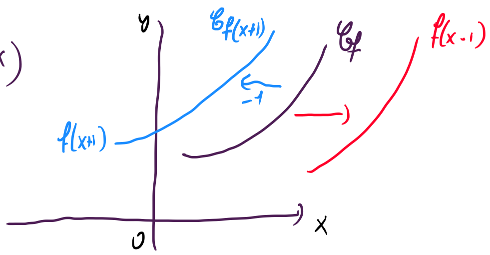
si $k=-2$ $\quad x'=-2 \iff x=\sqrt{-2+t}$ ou $-\sqrt{-2+t}$



Ex: isoclines de $x'=x(1-x)$

remarque: $x \mapsto f(x)$

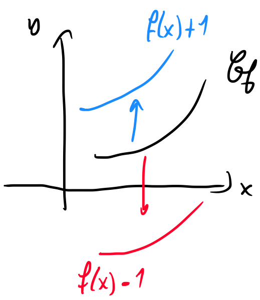
$x \mapsto f(x+k)$ on déplace $\mathcal{C}_f$ de $-k$ horizontalement



$x \mapsto f(x)+k$

$\Rightarrow$

on déplace $\mathcal{C}_f$ de k verticalement



exercice: représentation des solutions de l'équation de VERHULST $x' = x(1-x)$
(équation logistique)

On cherche les isoclines-k de l'équation:

elles vérifient: $x' = k$ càd $x(1-x) = k$

$\Leftrightarrow x - x^2 = k$

$\Leftrightarrow x^2 - x + k = 0$ les isoclines k sont les solutions de ce polynôme de degré 2

Rappel:

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

① si $\Delta > 0$ on a 2 solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

② si $\Delta = 0$ on a 1 solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$

③ si $\Delta < 0$ on a 0 solution

$\Delta = 1 - 4k$

- si $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 4k > 0$

$\Leftrightarrow 1 > 4k$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4} > k}$ alors on a 2 solutions $x_1 = \frac{1 - \sqrt{(1-4k)}}{2}$

$x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4k}}{2}$

• si $\Delta = 0$ càd $k = \frac{1}{4}$ alors a a une seule solution $x_0 = \frac{1}{2}$

• si $\Delta < 0$ càd $k > \frac{1}{4}$ " on a aucune solution

$k = \frac{1}{4}$

$k = 0 \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{1-0}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{1}}{2}$

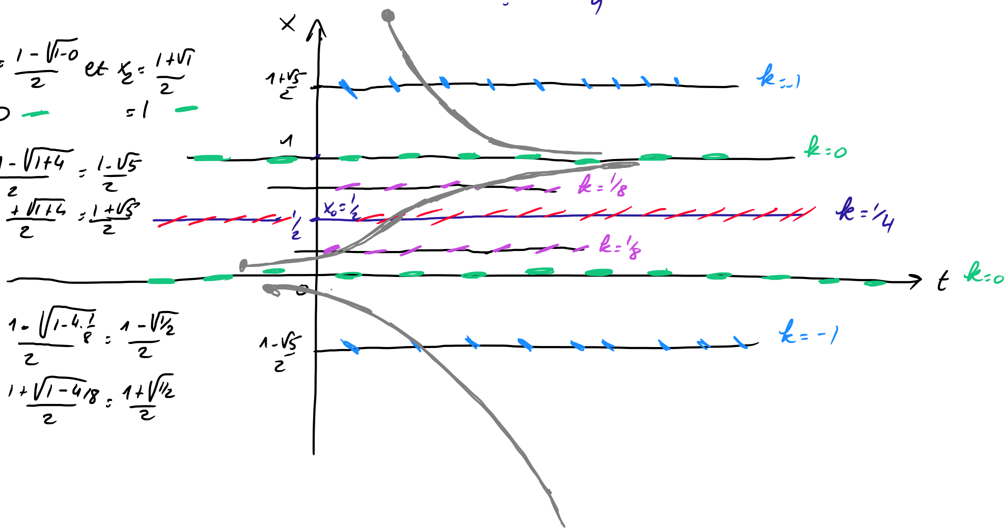
$\quad = 0 \qquad\qquad = 1$

$k = -1 \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$k = \frac{1}{8} \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{8}}}{2} = \frac{1-\sqrt{1/2}}{2}$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4/8}}{2} = \frac{1+\sqrt{1/2}}{2}$



Remarques sur $\boxed{x' = x(1-x)}$

c'est une équation de la forme $\boxed{x' = f(x)}$

ordre 1
non linéaire
autonome
sous forme normale

Dans ce cours (avec f suffisamment régulière)
dérivable, de dérivée continue

ce type d'équation $x' = f(x)$ si on choisit une condition initiale possède une unique solution

$\Rightarrow$ c'est à dire que par un point ne passera qu'une seule courbe solution

autrement dit, les $\underbrace{\text{trajectoires}}_{\text{les solutions}}$ ne pourront jamais se croiser !!!

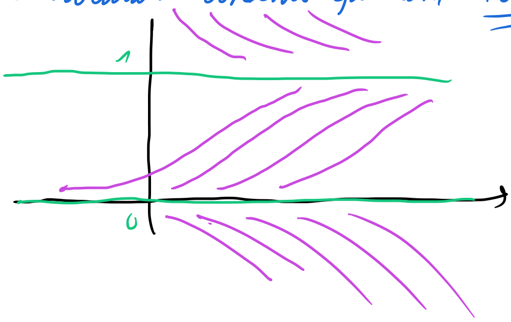
ici par exemple : $x' = x(1-x)$: si $x(t) = 0$ pour tout t alors $x'(t) = 0$

et on a $\underbrace{x'}_{0} = \underbrace{x(1-x)}_{0}$

si $x(t)=1$ pour tout t alors $x'(t)=0$

et $\underbrace{x'}_{0} = 1.\underbrace{(1-1)}_{0} = 0$ OK

on a 2 solutions évidentes qui sont 1 et 0



Remarques: dans l'equation $x' = x(1-x)$, on a $x=1$ et $x=0$ qui sont à la fois des isoclines (isoclines nulles) et des solutions

on les appelle les equilibre de l'equation

Definition : On appelle equilibre (ou solution stationnaire) de l'equation $x' = f(x)$ les solutions notés x^* telles que $x^{*'} = 0$ c'est à dire $f(x^*) = 0$

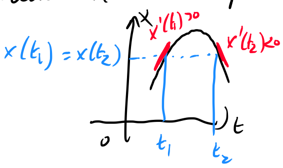
(solution stationnaire
équilibre = independant du temps, donc sa dérivée est nulle

Donc pour trouver les equilibres, il faut juste trouver les solutions de $\boxed{f(x) = 0}$

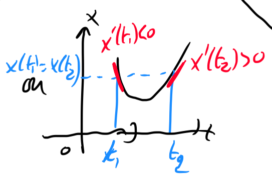
Une fois trouvés les equilibres, nous recherchons s'ils sont stables ou instables.

Propriété : les solution de $x' = f(x)$ quand elles ne sont pas constantes
(pas equilibre)
sont strictement monotone (c'est à dire soit croissante, soit decroissante)
(pas d'oscillation possible)

Preuve : supposons qu'une solution de $x'=f(x)$ ne soit pas monotone
alors on a 2 cas possible :



ou



dans les 2 cas $x'(t_1)x'(t_2)<0$

$\Leftrightarrow f(x(t_1)).f(x(t_2))<0$

$\Leftrightarrow$ car $x(t_1)=x(t_2)$: $f(x(t_1)).f(x(t_1))<0$

$\Leftrightarrow \underbrace{f^2(x(t_1))}_{\geq 0 \text{ ne peut pas être } <0}<0$

donc x ne peut pas osciller $\Rightarrow$ x est MONOTONE

Propriété : si $t\mapsto x(t)$ est solution de $x'=f(x)$ sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ | 20 octobre cours 7/8
alors pour toute constante $c\in\mathbb{R}$ la fonction, t.q. $t+c\in I$
$t\mapsto y(t)=x(t+c)$ est aussi solution de la même équation

Preuve : soit $y(t)=x(t+c)$
alors $y'(t)=x'(t+c)$ or $t+c\in I$ et comme x est solution de $x'=f(x)$ alors
$y'(t)=f(x(t+c))$

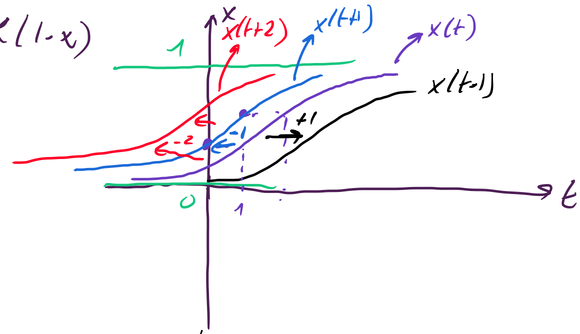
Rappel
$(f(g(t)))'=f'(g(t)).g'(t)$
$(x(t+c))'=x'(t+c).1$.

$y'(t) = f(x(t+c))$

$y'(t) = f(y(t))$ $(y(t) = x(t+c))$

$(x(t+c))' = x'(t+c).$

ex : $x' = x(1-x)$



$\overset{c=1}{x(t+1)}$ $\underset{\downarrow}{t=0}$ $x(1)$ $t=1$ $x(2)$

<u>Remarque</u> : cette propriété est importante, parce qu'elle signifie qu'une fois qu'on a tracé une solution le graphe de toutes les autres solutions est trouvé par translation (déplacement) horizontal.

exemple : $x' = x(1-x)$
$= f(x)$

: on a 2 isoclines spéciales : $x=0$ et $x=1$
pour lesquelles $f(x)=0$ (en effet $0(1-0)=0$
et $1(1-1)=0$)

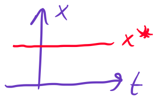
ce sont les isoclines pour lesquelles $x'=0$
c'est à dire les isoclines nulles.

Question : que veut dire $x'=0$?

Ça veut dire que x est indépendante du temps, on dit que cette solution est stationnaire on appelle ça aussi un <u>équilibre</u> ou encore un point <u>critique</u>.

Dans ce cours on les appellera équilibres et on les notera x^*
(donc les x^* seront des constantes solutions de $x^{*\prime}=0$ càd $f(x^*)=0$)

Notons que les x^* seront non seulement des isoclines nulles, mais aussi des solutions de $x' = f(x)$. En effet, comme x^* est une constante et que $f(x^*) = 0$ on a $x^{*\prime} = 0 = f(x^*)$.

Dans le graphe 

ce sont des droites horizontales.

Et comme ce sont des solutions de l'éq. $x' = f(x)$

Aucune autre solution ne peut les croiser (car les solutions de $x' = f(x)$ ne peuvent pas se croiser).

<u>Question</u>: comment représenter "facilement" les solutions de $x' = f(x)$ sans connaître leur forme explicite.

<u>MÉTHODE</u>: On considère l'éq. suivante $x' = f(x)$

1. chercher les équilibres x^* (c'est à dire les solutions de $f(x^*) = 0$
2. Tracer un axe vertical et on y reporte les x^* trouvés
3. entre chaque équilibre x^* on regarde le signe de $f(x)$.

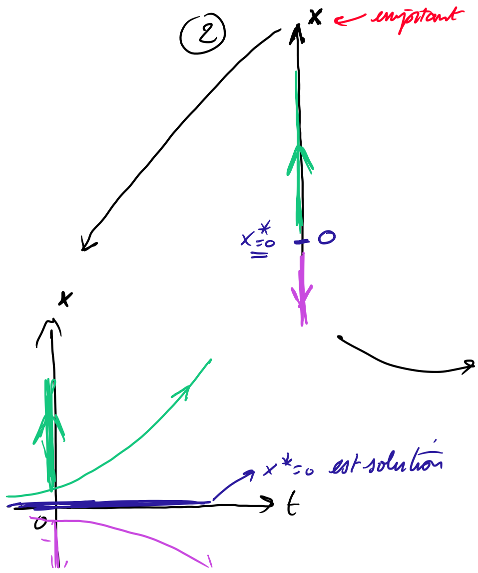
regarde le signe
et on le reporte sous forme de flèche

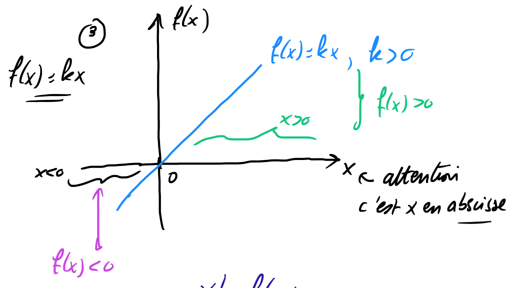
<u>Exemples</u>: équation de Malthus: $x' = kx$ (on prend ici $k>0$)

on pose $f(x) = kx$ ($x' = f(x)$)

① $f(x^*) = 0 \iff kx^* = 0$ or $k > 0$

$\iff \boxed{x^* = 0}$ est le seul équilibre





$x' = f(x)$

Remarque: cette droite verticale s'appelle portrait de phase de $x' = f(x)$

exercice : Dessiner quelques solutions de $x' = x(1-x)$ (modèle de VERHULST)

On pose $f(x) = x(1-x)$

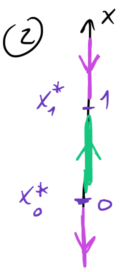
① les équilibres x^* vérifient $f(x^*) = 0$

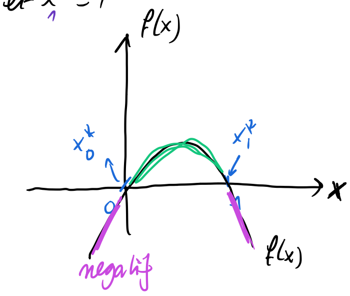
c'est à dire $x^*(1-x^*) = 0 \iff \boxed{x_0^* = 0}$ ou $1 - x^* = 0$

$\iff \boxed{x_1^* = 1}$

on a 2 équilibres $x_0^* = 0$ et $x_1^* = 1$

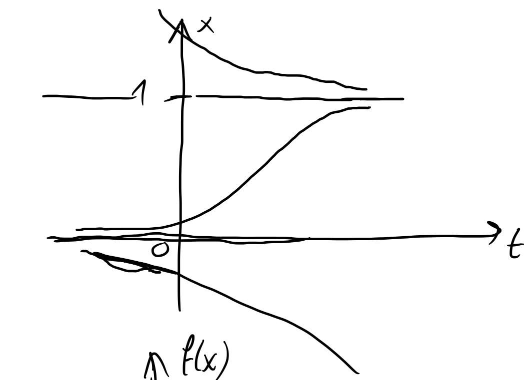
②

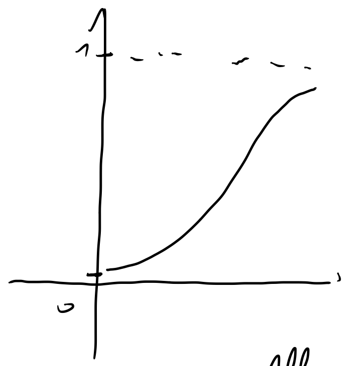


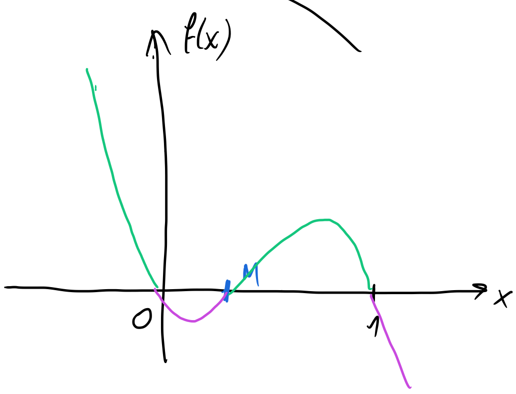


$f(x) = x(1-x)$

$= x - x^2$

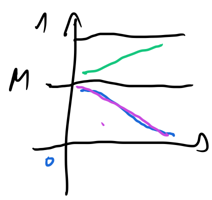


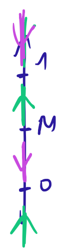




$$x' = f(x)$$

Allee

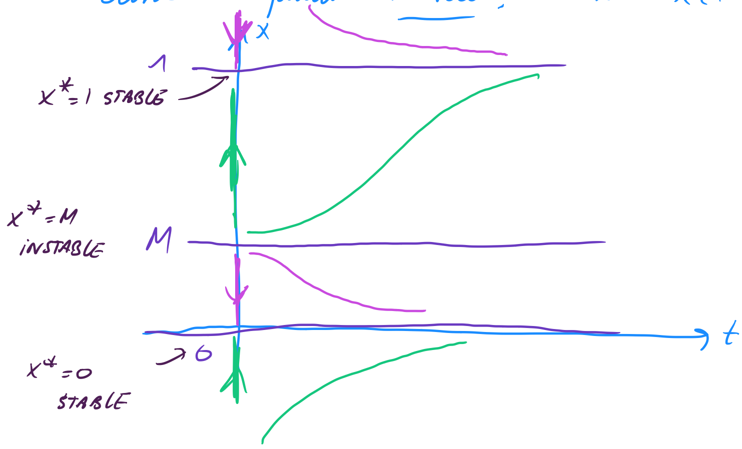




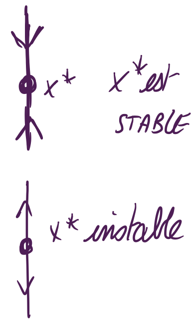
$f(x) = x(1-x)(M-x)$?? $\to x^3$

ou $\boxed{x(1-x)(x-M)}$?? $\to -x^3$

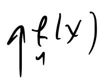
donc l'équation d'Allee : $x' = x(1-x)(x-M)$ $(M \in]0,1[)$



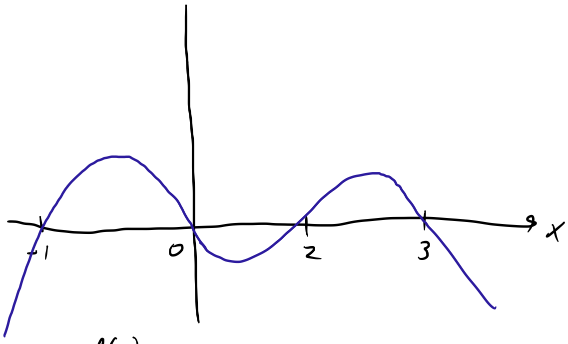
Remarque :



exercice : $x' = f(x)$



exercice : $x' = f_1(x)$

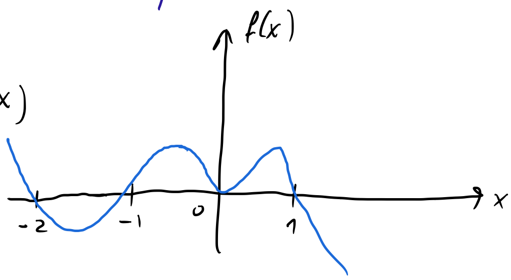


① équilibre

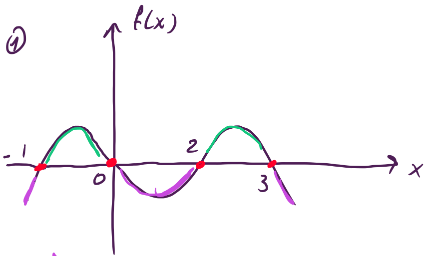
② portrait de phase

③ courbes solutions

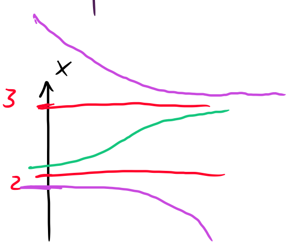
$x' = f_2(x)$



①

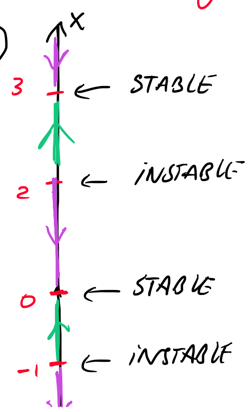


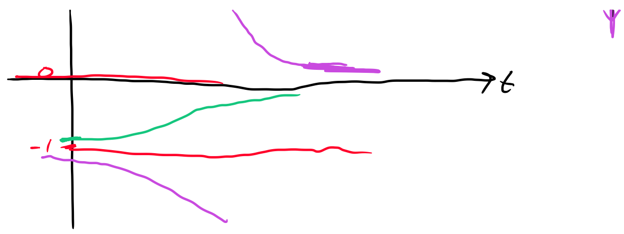
③



① équilibres : il y a 4 équilibres -1, 0, 2 et 3

②




0
-1
t
Y