

partie 2

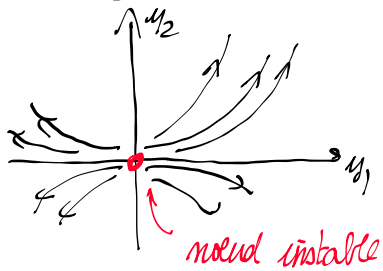
on a $\Delta > 0$ λ_1 et λ_2 deux réels distincts

et $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$

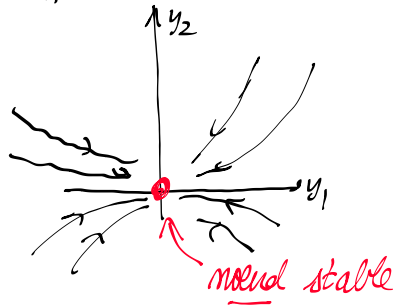
① si $\lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ on obtient $y_2 = k y_1^\alpha$ avec $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

si $\alpha > 1$

si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
 $\lambda_2 / \lambda_1 > 1$
 $\Leftrightarrow \lambda_2 > \lambda_1 > 0$



si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
 $\lambda_2 / \lambda_1 > 1 \Leftrightarrow \lambda_2 < \lambda_1 < 0$



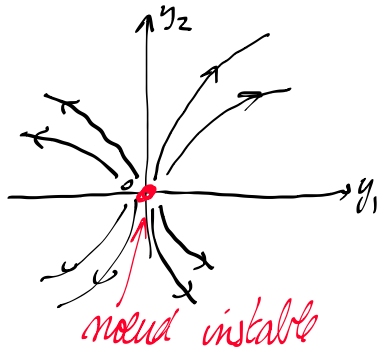
$$\begin{cases} y_1(t) = \xi e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = \zeta e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

si $\alpha < 1$

ex: $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = 2 \quad \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

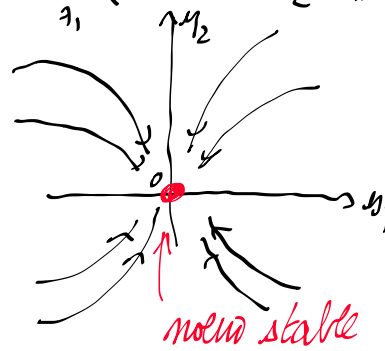
$\alpha = \frac{1}{2} \quad y_2 = k y_1^{1/2} = k \cdot \sqrt{y_1}$

si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda_2 < \lambda_1$



$y_2 = k y_1^\alpha$

si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1 \Leftrightarrow 0 > \lambda_2 > \lambda_1$



si $\boxed{\lambda_1 \lambda_2 < 0}$ autrement dit: λ_1 et λ_2 sont de signes opposés

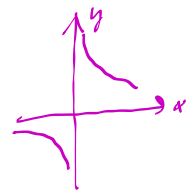
par le même calcul que précédemment on aura $y_2 = k y_1^\alpha$ $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$

exemple: si $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$

$$\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -1$$

$$y_2 = k y_1^{-1}$$

$$(y = x^{-1} = \frac{1}{x})$$

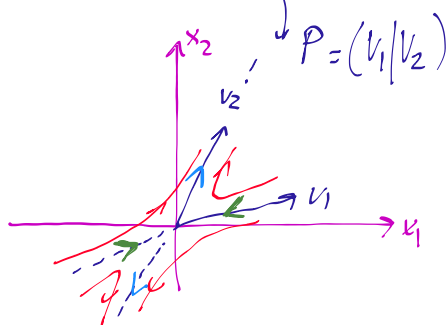
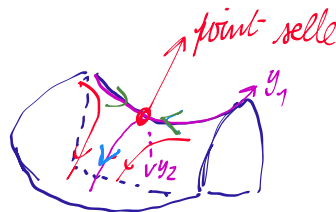
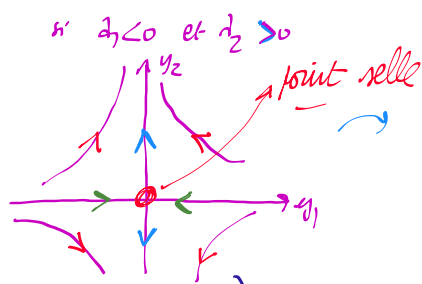
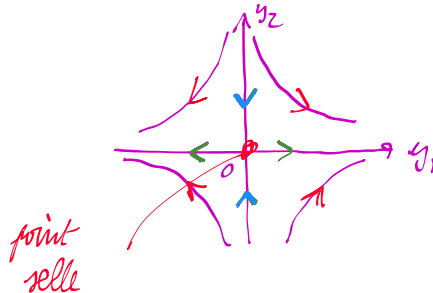


on aura: si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = c_2 e^{-\lambda_1 t} \end{cases}$$

$\lambda_1 > 0$: on s'éloigne de 0

$\lambda_1 < 0$: on s'approche de 0



$$v_1 \sim \lambda_1 < 0 \text{ ici}$$

$$v_2 \sim \lambda_2 > 0 \text{ ici}$$

4,

Exercice : Résoudre et représenter les solutions de :

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

on a $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{tr}(A) = 2+1=3$$

$$\det(A) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$$

$$\Delta = \text{tr}(A)^2 - 4\det(A) = 3^2 - 4 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Calcul de λ_1 et λ_2 : les λ sont solutions de $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$

méthode 1

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad \Delta = 25$$

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = \frac{3-5}{2} = -1$$

$$\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

méthode 2

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \Rightarrow \lambda_1 = 3 - \lambda_2$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -4 \quad (3 - \lambda_2)(\lambda_2) = -4$$

$$3\lambda_2 - \lambda_2^2 = -4 \Rightarrow \lambda_2^2 - 3\lambda_2 - 4 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16$$

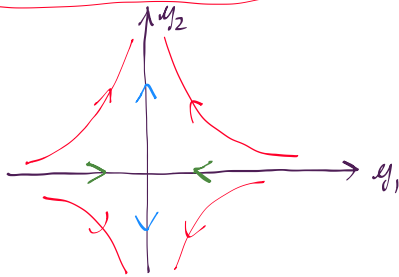
$$\lambda_2 = \frac{3+5}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{8}{2}$$

$$\lambda_2 = 4$$

$\lambda_1 \lambda_2 < 0$ avec $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$

$\Rightarrow$ on est dans le cas de point selle!

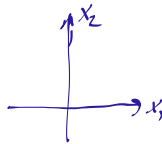


restent à calculer: V_1 et V_2 : $V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ avec V_1 et $V_2 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$!!

$$AV_1 = \lambda_1 V_1$$

$$AV_2 = \lambda_2 V_2$$

• puis tracer :



enfin: $X = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$ donne toutes les solutions X

finalem^{ent} : donner la solution telle que $x_1(0) = 1$
 $x_2(0) = -1$

$$x_2(0) = -1$$

Comment calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres?

Comment calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres?

Réponse: Soit $v_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}$ associé à $\lambda_1 = -1$
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On pose $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$. Alors v_1 vérifie: $Av_1 = \lambda_1 v_1$

$$\text{càd} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$$

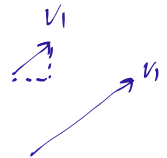
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2v_{11} + 3v_{12} = -v_{11} \\ 2v_{11} + v_{12} = -v_{12} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3v_{11} + 3v_{12} = 0 \\ 2v_{11} + 2v_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_{11} + v_{12} = 0 \\ v_{11} + v_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v_{11} = -v_{12}$$

On choisit $v_{11} = 1$ alors $v_{12} = -v_{11} = -1$ et $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



Soit $v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}$ vecteur propre associé à $\lambda_2 = 4$

On for $V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ also V_2 vector $AV_2 = \frac{3}{2}V_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2v_{21} + 3v_{22} = 4v_{21} \\ 2v_{21} + v_{22} = 4v_{22} \end{cases}$$

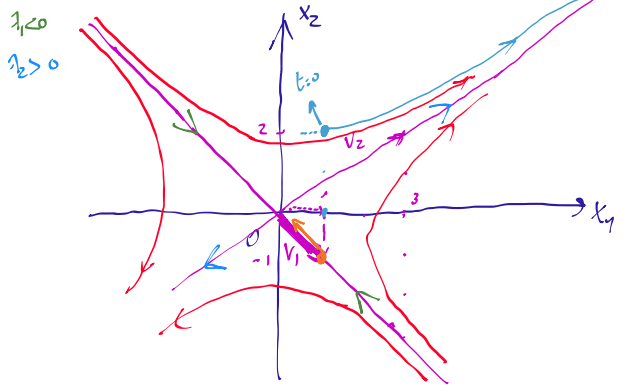
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2v_{21} + 3v_{22} = 0 \\ 2v_{21} - 3v_{22} = 0 \end{cases}$$

or also $2v_{21} = 3v_{22}$

$$\Leftrightarrow v_{21} = \frac{3}{2}v_{22}$$

if we put: $v_{22} = 2$ also $v_{21} = 3$ or also $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Représentation graphique dans le plan (x, y) :



$$e^{-t} \rightarrow e^{-t} \rightarrow 0$$

$$e^{72t} = e^{9t} \rightarrow +\infty$$

$$t \rightarrow +\infty$$

la solution passant par

$$x_1(0) = 1$$

$$x_2(v) = -1$$

se trouve sur la droite du vecteur v_1

Autre exemple : si $x_1(0) = 1$

et $x_2(0) = 2$

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 \quad \text{avec } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

done $x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-t} \cdot 1 + c_2 e^{4t} \cdot 3 = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t} \\ x_2(t) &= c_1 e^{-t} \cdot (-1) + c_2 e^{4t} \cdot (2) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t} \end{aligned}$$

$$x_2(t) = c_1 e^{-t} (-1) + c_2 e^{4t} (2) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t}$$

Comment calcule-t-on c_1 et c_2 : grâce aux conditions initiales:

$$\text{si } x_1(0) = 1$$

$$x_2(0) = 2$$

an: from $t=0$: $x_1(0) = 1 = c_1 + 3c_2$

$$x_2(0) = z = -c_1 + 2c_2$$

$$(5) \quad \begin{cases} 1 = c_1 + 3c_2 & (1) \\ 2 = -c_1 + 2c_2 & (2) \end{cases}$$

(-) ① + ② (-) $3 = 5c_2$ (-) $\boxed{c_2 = \frac{3}{5}}$ et comme $c_1 = 1 - 3c_2$

$$\text{as } a_{C_1} = 1 - 3 \cdot \frac{3}{5} = 1 - \frac{9}{5}$$

$$[C_1]^5 = \frac{5.9}{5} = \left[\frac{-7}{5} \right]$$

done $C_1 = -\frac{4}{5}$ et $C_2 = \frac{3}{5}$

done $x_1(t) = -\frac{4}{5}e^{-t} + \frac{9}{5}e^{4t}$

$$x_2(t) = \frac{4}{5}e^{-t} + \frac{6}{5}e^{9t}$$

2. CAS $\Delta = 0$

dans ce cas là

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

on a alors une racine double $\boxed{\lambda_0}$ (une valeur propre double)

propre nulle)

2 cas particuliers se posent alors:

(a) si on trouve 2 vecteurs propres V_1 et V_2 linéairement indépendants (non colinéaires)

~~V_1 et V_2~~ $\rightarrow$ V_1 et V_2
pas bon bon

alors par la matrice de passage P , on peut diagonaliser A

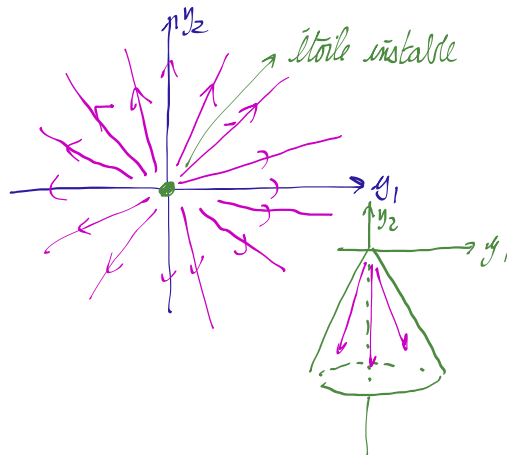
et ça donne $D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

Par un changement de variable on a $Y' = DY$

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_0 y_1 \\ y_2' = \lambda_0 y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = k_1 e^{\lambda_0 t} \quad (*) \\ y_2 = k_2 e^{\lambda_0 t} \quad (**) \end{cases}$$

Question comment représenter les solutions?

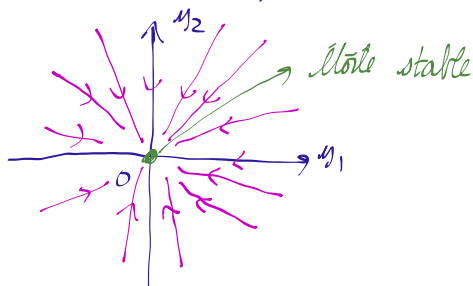
① cas où $\lambda_0 > 0$ on suppose $k_1, k_2 \neq 0$



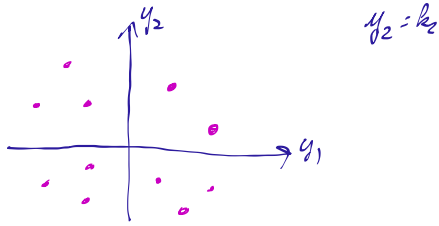
$$\begin{aligned} (*) & \quad y_2 = \frac{k_2 e^{\lambda_0 t}}{k_1 e^{\lambda_0 t}} = \frac{k_2}{k_1} = C \quad C = c \\ (**) & \quad y_2 = C y_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_2 = C y_1$$

② si $\lambda_0 < 0$ on suppose $k_1, k_2 \neq 0$



③ If $r_0 = 0$ and also $y_1 = k$,



b. Si on ne trouve pas 2 vecteurs propres linéairement indépendants
alors on ne peut pas diagonaliser la matrice A .

Pas contre, on peut la simplifier et trouver une matrice J (forme de JORDAN)
qui aura la forme $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ ↑ vecteur propre

dans ce cas là, on a une matrice de passage $P = (V_1 | W)$ ↳ un vecteur à calculer pour avoir J

pour obtenir $Y' = JY$

$$\text{càd } \begin{cases} y_1' = \lambda_0 y_1 + 1 y_2 & (1) \\ y_2' = \lambda_0 y_2 & (2) \end{cases}$$

Comment trouver y_1 et y_2 :

$$y_2 = k_2 e^{\lambda_0 t}$$

on remplace y_2 dans (1): $y_1' = \lambda_0 y_1 + k_2 e^{\lambda_0 t}$

on multiplie par $e^{-\int \lambda_0 dt} = e^{-\lambda_0 t}$:

$$\Leftrightarrow y_1' - \lambda_0 y_1 = k_2 e^{\lambda_0 t}$$

$$(y_1 \cdot e^{-\lambda_0 t})' = k_2 \underbrace{e^{\lambda_0 t} e^{-\lambda_0 t}}_{e^{\lambda_0 t - \lambda_0 t} = e^0 = 1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} y_1 \\ 1 \end{array} \right)' = k_2$$

en intégrant on a:

$$y_1 \cdot e^{-\lambda_0 t} = k_2 t + k_1$$

$$\Leftrightarrow y_1 = (k_1 + k_2 t) e^{\lambda_0 t}$$

Comment représenter les solutions? Réponse: avec les formulations de $y_1 = (k_1 + k_2 t) e^{\lambda_0 t}$
et $y_2 = k_2 e^{\lambda_0 t}$

ce n'est pas possible d'exprimer y_2 en fonction de y_1 : $y_2 = f(y_1)$

Comment faire alors?

On revient à la formulation par les deux:

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_0 y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda_0 y_2 \end{cases} \quad \text{et on trace la solution à partir des tangentes}$$

$$\boxed{\text{si } \lambda_0 \neq 0} \quad \text{⑧} \quad \boxed{\lambda_0 > 0}$$

$$y_1' = 0 \quad (\text{tangents verticales})$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 y_1 + y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_2 = -\lambda_0 y_1$$

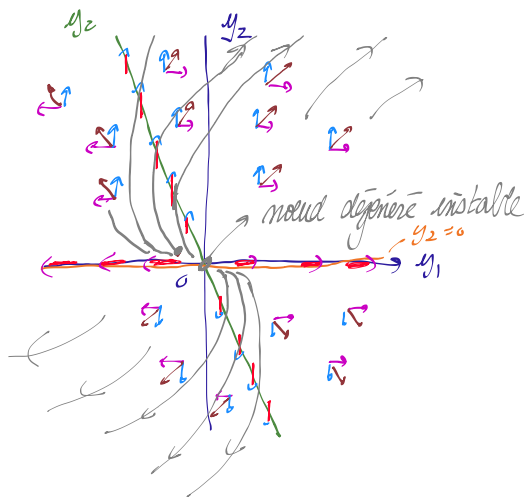
$$y_2' = \lambda_0 y_2 \quad \text{et } y_2$$

$$y_2' = 0 \quad (\text{tangents horizontales})$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_2 = 0 \quad \lambda_0 > 0$$





$$\text{II } \omega \quad y_2=0 \quad \text{orange}$$

- De plus: $y_1' > 0$ (tangent vers la droite)

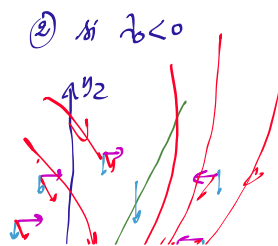
$$\Leftrightarrow \lambda_0 y_1 + y_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow y_2 > -\lambda_0 y_1 \quad (\text{au dessus de la droite } y_2 = -\lambda_0 y_1)$$

$$y_2' > 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 y_2 > 0$$

$$\stackrel{y_2' > 0}{\Leftrightarrow} y_2 > 0 \quad \text{blue}$$



② si $\lambda_0 < 0$

$$y_1' = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 y_1 + y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_2 = -\lambda_0 y_1$$

$$y_1' > 0 \Leftrightarrow y_2 > -\lambda_0 y_1$$

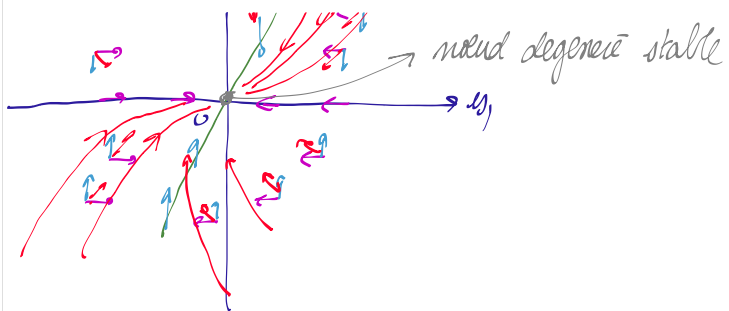
$$y_2' = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_2 = 0$$

$$y_2' > 0 \Leftrightarrow \lambda_0 y_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow y_2 < 0$$



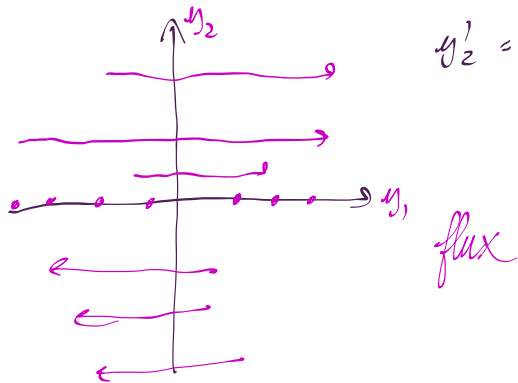
$$\lambda_0 < 0$$

$$\text{et } y_2 < 0$$

③ si $\lambda_0 = 0$ on a alors

$$y_1' = \lambda_0 y_1 + y_2 = y_2 \Rightarrow \text{du signe de } y_2$$

$$y_2' = \lambda_0 y_2 = 0 \Rightarrow \text{pas de mouvement vertical}$$



③ cas $\Delta < 0$

