Laurent PUJO-MENJOUET
pujo@math.univ-lyon1.fr
BRACONNIER - BUREAU 246

équations aux dérivées partielles appliquées à la biologie & la médecine

PARTIE 1 : équations paraboliques (équations de réaction-diffusion)

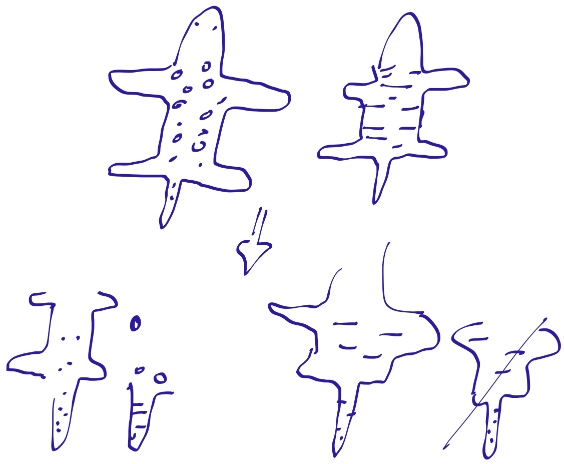
PARTIE 2 : " hyperboliques (" de type transport)

↳ équations différentielles à retard

Partie 1 : Equations de réaction-diffusion

REFERENCE : JAMES MURRAY
MATHEMATICAL BIOLOGY
(vol 1 & vol 2)

I Les structures de Turing



Introduction : dans un contexte biologique, les systèmes de réaction-diffusion ont été introduits en 1952 par ALAN TURING pour étudier la MORPHOGENÈSE (apparition de formes dans les embryons) au cours de laquelle des formes semblent apparaître "à partir de rien"

Turing a montré que ce type d'émergence de forme peut avoir lieu dans les systèmes assez simples, comme des mélanges d'espèces chimiques (qu'il appelle MORPHOGÈNES) soumis à de la diffusion et de la réaction.

Ces formes dites STRUCTURES DE TURING (TURING PATTERNS) ont été utilisées depuis les années 70 dans de nombreux travaux de biomaths : tâches sur le pelage, problèmes d'écologie, population,...

Avant de passer aux système d'équations de réaction-diffusion, commençons par étudier une seule équation :

1. Équation de diffusion :

Equation de diffusion :

L'equation type decrivant les phenomènes diffusifs est :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d\, \Delta u(t,x)$$

equation de la CHALEUR historiquement introduite par FOURIER

u : quantité de chaleur qui se diffuse

t : temps

x : espace $\quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N \quad N=1,2,3 \quad$ (ici $N=1$) $\quad x \in [0, L] \quad L>0$

$\frac{\partial}{\partial t}$: derivée partielle par rapport à t

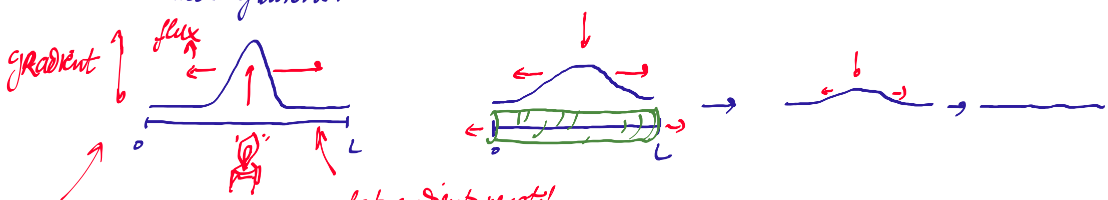
Δ : laplacien, operateur de la diffusion

en dimension 1 $\quad \Delta u(t,x) = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$

" 2 : $\quad \Delta u(t,x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(t,x) + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(t,x) \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

d : $d>0$ coefficient de diffusion

Définition : La diffusion est un phénomène pour lequel le flux est proportionnel au gradient.



fort gradient positif
→ fort flux vers la gauche

fort gradient négatif
→ fort flux vers la droite

La diffusion "aplatit les bosses" d'autant plus vite qu'elles sont hautes et que d est grand.

Question : que se passe-t-il si $d<0$?

On a alors un phénomène d'agrégation ou concentration.

Remarque : Dans ce cours on n'étudiera que le phénomène de diffusion c'est à dire $\boxed{d>0}$

en 1D : $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \alpha \Delta u(t,x)$ s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \alpha \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in [0,L]$
$L > 0$

a. Conditions aux limites :

Pour que ce problème soit complet, il est nécessaire de préciser :

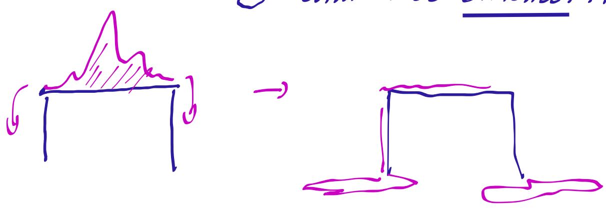
$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$

① quelle est la condition initiale : $u(0,x) = f(x)$, $x \in [0,L]$

② quelles sont les conditions aux bords : ici quand $x = 0$ et $x = L$

on donne ici 2 conditions aux bords classiques :

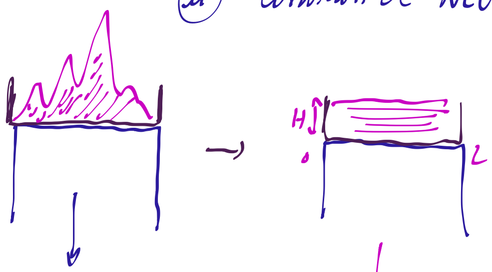
(i) Condition de DIRICHLET : homogène



$u(t,0) = u(t,L) = 0$

$\lim_{t \to +\infty} u(t,x) = 0$

(ii) condition de NEUMANN homogène :



$$\frac{\partial}{\partial x} u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x} u(t,L) = 0$$

conservation de la masse

$$\int_0^L f(x)\,dx = H \cdot L. \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

Le problème est désormais complet :

$$(S)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d\,\Delta u(t,x) & t \geq 0 \quad x \in [0,L] \\ + \text{ C.I.} \quad u(0,x) = f(x) & x \in [0,L] \\ + \text{ C.B} \quad (\text{Neumann ou Dirichlet}) & \end{cases}$$

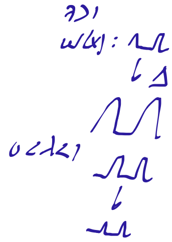
6. Fonctions propres

Pour résoudre (S) on utilise la notion de fonction propre.

Définition : On appelle fonction propre de l'opérateur Δ, que l'on note w pour des conditions aux bords définies (Neumann, Dirichlet), un profil spatial (ou une forme (c'est une fonction de x seulement $w : x \mapsto w(x)$)

tel que :

1. w est dérivable 2 fois sur $[0,L]$
2. $w \not\equiv 0$ sur $[0,L]$
3. w vérifie les conditions aux bords
4. $\Delta w(x) = \lambda w(x) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$



Remarque : w est défini à constante multiplicative près
$w(x)$ ou $k w(x)$: même fonction propre.

Remarque : λ est appelée valeur propre associée à w

Exercice : On considère $x \in [0,L]$ avec les conditions Dirichlet homogène.

1) Calculer les fonctions propres associées de Δ associées à ce problème

1) Calculer les fonctions propres associées de Δ associées à ce problème

2) Dessiner les premières fonctions propres.

Solution : On cherche w, 2 fois dérivable sur $[0,L]$, t.q. $w \not\equiv 0$ sur $[0,L]$

vérifiant : DIRICHLET $w(0)=0$ et $w(L)=0$

et $\Delta w(x) = \lambda w(x)$ ici $\boxed{w''(x) = \lambda w(x)}$

Autrement dit on résout w t.q. $\begin{cases} w''(x) = \lambda w(x) \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases}$ et $w \not\equiv 0$

On cherche les solutions sous la forme e^{rt} avec $r \in \mathbb{C}$

si $w(x) = e^{rx}$ alors $w'(x) = re^{rx}$ et $w''(x) = r^2 e^{rx}$.

donc $w''(x) = \lambda w(x)$ pour tout $x \in [0,L]$ $\Leftrightarrow$ $r^2 e^{rx} = \lambda e^{rx}$

$\Leftrightarrow (r^2 - \lambda) e^{rx} = 0$ pour tout $x \in [0,L]$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{r^2 = \lambda}$ polynôme caractéristique

CAS 1 : si $\boxed{\lambda>0}$ $\quad r^2=\lambda \Rightarrow r_1=\sqrt{\lambda}$ ou $r_2=-\sqrt{\lambda}$

On a 2 solutions linéairement indépendantes e^{r_1x} et e^{r_2x} où $r_1=-r_2$

Dans ce cas là, les solutions w sont données par:

$w(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ et on calcule c_1 et c_2 grâce aux conditions aux bords:

- $w(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0$ càd $\boxed{c_1=-c_2}$

Donc $w(x)=c_1\left(e^{r_1x}-e^{-r_1x}\right)$

- $w(L)=0 \Rightarrow c_1\left(e^{r_1L}-e^{-r_1L}\right)=0$

soit $c_1=0$ alors $w\equiv 0$ PAS POSSIBLE on veut $w\not\equiv 0$

$e^{r_1L}=e^{-r_1L} \Rightarrow r_1L=-r_1L$
$\Rightarrow 2r_1L=0$ PAS POSSIBLE

$r_1>0$ $(\sqrt{\lambda})$ $\lambda>0$; $L>0$ $\neq 0$

le cas 1 n'a pas de solution

$\boxed{\text{CAS 2}}$: si $\boxed{\lambda=0}$ Dans ce cas: $w''(x)=0$

Donc: $w'(x)=c_1$

et $w(x)=c_1x+c_2$ et $c_2\in\mathbb{R}$ à déterminer et $\quad w(x) = c_1 x + c_2$, c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$ à déterminer

$w(0)=0 \Rightarrow c_2 = 0$ ainsi $w(x) = c_1 x$

$w(L) = 0 \Rightarrow c_1 L = 0$ ↗ $c_1 = 0$ mais alors $w \equiv 0$ PAS POSSIBLE
↘ $L = 0$ pas possible car $L>0$

le cas $\lambda = 0$ n'a pas de solution

CAS 3 $\boxed{\text{si } \lambda < 0}$ on a alors $r^2 = \lambda$ qui s'écrit $r^2 = -|\lambda|$
$= i^2 |\lambda|$

dans ce cas $r_1 = i\sqrt{|\lambda|}$ et $r_2 = -i\sqrt{|\lambda|}$ càd $r_1 = \bar{r_2}$

Rappel : si $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$: $w(x)\ c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$
↳ on peut se ramener à :
$w(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$

ici $\alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{|\lambda|}$

donc : $w(x) = c_1 \cos(x\sqrt{|\lambda|}) + c_2 \sin(x\sqrt{|\lambda|})$

Calcul de c_1 et c_2 :

$w(0) = 0 \Rightarrow c_1 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

Par conséquent $w(x) = c_2 \sin(x\sqrt{|\lambda|})$

et $w(L) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(L\sqrt{|\lambda|}) = 0$ ↗ $c_2 = 0 \Rightarrow w \equiv 0$ PAS POSSIBLE
↘ $\sin(L.\sqrt{|\lambda|}) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{L\sqrt{|\lambda|}}_{>0} = \underbrace{k\pi}_{>0}$, $k \in \mathbb{Z}$

car $L > 0$ $|\lambda| > 0$ → $\boxed{k \in \mathbb{N}^*}$

$\Rightarrow \sqrt{|\lambda|} = \frac{k\pi}{L}$

donc $|\lambda| = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ et ainsi $\boxed{\lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad k \in \mathbb{N}^*}$

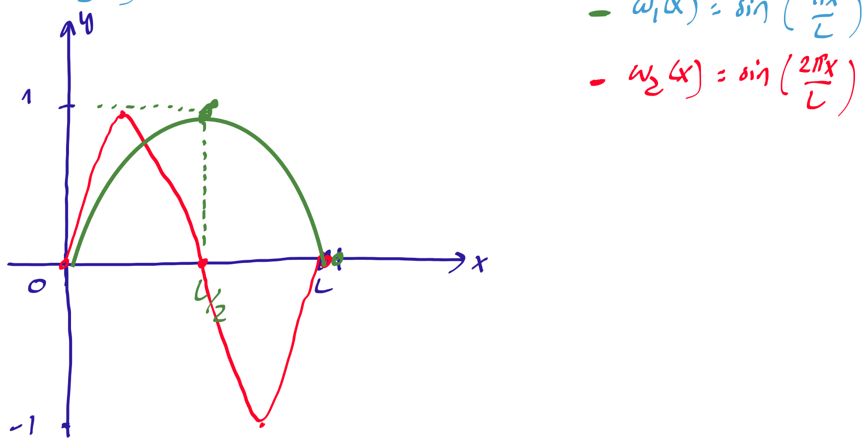
et $w(x) = c_2 \sin\left(x . \frac{k\pi}{L}\right)$
$= c_2 \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ mais comme w est défini à une constante multiplicative près on prend $c_2 = 1$

Conclusion : les fonctions propres de Δ sur $[0, L]$ avec les conditions de Dirichlet homogènes sont $w_n(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{}\right.$

homogènes sont $w_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$

de valeurs props. associées $\lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}^*$

Traçons $w_1(x)$ et $w_2(x)$



Remarque : $k \in \mathbb{N}^*$ est appelé la fréquence des oscillations de w_k

Exercice : mêmes questions mais avec NEUMANN

Solution

On cherche les fcts w deux fois dér. sur $[0,L]$, $w \neq 0$, vérifiant : $w'(0) = w'(L) = 0$. et $w''(x) = \lambda w(x)$.

On cherche les solutions de la forme $w(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$

$w'(x) = re^{rx}$ et $w''(x) = r^2 e^{rx}$.

et donc $w''(x) = \lambda w(x)$ s'écrit :

$$r^2 e^{rx} = \lambda e^{rx} \quad , \forall x \in [0,L]$$

Donc, $r^2 = \lambda$

CAS N° 1 : $\lambda > 0$.

$r^2 = \lambda \Rightarrow r_1 = \sqrt{\lambda}$ et $r_2 = -\sqrt{\lambda}$.

$w(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

Cds de Neumann, $w'(0) = w'(L) = 0$.

$w'(x) = C_1 r_1 e^{r_1 x} + C_2 r_2 e^{r_2 x}$. $\boxed{r_2 = -r_1}$

$w'(0) = C_1 r_1 \quad C_2 r_1 = 0 \Rightarrow r_1 (C_1 - C_2) = 0$

$w'(0) = C_1 r_1 - C_2 r_1 = 0 \Rightarrow r_1(C_1 - C_2) = 0$

$r_1 = 0$ imp. car $\lambda > 0$

$C_1 = C_2$

Si $C_1 = C_2$, $w(x) = C_1 e^{r_1 x} - C_1 e^{-r_1 x}$

$w'(L) = C_1 r_1 e^{r_1 L} - C_1 r_1 e^{-r_1 L} = C_1 r_1 (e^{r_1 L} - e^{-r_1 L}) = 0$

$C_1 = 0$ imp. $w \neq 0$

$r_1 = 0 \Rightarrow \lambda > 0$

$e^{r_1 L} = e^{-r_1 L}$

$\Downarrow$

$r_1 L = -r_1 L$

$\Downarrow$

$2 r_1 L = 0$

$r_1 = 0 \Rightarrow \lambda > 0$

$L = 0 \Rightarrow$ imp $L > 0$

C/C : cas n°1 n'a pas de solution.

Cas 2 : $\lambda = 0$ $\quad w(x) = c_1 x + c_2 \quad w'(x) = c_1$

$w'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

D'où $w(x) = c_2$, $w'(x) = 0$. D'où $w'(L) = 0$

On peut prendre $w(x) = 1$, $\forall x \in [0, L]$

Cas $\lambda < 0$:

$r^2 = \lambda$ avec $\lambda < 0$ donc $r = i\sqrt{|\lambda|}$ ou $-i\sqrt{|\lambda|}$

on a donc $w(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$

avec $\alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{|\lambda|}$ donc $w(x) = c_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}\,x)$
$+ c_2 \sin(x\sqrt{|\lambda|})$

$w'(x) = -c_1 \sqrt{|\lambda|} \sin\left(x \sqrt{|\lambda|}\right) + c_2 \sqrt{|\lambda|} \cos\left(x \sqrt{|\lambda|}\right)$

$w'(0) = 0 \iff c_2 \underbrace{\sqrt{|\lambda|}}_{>0} = 0$ donc $c_2 = 0$

$w(x) = c_1 \cos\left(x\sqrt{|\lambda|}\right)$ et $w'(x) = -c_1 \sqrt{|\lambda|} \sin\left(x \sqrt{|\lambda|}\right)$

$w'(L) = 0 \iff -c_1 \underbrace{\sqrt{|\lambda|}}_{>0} \sin\left(L \sqrt{|\lambda|}\right) = 0$

$\to c_1 = 0 \Rightarrow w \equiv 0$ imp

$\to \sin\left(L \sqrt{|\lambda|}\right) = 0 \quad (1)$

(1) $\sin\left(L \sqrt{|\lambda|}\right) = 0 \iff \sqrt{|\lambda|} = \frac{k\pi}{L}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

d'où $\lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

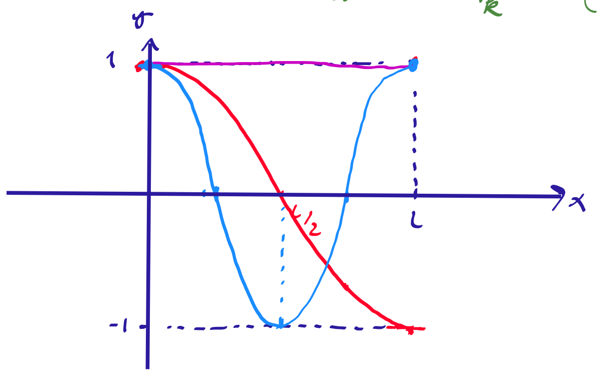
d'où $w(x) = c_1 \cos\left(x \frac{k\pi}{L}\right)$ avec $c_1 = 1$

<u>Conclusion</u>: si $\lambda = 0$ $\quad w(x) = 1$

si $\lambda < 0$ $\quad w(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad k \in \mathbb{N}^*$

que l'on peut résumer par : $\boxed{w_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad k \in \mathbb{N}}$

avec $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad k \in \mathbb{N}$



$k = 0 \quad w_0(x) = 1$

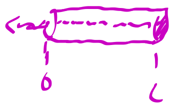
$k = 1 \quad w_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$k = 2 \quad w_2(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

<u>Exercice :</u> Calculer les fonctions propres w sur $[0,L]$ de l'opérateur Δ

avec : $w(0) = 0$ DIRICHLET

$w'(L) = 0$ NEUMANN



c. <u>Résolution de l'équation de diffusion</u>

(i) Si la condition initiale est une fonction propre de Δ (satisfaisant les conditions aux bords)

On suppose donc que : $u(0,x) = w_k(x)$ $k \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$

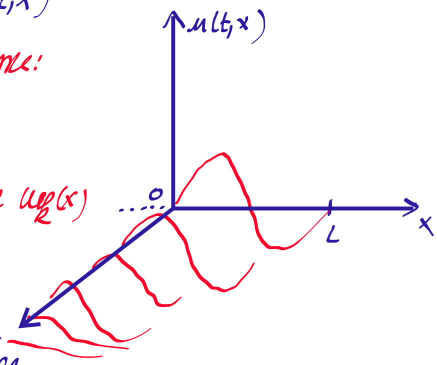
Neumann / DIRICHLET

dans ce cas : $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d\,\Delta u(t,x)$

on cherche alors les solutions sous la forme :

$u(t,x) = \alpha(t) . w_k(x)$

car le Laplacien ne changera pas la forme de $w_k(x)$
l'équation l'amplifiera ou la réduira au cours du temps grâce au facteur $\alpha(t)$



c'est la méthode de séparation des variables.

On remplace alors $u(t,x)$ par $\alpha(t)\,w_k(x)$ dans l'équation :
on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)\,w_k(x)\right) = d\;\Delta\left(\alpha(t)\,w_k(x)\right)$$

ce qui donne : $w_k(x) . \alpha'(t) = d . \alpha(t)\,\Delta w_k(x)$

qui donne: $\quad w_k(x) \cdot \alpha'(t) = d \cdot \alpha(t) \Delta w_k(x)$

$$= d\, \alpha(t)\, \lambda_k\, w_k(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha'(t) - d.\lambda_k \alpha(t)\right) \underbrace{w_k(x)}_{\not\equiv 0} = 0 \quad \underline{\forall x \in [0,L]}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha'(t) = d \lambda_k \alpha(t)$$

On obtient $\alpha(t) = \alpha(0)\, e^{d\lambda_k t}$

Conclusion: $\boxed{u(t,x) = \alpha(0)\, e^{d\lambda_k t} w_k(x)}$ $\qquad \alpha(0) = 1$

$$u(0,x) = \alpha(0)\, 1.\, w_k(x)$$
$$\hookrightarrow c.i \quad = w_k(x)$$

Donc $\quad u(t,x) = \underbrace{e}_{>0}^{\overbrace{d}^{}\lambda_k t}\underbrace{w_k(x)}_{\text{indep de } t \text{ borné}} \xrightarrow[t \to +\infty]{}$

$\nearrow$ $\underline{\text{Dirichlet}}$ $\lambda_k < 0$ $\underline{\forall k}$ $\quad u(t,x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$\searrow$ Neumann: si $k \neq 0 \quad u(t,x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

si $k = 0 \quad u(t,x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$

($d \leq 0$?) ≤ 0

4 décembre 2023

correction de l'exercice : fonctions propres de Δ pour $w(0)=0$ & $w'(L)=0$ sur $[0,L]$, $L>0$

- On cherche à résoudre une équation différentielle

$$\begin{cases} w''(x) = \lambda w(x) \\ w'(L) = 0 \\ w(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et } w \neq 0$$

On a que $w(x) = e^{Rx}$ et donc $w'(x) = Re^{Rx}$ et donc $w''(x) = R^2 e^{Rx}$ ceci nous ramène à $R^2 = \lambda$.

<u>Cas 1</u> : $\lambda > 0$, $R^2 = \lambda$, $R_1 = -\sqrt{\lambda}$ et $R_2 = \sqrt{\lambda}$

on a deux solution indé $e^{R_1 x}$ et $e^{R_2 x}$ où $R_1 = -R_2$

Les solutions w sont données par $w(x) = c_1 e^{R_1 x} + c_2 e^{R_2 x}$ où c_1 et c_2 sont données grâce aux conditions aux bords

$w(0) = 0 \iff c_1 + c_2 = 0$ donc $c_1 = -c_2$ avec $c_1, c_2 \neq 0$

$w'(L) = 0$ et $w'(x) = c_1 R_1 e^{R_1 x} + c_2 R_2 e^{R_2 x}$

donc : $w'(L) = c_1 R_1 e^{R_1 L} + c_1 R_1 e^{-R_1 L} = 0$

$\iff c_1 R_1 (e^{R_1 L} + e^{-R_1 L}) = 0$ $\quad$ $c_1 \neq 0$, $R_1 \neq 0$

donc : $e^{R_1 L} + e^{-R_1 L} = 0$

$e^{R_1 L} = -e^{-R_1 L}$

$e^{R_1 L}$ $\quad$ $2R_1 L$

$$\frac{e^{k_1 L}}{e^{-k_1 L}} = -1 \iff e^{2k_1 L} = -1$$ donc pas possible !?!

Ca marche pas

Cas 2 : $\lambda = 0$ On a $w''(x) = 0$

donc $w'(x) = c_1$

et $w(x) = c_1 x + c_2$

On cherche c_1 et c_2

· $w(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ donc $w(x) = c_1 x$

$\Rightarrow w'(x) = c_1$

· $w'(L) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ Impossible car $w \neq 0$

* Cas 3 : $\lambda < 0$

$R^2 = i\,|\lambda|$ donc $R_1 = i\sqrt{|\lambda|}$ et $R_2 = \overline{R_1}$

Donc $w(x) = c_1 \cos(x\sqrt{|\lambda|}) + c_2 \sin(x\sqrt{|\lambda|})$

Calcul de c_1 et c_2 :

* $w(0) = 0$ ce qui nous donne $c_1 + 0 = 0$ donc $c_1 = 0$

D'où $w(x) = c_2 \sin(x\sqrt{|\lambda|})$.

* $w'(L) = 0$

$w'(L) = c_2\sqrt{|\lambda|}\cos(L\sqrt{|\lambda|}) = 0 \rightarrow c_2 = 0$ impossible

$\searrow |\lambda| = 0$ impossible.

$\downarrow$

$\cos(L\sqrt{|\lambda|}) = 0$

On va résoudre $\cos(L\sqrt{|\lambda|})$

On va résoudre $\cos(L\sqrt{|\lambda|}) = 0$

$$\cos(L\sqrt{|\lambda|}) = 0 \iff L\sqrt{|\lambda|} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow |\lambda| = \left((2k+1)\frac{\pi}{2L}\right)^2 \quad k \in \mathbb{Z}$$

On a en fait $k \in \mathbb{N}$ car si $k=0$ on a $|\lambda| = \frac{\pi}{L}$

car si $k=-1$ on a une contradiction

Conclusion:

Les fonctions propres sont $w_k(x) = \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2L}x\right), k \in \mathbb{N}$.

Avec les λ associées, $\lambda_k = -\left((2k+1)\frac{\pi}{2L}\right)^2$.

Retour au cours:

(ii) Cas où la condition initiale est la combinaison linéaire de 2 fonctions propres:

On considère ici $u(0,x) = \alpha_{k_1} w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} w_{k_2}(x)$, $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2} \in \mathbb{R}$

Par le principe de superposition, la solution est donnée par la combinaison de chacune des solutions où la condition initiale est une seule fonction propre.

Autrement dit: $u(t,x) = \alpha_{k_1} e^{d\lambda_{k_1} t} w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} e^{d\lambda_{k_2} t} w_{k_2}(x)$, $t \geq 0$ et $x \in [0,L]$

On peut donc généraliser ce résultat à une condition initiale qui est la combinaison linéaire de N fonctions propres.

On aurait alors: si $u(0,x) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_{k_j} w_{k_j}(x)$ alors

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_{k_j} e^{d\lambda_{k_j} t} w_{k_j}(x)$$

Exercice : On considère l'équation de la chaleur en 1D sur $[0,\pi]$ avec les conditions de Neumann homogènes

① Déterminer les fonctions propres et valeurs propres associées au Laplacien avec ces conditions

② Dessiner les 3 premières fonctions propres

③ On suppose que la condition initiale est $u(0,x) = 3 + 2\cos(x) + 5\cos(6x)$

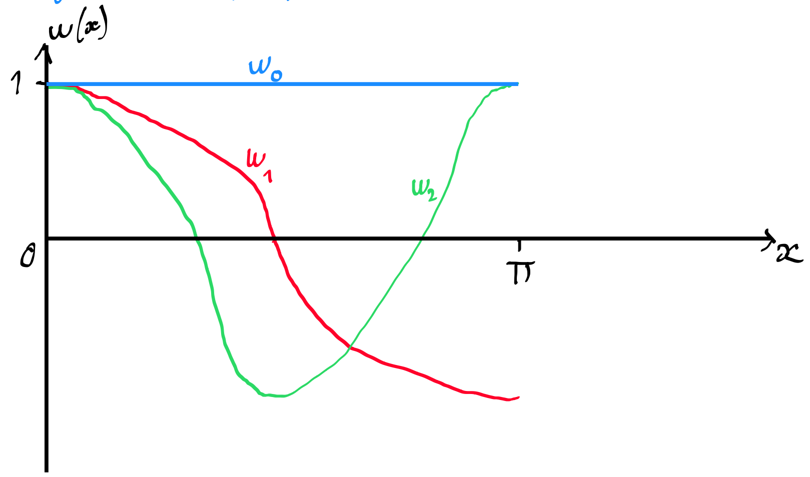
ⓐ Résoudre l'équation de la chaleur dans le cas où $\alpha = 1$

ⓑ Calculer $\lim_{t \to +\infty} u(t,x)$

Solution :

① Les fonctions propres sont $w_k(x) = \cos(kx)$, avec $\lambda_k = -k^2$ et $k \in \mathbb{N}$.

②



③ $u(0,x) = 3 + 2\cos(x) + 5\cos(6x)$ (CL de $\cos(kx)$ avec $k = 0, 1, 6$)

Par superposition, $u(t,x) = 3e^{-0^2 t} + 2e^{-1^2 t}\cos(x) + 5e^{-6^2 t}\cos(6x)$

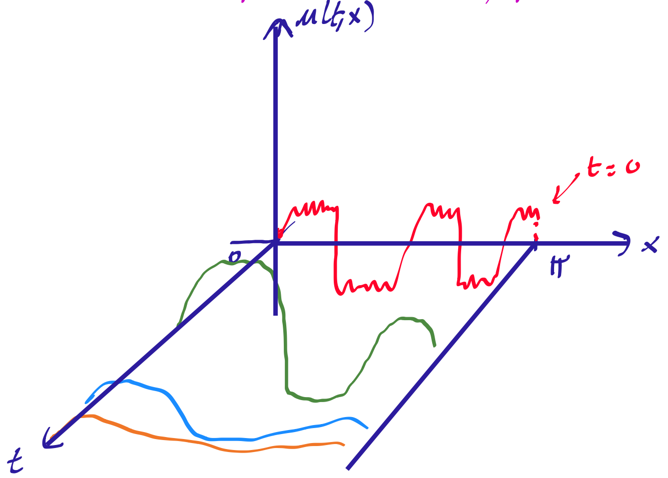
$= 3 + 2e^{-t}\cos(x) + 5e^{-36t}\cos(6x)$

Et $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 3$.

Remarque : on a ici $u(t,x) = 3 + 2e^{-t}\cos(x) + 5e^{-36t}\cos(6x)$

on rappelle que k est la fréquence des oscillations des fonctions propres

c'est à dire que plus k est grand, plus il y a d'oscillations



(iii) Cas où la condition initiale est "quelconque"

Si $u(0,x) = f(x)$ où f est a priori quelconque.

Cette idée est à la base de la théorie des séries de Fourier

Ici sur $[0,L]$:

Définition : Toute fonction f, L-périodique et de carré intégrable sur $[0,L]$ se décompose comme une somme infinie de cosinus et de sinus

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

où les coefficients a_n et b_n sont appelés coef. de Fourier de f

et cette somme est appelée SÉRIE DE FOURIER

Remarques : ① Les coef. de Fourier d'une fonction f sont définis de manière unique (il existe des formules pour les calculer)

(il existe des formules pour les calculer)

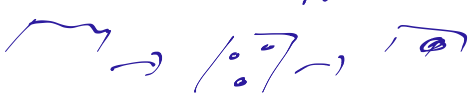
② En mathématiques, une somme infinie est appelée SERIE et elle est définie comme une limite de sommes finies. On doit alors étudier sa convergence.

La condition "f de carré intégrable sur $[0,L]$" assure ici cette convergence.

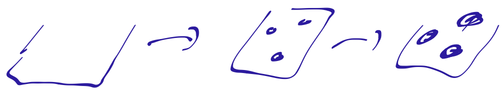
③ Si $u(0,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$

alors $u(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n e^{-d\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n e^{-d\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$

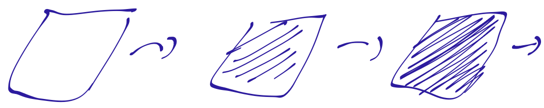
Remarque: pour les équations de diffusion, on se rend compte que quelle que soit la perturbation (la condition initiale), la solution en temps long s'aplatit. Il n'est donc pas possible de voir des formes émerger c'est à dire une amplification (non plate) d'une perturbation



émergence de forme



emergence de forme



perturbation "plate"

Pour en voir, Turing a considéré les systèmes de 2 équations de réaction-diffusion

2. Équations de réaction-diffusion

Un système de 2 équations de réaction-diffusion est de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = f(u(t,x), v(t,x)) + d_u \Delta u(t,x) \\ \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) = g(u(t,x), v(t,x)) + d_v \Delta v(t,x) \end{cases} \qquad d_u, d_v \in \mathbb{R}_+$$

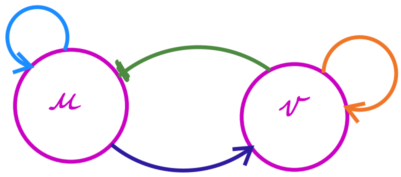
. Il y a 2 quantités qui se diffusent : u et v

. Les fonctions f et g constituent la partie <u>réaction</u> du modèle. Elles décrivent le bilan entre la production (ou l'activation) et la destruction (ou inhibition) de u et v

le bilan entre la production (ou l'activation) et la destruction (ou inhibition) de u et v

exemple :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = 2u(t,x) - v(t,x) + d_u \Delta u(t,x) \\ \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) = v(t,x) + \frac{1}{2} u(t,x) + d_v \Delta v(t,x) \end{cases}$$



Pour étudier ce type de modèle, il faut se ramener à l'émergence de forme à partir d'une perturbation d'un équilibre. Il faut donc étudier : 1 les équilibres, 2 leur stabilité 3 s'intéresser à ceux qui sont instables

Pour ça commençons par l'étude d'une seule équation

a. Une équation de reaction-diffusion

On considère l'equation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = f(u(t,x)) + d\Delta u(t,x) \quad (E)$$

(i) Cherchons les equilibres homogènes de (E). Ce sont des constantes (solutions stationnaires (indépendantes du temps) et homogènes en espace (constante en espace))

On les note u_0. u_0 verifie $\frac{\partial}{\partial t} u_0 = 0$ et $\Delta u_0 = 0$

Ainsi $\frac{\partial}{\partial t} u_0 = f(u_0) + d\Delta u_0$ s'écrit $\boxed{0 = f(u_0)}$ (les u_0 sont les racines de f)

(ii) Etudions la stabilité de u_0:

pour ça on perturbe l'equilibre : on note u_p une "petite" perturbation de u_0.

et $u = u_0 + u_p$ on remplace u par $u_0 + u_p$ dans (E)

on obtient : $\frac{\partial}{\partial t} (\underset{c^{te}}{\underset{\wr\!\wr}{u_0}} + u_p(t,x)) = f(u_0 + u_p(t,x)) + d\Delta(\underset{c^{te}}{\underset{\wr\!\wr}{u_0}} + u_p(t,x))$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u_p(t,x) = \underbrace{f(u_0 + u_p(t,x))}_{} + d\Delta u_p(t,x)$$

terme non linéaire → à linéariser autour de u_0

$$f(u_0 + u_p) \simeq \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(u_0)}} + f'(u_0)u_p$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_p \simeq f'(u_0)u_p + d\Delta u_p$$

∂t

Comment résoudre cette équation ?

On suppose que $u_p(0,x)$ est une fonction propre et on utilise la méthode de séparation des variables : on obtient pour $u_p(0,x) = w_k(x)$

et $u_p(t,x) = \alpha(t) w_k(x)$

Dans l'équation linéarisée on remplace u_p :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t) w_k(x)\right) = \underbrace{f'(u_0)}_{\text{connu } (\in \mathbb{R})} \alpha(t) w_k(x) + d \Delta\, \alpha(t) w_k(x)$$

(on a calculé u_0 et f est donnée dans l'énoncé)

$$\cancel{w_k(x)}\, \alpha'(t) = f'(u_0)\alpha(t) w_k(x) + d\,\alpha(t)\,\Delta w_k(x)$$

$$= f'(u_0)\alpha(t)\cancel{w_k(x)} + d.\lambda_k\,\alpha(t)\cancel{w_k(x)}$$

$\Delta w_k = \lambda_k w_k$ pour tout $t \geq 0$ et " " $x \geq 0$

on a alors $\alpha'(t) = f'(u_0)\alpha(t) + d\lambda_k\,\alpha(t)$

$\alpha'(t) = \left(f'(u_0) + d\lambda_k\right)\alpha(t)$

donc $\alpha(t) = \alpha(0)\, e^{(f'(u_0) + d\underbrace{\lambda_k}_{\leq 0})t}$

Les solutions u_p sont donc : $u_p(t,x) = \alpha(0)\, e^{(f'(u_0)+d\lambda_k)t}\, w_k(x)$ avec $\alpha(0) = 1$

si $f'(u_0) + d\lambda_k < 0$: $u_p(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et donc u_0 est L.A.S.

si $\qquad > 0$ u_0 est instable

Exercice : On considère l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \underbrace{u(t,x)(1-u(t,x))}_{\text{terme logistique}} + 2\Delta u(t,x)$$ Equation de FISHER

sur $[0,\pi]$ avec des conditions de Neumann homogène.

1) Determiner les equilibres de cette équations

2) Etudier leur stabilité

Solution : 1) Les equilibres u_0 vérifient $f(u_0)=0$ où f ici est définie par $f(u) = u(1-u) = u - u^2$

donc $f(u_0) = 0 \Leftrightarrow u_0(1-u_0)=0$

$\Leftrightarrow u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$; il y a 2 equilibres possibles

2) Stabilité :

pour $\boxed{u_0 = 0}$ calculons le signe de $f'(u_0) + d\lambda_k$ où $d=2$

$\lambda_k = -k^2$ (Neumann sur $[0,\pi]$)
$k \in \mathbb{N}$

et $f'(u) = 1-2u$ donc $f'(0)=1$

Ici $f'(u_0)+d\lambda_k = 1-2k^2$, or $1-2k^2<0$, $k\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow 1 < 2k^2$

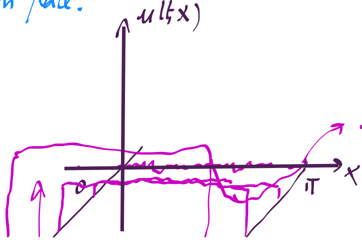
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < k^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < k$ vrai si $k \in \mathbb{N}^*$

et si $k=0$ $f'(u_0)+d\lambda_k = 1 > 0$ $u(0,x) = w_0(x)$

donc : si la frequence de la perturbation est nulle (ou si par le principe de superposition elle contient la frequence nulle) ou $u(0,x) = \underline{\underline{\alpha_0(x)}} + \alpha_{k_1}w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2}w_{k_2}(x) + \dots$

alors l'equilibre 0 est perturbé. On aura alors l'emergence de w_0 qui sera une perturbation de frequence nulle (au bout d'un temps grand) c'est à dire une perturbation plate :



$t=0$ on perturbe $0 = u_0$ et cette perturbation contient $w_0(x) = \cos(0x) = 1$

la seule emergence de forme ici est la forme <u>flate</u> (uniforme) : pas d'interet pour nous (qui recherchons des tâches ou des zèbres)

si $k\in\mathbb{N}^*$ $u_p \to 0$ pour toute frequence k (alors $u_0=0$ est L.A.S pour $k\in\mathbb{N}^*$)

pour $\boxed{u_0=1}$ $\quad f'(u_0) + d\lambda_k = f'(1) + 2(-(k)^2)$, $k\in\mathbb{N}$ $\qquad f'(u) = 1-2u$, $\quad f'(1) = -1$

$$= -1 - 2k^2$$

$$= -(\underbrace{1+2k^2}_{>0}) < 0 \quad \text{pour tout } k$$

Donc pour n'importe quelle frequence $k\in\mathbb{N}$, $u_p(t,x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $u_0=1$ est LAS.

On peut généraliser ce résultat :

lorsqu'on a <u>une</u> équation de réaction-diffusion sur $[0,L]$ $\frac{\partial}{\partial t} u = f(u) + d \Delta u$

la seule perturbation qui peut destabiliser un équilibre u_0 est celle de fréquence 0, c'est à dire la fréquence <u>plate</u>. qui n'a pas d'intérêt pour notre problème

D'où le passage à l'étude d'un système de 2 équations de réaction-diffusion

b. <u>Système de 2 équations de réaction-diffusion</u>

On considère le système suivant
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = f(u,v) + d_u \Delta u \\ \frac{\partial}{\partial t} v = g(u,v) + d_v \Delta v \end{cases}$$

On écrit ce problème sous forme vectorielle : on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} + D . \Delta . \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{où } D = \begin{pmatrix} d_u & 0 \\ 0 & d_v \end{pmatrix}$$

Etudions ce système.

(i) Recher des équilibres : ils vérifient $\begin{cases} f(u_0, v_0) = 0 \\ g(u_0, v_0) = 0 \end{cases}$ <u>et</u>

(ii) Etude de leur stabilité

(ii) Etude de leur stabilité.

On perturbe l'équilibre $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$ on pose $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$

b