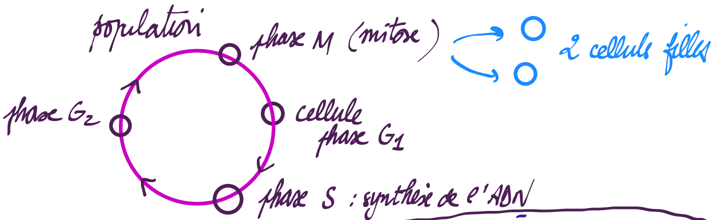
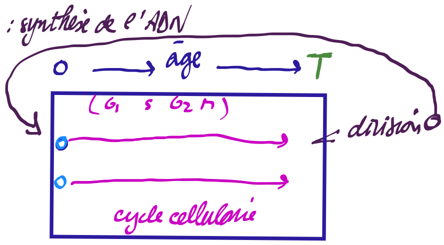
# Partie 2 : Equations hyperboliques (de type transport) et équations différentielles à retard

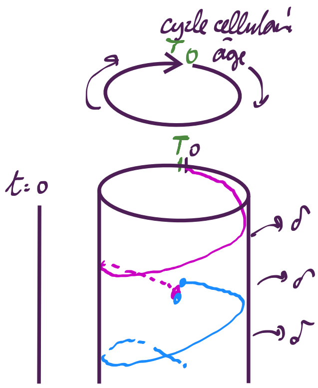
## I. Equations hyperboliques:

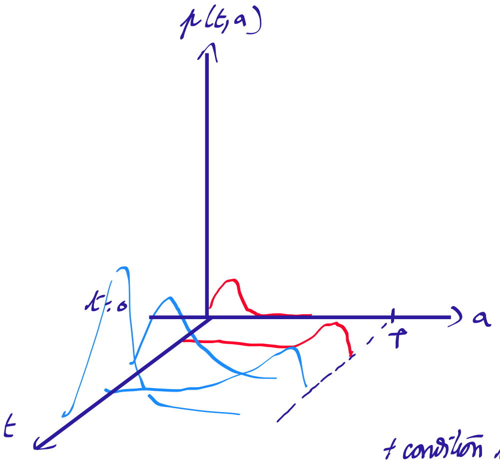
### 1. Application biologique: le cycle cellulaire

Le cycle cellulaire permet ici de donner un excellent exemple de dynamique de population




on note $p(t,a)$ : population de cellules au temps $t$ d'âge $a$

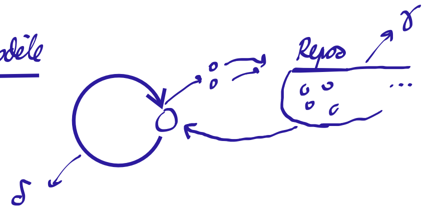
$\delta$ : taux de mortalité

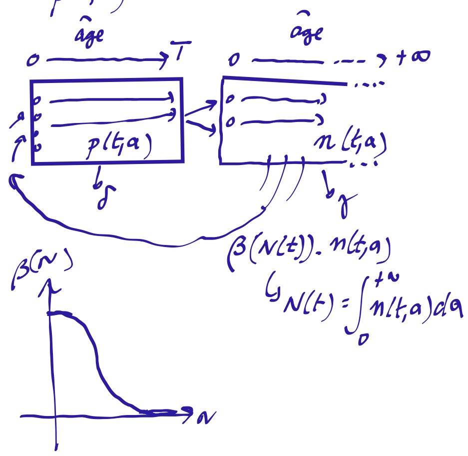
$$\frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} p(t,a) = -\delta p(t,a) \qquad t>0,\ a\in[0,T]$$

+ condition initiale $\quad p(0,a) = f(a) \quad , a\in[0,T]$

+ condition bord $\quad p(t,0) = 2p(t,T)$

**autre modèle**



Phase de proliferation: 12 décembre 2023

(1) $\frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} p(t,a) = -\delta\, p(t,a) \quad \forall t \geq 0,\ a \in [0,T]$,

Phase de Repos:

(2) $\frac{\partial}{\partial t} n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} n(t,a) = -\gamma\, n(t,a) - \beta(N(t)).\, n(t,a)$

$\forall t \geq 0,\ a \in [0,+\infty[$

Cdts aux Bords :

- $p(t,0) = \int_0^{+\infty} \beta(N(t)).\, n(t,a)\, da = \beta(N(t)).N(t)$.
- $n(t,0) = 2\, p(t,T)$.

condition initiale :

$p(0,a) = \varphi(a) \qquad a \in [0,T]$

$n(0,a) = \psi(a) \qquad a \in [0,+\infty[$

condition supplementaire : $\lim_{a \to +\infty} n(t,a) = 0$

<u>Question</u> : comment peut-on résoudre ce système ?

<u>méthode</u> : on intègre par rapport à l'âge les 2 équations (1) et (2)

(1) $\displaystyle\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} p(t,a)\right) da = \int_0^T -\delta p(t,a)\, da \qquad t \geq 0$

$\displaystyle\Leftrightarrow \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} p(t,a)\, da + \int_0^T \frac{\partial}{\partial a} p(t,a)\, da = -\delta \int_0^T p(t,a)\, da$ on pose $P(t) = \displaystyle\int_0^T p(t,a)\, da$

si p suffisamment régulier $\displaystyle\frac{\partial}{\partial t} \int_0^T p(t,a)\, da + p(t,T) - p(t,0) = -\delta P(t)$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{P'(t) + p(t,T) - p(t,0) = -\delta P(t)}$ (3)

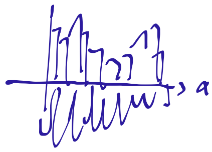
pour l'equation (2):

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t}n(t,a)+\frac{\partial}{\partial a}n(t,a)\right)da = -\int_0^{+\infty}\left(\gamma+\beta(N(t))\right)n(t,a)\,da$$

on obtient:

$$N'(t)+\underset{\overset{\parallel}{0}}{\lim_{a\to+\infty} n(t,a)} - n(t,0) = -\left(\gamma+\beta(N(t)\right).N(t)$$

il reste $\boxed{N'(t) - n(t,0) = -\left(\gamma+\beta(N(t)\right)N(t)}$ (4) $t\geq 0$



(3) $P'(t)+p(t,T)-p(t,0) = -\delta P(t)$

(4) $N'(t) - n(t,0) = -\left(\gamma+\beta(N(t)\right)N(t)$

or $p(t,0) = \beta(N(t)).N(t)$ et $n(t,0) = 2p(t,T)$

donc

donc

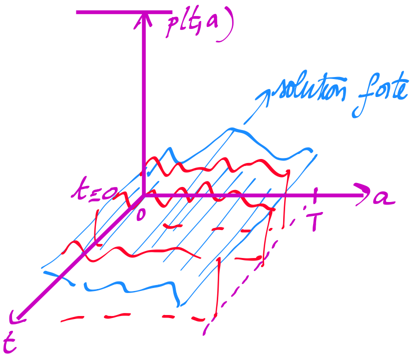
(3) s'écrit $\begin{cases} P'(t) + p(t,T) - \beta(N(t)).N(t) = -\delta P(t) \\ N'(t) - 2p(t,T) = -(\gamma + \beta(N(t)))N(t) \end{cases}$

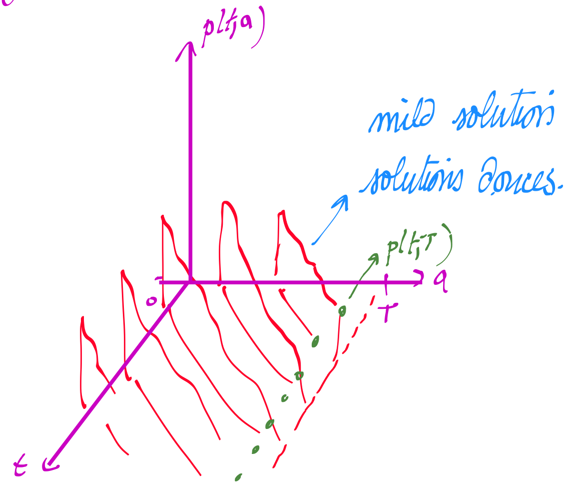
c'est à dire $\begin{aligned} P'(t) &= \beta(N(t)).N(t) - \delta P(t) - p(t,T) \\ N'(t) &= 2p(t,T) - (\gamma + \beta(N(t)))N(t) \end{aligned}$

Étape suivante : calculer $p(t,T)$ comment ?

On va calculer $p(t,T)$ grâce à la méthode des caractéristiques :

méthode :



Chercheons un lien entre a et t : (c'est ce qu'on appellera les courbes caractéristiques)

pour ça posons a qui dépend de t : $\boxed{a(t)}$

et on posons $w(t) = p(t, a(t))$

$$w'(t) = \frac{\partial}{\partial t} p(t, a) + a'(t) \frac{\partial}{\partial a} p(t, a)$$

$$\begin{array}{ccc} & p(t, a(t)) & \\ \frac{\partial}{\partial t} \swarrow & & \searrow \frac{\partial}{\partial a} \\ 1 = \frac{dt}{dt} \downarrow & & \downarrow \frac{da}{dt} = a'(t) \end{array}$$

$$1 \cdot \frac{\partial}{\partial t} p(t, a(t)) + a'(t) \frac{\partial}{\partial a} p(t, a)$$

tree diagram

on veut ensuite faire le lien avec l'équation (1)

qui est : $\frac{\partial}{\partial t} p(t, a) + 1 \frac{\partial}{\partial a} p(t, a) = -\delta p(t, a)$ } $w(t) = p(t, a)$

$$= -\delta w(t)$$

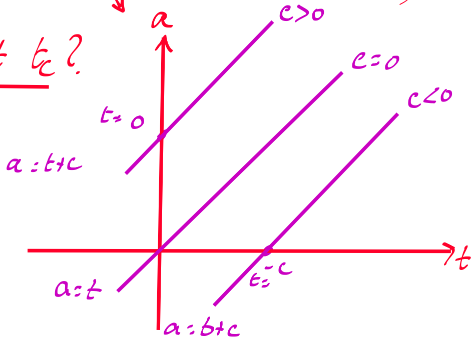
si $a'(t) = 1$ on aura : $w'(t) = -\delta w(t)$

si $a'(t)=1$ on aura : $W'(t) = -\delta W(t)$

$\hookrightarrow$ $\boxed{a = t+c}$ et $W'(t) = -\delta W(t)$ pour $t \geq t_c$

on a alors $W(t) = W(t_c)\, e^{-\delta(t-t_c)}$

Que vaut $t_c$ ?




$$t_c = \begin{cases} 0 & \text{si } c>0 \\ -c & \text{si } c<0 \end{cases}$$

$= \max\{0,-c\}$

CAS 1 : $\boxed{\text{si } c>0}$ alors $\boxed{t_c=0}$ et $W(t) = W(0)\,e^{-\delta t}$

$a = t+c$ donc $c = a-t > 0$

$a > t$

$$\downarrow$$

$$p(t,a) = p(0,a(0))\,e^{-\delta t}$$

$$\boxed{p(t,a) = p(0,a-t)\,e^{-\delta t}}$$

$a(0)=c$

$=$

$a = t+c$

$c = a-t$

CAS 2 : $\boxed{\text{si } c<0}$ alors $t_c = -c$ $\quad W(t) = W(-c)\,e^{-\delta(t+c)}$

$$\downarrow$$

$$p(t,a) = p(-c,a(-c))\,e^{-\delta \overbrace{(t+c)}^{a}}$$

$$\boxed{p(t,a) = p(t-a,0)\,e^{-\delta a}}$$

or $a = t+c$

$a(-c) = 0$

$-c = t-a$

Pour résumer :

$$p(t,a) = \begin{cases} p(0,a-t)\,e^{-\delta t} & \text{si } c>0 \quad (\text{si } a>t) \\ p(t-a,0)\,e^{-\delta a} & \text{si } c<0 \quad (\text{si } a<t) \end{cases}$$

comme nous allons étudier les solutions en temps long c'est à dire si $t \to +\infty$

on s'intéresse ici à $a<t$. c'est à dire le cas 2 :

autrement dit $p(t,a) = p(t-a,0)\,e^{-\delta a}$

et si $a=T$ : $\boxed{p(t,T)} = p(t-T,0)\,e^{-\delta T} = \boxed{\beta(N(t-T)).N(t-T)\,e^{-\delta T}}$ pour $t$ suffisamment grand

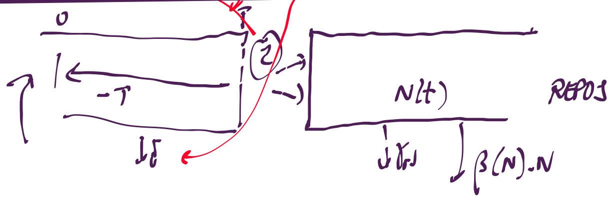
Conclusion : on avait :

$$\begin{cases} P'(t) = \beta(N(t))N(t) - \delta P(t) - p(t,T) \\ N'(t) = 2p(t,T) - (\gamma + \beta(N(t))N(t)) \end{cases}$$

en remplaçant $p(t,T)$ ( avec $t$ suffisamment grand ) on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} P'(t) &= \beta(N(t))N(t) - \delta P(t) - \beta(N(t-T)).N(t-T)\,e^{-\delta T} \\ N'(t) &= 2\beta(N(t-T))N(t-T)\,e^{-\delta T} - (\gamma + \beta(N(t))\,N(t)) \end{aligned}}$$

$$\boxed{(t) = 2\beta(N(t-\tau))N(t-\tau)e^{-\delta\tau} - (\delta+\beta(N(t)))N(t)}$$




<u>Rappel</u> : d'où vient le terme : $\frac{\partial}{\partial t}p(t,a) + \frac{\partial}{\partial a}p(t,a)$ ?

<u>Réponse</u> : Quand on étudie une population $p(t,a)$ d'âge $a$ au temps $t$ l'équation qui régit la dynamique de cette population s'écrit en général :

$$Dp(t,a) = -\delta\, p(t,a)$$

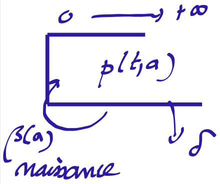
différentielle

avec

$$p(0,a) = f(a)$$

taux de naissance

$$p(t,0) = \int_0^{+\infty} \beta(a)\, p(t,a)\, da$$




ici $Dp(t,a) = \lim\limits_{h\to 0} \quad p(t,a)$