4 décembre 2023.

On a $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ équilibre du système $\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} + D \cdot \Delta \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

on pose $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$ une perturbation locale de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ et on pose : $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$

on remplace dans le système :

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_0 + u_p \\ v_0 + v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u_0+u_p, v_0+v_p) \\ g(u_0+u_p, v_0+v_p) \end{pmatrix} + D\Delta \begin{pmatrix} u_0+u_p \\ v_0+v_p \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \quad '' \quad + D\,\Delta \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$$

On linéarise ce système autour de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = J_{(f,g)}(u_0,v_0)\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + D\,\Delta\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} \quad \text{où } J_{(f,g)}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f(u_0,v_0) & \frac{\partial}{\partial v} f(u_0,v_0) \\ \frac{\partial}{\partial u} g(u_0,v_0) & \frac{\partial}{\partial v} g(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

matrice Jacobienne de (f,g) en (u_0,v_0)
par abus on la note J

On considère que la condition initiale est une fonction propre : $\begin{pmatrix} u_p(0,x) \\ v_p(0,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \cdot w_k(x)$

et on résout le système linéarisé par la méthode de séparation des variables en posant

$$\begin{pmatrix} u_p(t,x) \\ v_p(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t)\, w_k(x) \\ \beta(t)\, w_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_k(x)$$

et on remplace dans le système :

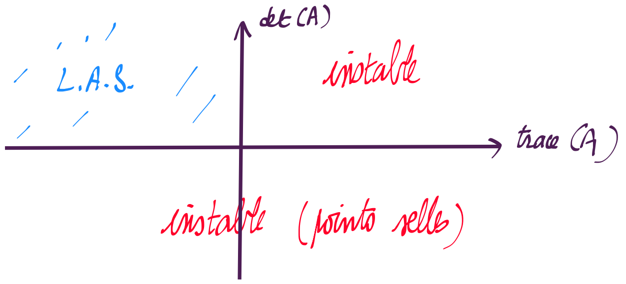
$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_k(x) = J.\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_k(x) + D.\Delta\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_k(x)$$

on obtient :

$$\cancel{w_k(x)}\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}\cancel{w_k(x)} + D.\lambda_k\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}\cancel{w_k(x)}$$

on obtient $\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\left(J + D\lambda_k\right)}_{A}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$

si $\begin{matrix} \alpha(t) \to 0 \\ \beta(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \end{matrix}$ alors $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ est L.A.S.



$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ est L.A.S ssi $tr(A) < 0$ et $\det(A) > 0$

<u>Pour résumer :</u> on a le système $\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} + D\Delta\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$(g(u,v)$

① on cherche les equilibres

<u>Attention</u> → ② on vérifie que ces equilibres sont L.A.S quand il n'y a pas de diffusion

③ on cherche les frequences qui destabilisent les equilibres quand on rajoute de la diffusion

C'est pas toujours gagné. Mais il y a un critère qui permet déjà de donner une condition necessaire (mais pas suffisante) d'apparition de forme.

C'est ce qu'on appelle la règle des signes de Turing

11 décembre 2023 Règle des signes de Turing

attention : encore une fois, c'est une condition NÉCESSAIRE mais PAS SUFFISANTE pour avoir l'instabilité (structure de Turing)

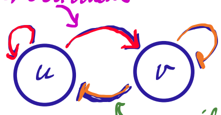
Règle : pour avoir l'instabilité des équilibres il faut que la Jacobienne $J_{(f,g)}(u_0,v_0)$ aient les coefficients de signes opposés sur les 2 diagonales :

c'est à dire : $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}$

Interprétation : $J_{(f,g)}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial}{\partial u}g(u_0,v_0) & \frac{\partial}{\partial v}g(u_0,v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

si on a : $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$

u est activateur



v inhibiteur

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u_p\\ v_p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_p\\ v_p\end{pmatrix} + D\Delta\begin{pmatrix}u_p\\ v_p\end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \underbrace{a_1 u_p}_{+} + \underbrace{a_2 v_p}_{-} + \dots \\ \underbrace{b_1 u_p}_{+} + \underbrace{b_2 v_p}_{-} + \dots \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) > 0$: u active sa propre production

u est alors auto-catalytique

mais $\frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0)$ est < 0 donc

v inhibe sa production

$\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) < 0$ = v inhibe la production de u

$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) > 0$: u active " " de v

ici u est ACTIVATEUR

v est INHIBITEUR

On appelle ces systèmes des systèmes ACTIVATEURS - INHIBITEURS

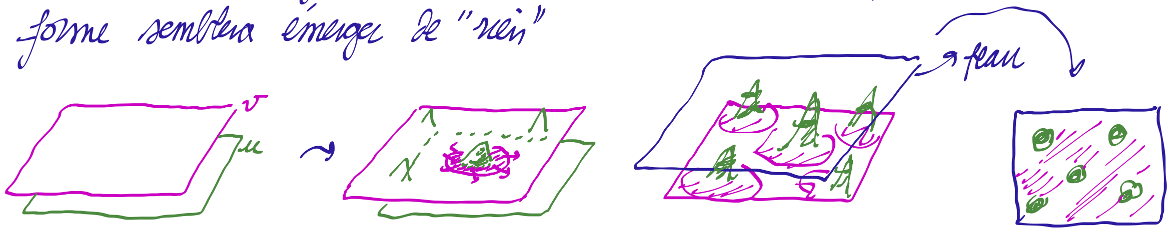
$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$ u est ACTIVATEUR - v INHIBITEUR

$\begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}$ v est ACTIVATEUR - u INHIBITEUR

Mais comme c'est une condition nécessaire, il faut trouver d'autres conditions pour obtenir les structures de Turing

Turing a montré que pour un système activateur-inhibiteur (qui vérifie la règle des signes) avec par exemple u l'activateur

si $\boxed{\dfrac{d_v}{d_u}}$ ($d_u, d_v > 0$ coef. de diffusion) est "ASSEZ GRAND" et si le domaine Ω est également "assez GRAND" alors l'équilibre homogène $\binom{u_0}{v_0}$ devient instable par rapport à une fonction propre w_k (de fréquence k) et alors une forme semblera émerger de "rien"



Exercice 1: On considère le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = 2\,u(t,x) - v(t,x) + d_u \Delta u(t,x) \\ \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) = v(t,x) + \frac{1}{2} u(t,x) + d_v \Delta v(t,x) \end{cases}$$

Est-ce que ce système est activateur-inhibiteur ? (Autrement dit vérifie-t-il la règle des signes de Turing ?)

Le système ici est linéaire donc, avec une perturbation autour de l'équilibre $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (seul équilibre possible) on aurait: $J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ de la forme $\begin{pmatrix} + & - \\ + & + \end{pmatrix}$

de même signe sur la diagonale

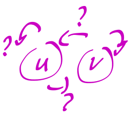
→ conclusion: ce système ne vérifie pas la règle des signes de Turing → aucune chance de voir apparaître des structures de Turing

__Exercice 2__ On considère le système suivant : pour tout $t \geq 0$ et $x \in [0,\pi]$ $(L=\pi)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{u^2(t,x)}{v(t,x)} - u(t,x) + d_u \Delta u(t,x) \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) = u^2(t,x) - 2v(t,x) + d_v \Delta v(t,x) \end{cases}$$

__MEINHARDT__

(on cherche $u(t,x) \geq 0$, $v(t,x) \geq 0$ (population / espèce chimique))

1. Quels sont les termes de réaction et de diffusion de ce système ?
2. Ce système est-il linéaire ou non ?
3. Donner une interprétation à l'aide d'un diagramme ?  ?
4. Déterminer les équilibres de ce système
5. Ce système vérifie-t-il la règle des signes de Turing aux équilibres ?
6. Calculer la stabilité des équilibres en l'absence de diffusion
7. On considère les conditions aux bords de Neumann homogène et $d_u = \frac{1}{10}$
   a. Calculer la stabilité des équilibres pour $d_v = \frac{1}{10}$
   b. " " " $d_v = \frac{2}{10}$
   c. $d_v = \frac{12}{10}$
8. Ce système peut-il faire apparaître des structures de Turing ? Si oui, lesquelles ? Les dessiner

Solution :

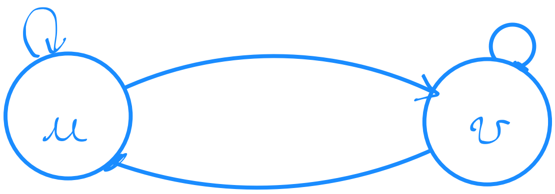
1. Les termes de réaction sont : $\dfrac{u^2(t,x)}{v(t,x)} - u(t,x)$

et $u^2(t,x) - 2v(t,x)$

Les termes de diffusion sont : $d_u \Delta u(t,x)$ et $d_v \Delta v(t,x)$

2. Ce système n'est pas linéaire (notamment à cause des termes en u^2)

3.



4. On pose $f(u,v) = \frac{u^2}{v} - u$ où $u \in \mathbb{R}^+$, $v \in \mathbb{R}^+_*$

$g(u,v) = u^2 - 2v$

Les équilibres vérifient $\begin{cases} f(u_0, v_0) = 0 \\ g(u_0, v_0) = 0 \end{cases}$

On a donc:

$$\begin{cases} \frac{u_0^2}{v_0} - u_0 = 0 \\ u_0^2 - 2v_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 - u_0 = 0 \\ v_0 = \frac{u_0^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

On a donc un unique équilibre $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. Pour vérifier la règle des signes de Turing, on va regarder $J_{(f,g)}(u_0, v_0)$

$$J_{f,g}(u,v) = \begin{pmatrix} 2\frac{u}{v} - 1 & -\frac{u^2}{v^2} \\ 2u & -2 \end{pmatrix}$$

D'où $J_{f,g}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de la forme $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$

La règle des signes de Turing est bien vérifiée.

6) $\det(J_{(f,g)}(2,2)) = 2 \geq 0$

$Tr(J_{(f,g)}(2,2)) = -1 \leq 0$

Donc $(2,2)$ est un équilibre L.A.S. (sans diffusion)

7) On a $x \in [0, \pi]$ et C.B. de Neumann homogène.

On a $\lambda_k = -k^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Pour étudier la stabilité de $(2,2)$ avec diffusion, il faut calculer les signes de :

- la trace de $J + \lambda_k D$
- son déterminant

, où $J = J_{(f,g)}(2,2)$

Ici, $J + \lambda_k D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k^2/10 & 0 \\ 0 & -k^2 d_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - k^2/10 & -1 \\ 4 & -2 - k^2 d_v \end{pmatrix}$

• $Tr(J + \lambda_k D) = -1 - \underbrace{\left(\frac{1}{10} + d_v\right)}_{\geq 0} \underbrace{k^2}_{\geq 0} \leq 0$ (pour toute valeur de d_v)

• $\det(J + \lambda_k D) = \left(1 - \frac{k^2}{10}\right)\left(-2 - k^2 d_v\right) + 4$.

$-2 - k^2 d_v + \frac{k^2}{5} + \frac{k^4 d_v}{} + 4$

$$= -2 - k^2 d_v + \frac{k^2}{5} + \frac{k^4 d_v}{10} + 4$$

$$= \frac{d_v}{10} k^4 + \left(\frac{1}{5} - d_v\right) k^2 + 2$$

(a) Si $d_v = \frac{1}{10}$, on a $\det(J + \lambda_k D) = \frac{1}{100} k^4 + \frac{1}{10} k^2 + 2 \geq 0$

D'où $(2,2)$ est L.A.S pour $d_v = \frac{1}{10}$.

CONCLUSION : Il n'y aura pas d'émergence de formes.

b) Si $d_v = \frac{2}{10}$, on a $\det(J+\lambda_k D) = \frac{k^4}{50} + 2 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

D'où $(2,2)$ est LAS pour $d_v = \frac{2}{10}$.

CONCLUSION : Il n'y aura pas d'emergence de formes.

c) Si $d_v = \frac{12}{10}$, on pose $z = k^2$, on a :

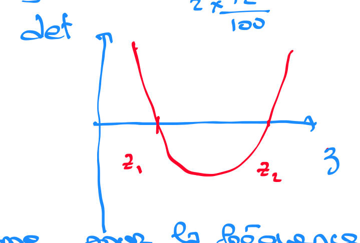
$$\det(J+\lambda_k D) = \frac{12}{100} z^2 - z + 2$$

Calculons le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{12}{100} \times 2 = \frac{1}{25}$

On a deux racines réelles : $z_1 = \dfrac{1-\frac{1}{5}}{2\times\frac{12}{100}} = \frac{10}{3}$ et $z_2 = \dfrac{1+\frac{1}{5}}{2\times\frac{12}{100}} = 5$

Or on cherche les valeurs $k \in \mathbb{N}$ tel que

$\det(J+\lambda_k D) < 0$ c-à-d $k^2 \in [z_1, z_2]$



Donc $k^2 = 4 \Rightarrow \boxed{k=2}$

Conclusion : il y aura l'emergence de forme pour la fréquence $k=2$.

8) D'après le 7.c. il est possible de déterminer une fréquence qui permettra de la faire émerger une forme de Turing.

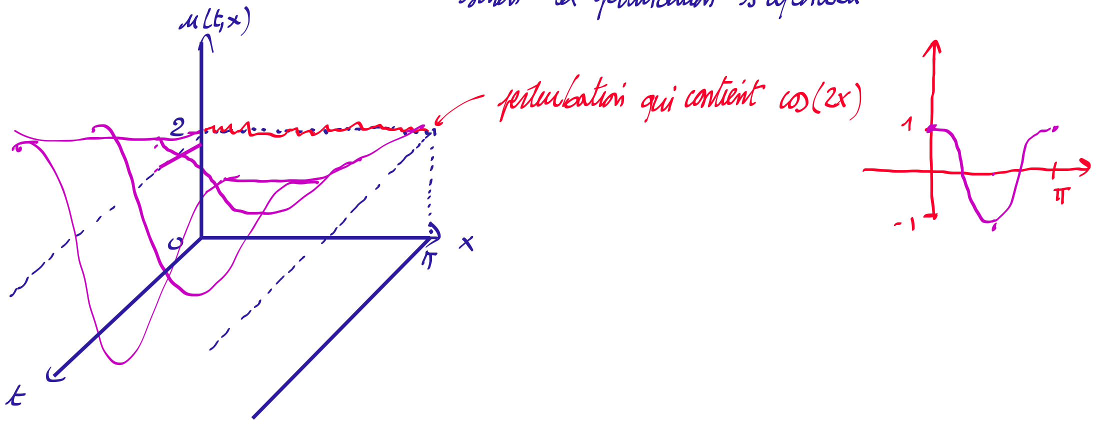
Dans le cas de 7.c. cette fréquence est $\boxed{k=2}$, la fonction propre associée sera alors $w_2(x) = \cos(2x)$ $(x \in [0,\pi])$

associée sera alors $\omega_2(x) = \cos(2x) \quad (x \in [0,\pi])$

Autrement si une perturbation quelconque de condition initiale

$u_p(0,x) = 2 + \varphi(x)$ où φ est "suffisamment regulière" sur $[0,\pi]$ pour être decomposé en série de Fourier

et si $\varphi(x) = \sum \cos(kx)$ contient $\boxed{k=2}$ alors $\cos(2x)$ émergera suivi la perturbation s'aplatira



9. quelle est la valeur minimale de d_1 pour voir apparaître une emergence de forme

10. " " " d_2 " " " " " " avec 2 fréquences ?

11. Mêmes questions que 7 avec $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$, avec $x \in [0,2\pi]$, avec $[0,4\pi]$?