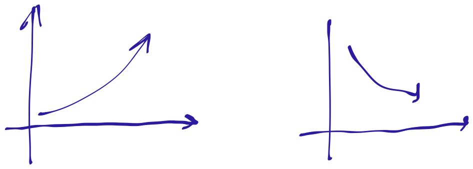
II Equations à retard

<u>Rappel</u> : equations différentielles ordinaires : $x'(t) = f(t, x(t))$ non autonomes

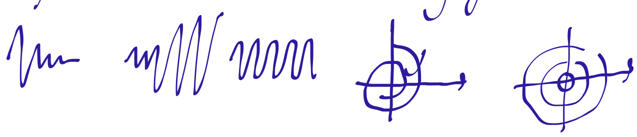
$x'(t) = f(x(t))$ autonomes

en dimension 1 : les solutions des edo scalaires autonomes sont monotones



pas d'oscillations possibles

<u>en dimension 2</u> : on peut avoir des oscillations : foyers ou centres



mais on ne peut pas avoir de <u>CHAOS</u>

pour avoir du chaos on doit passer à la dimension 3 (système de 3 edo)

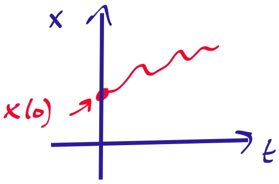
. avec les équations différentielles à retard, une seule équation peut engendrer du chaos !!

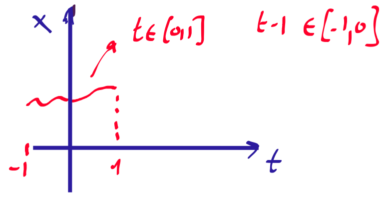
Tout ce qu'on savait sur les edo ne marche plus avec les edo à retard !!

<u>exemple</u> : le modèle de MACKEY-GLASS

Équation différentielle à retard : exemple : $x'(t) = f(x(t-T))$

Différence entre edo et edr





$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t-1)) \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-1,0] \end{cases} \qquad \varphi \in \mathcal{C}([-1;0], \mathbb{R})$$

Exercice : calculer la solution de

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t-T) & t \geq 0 \\ x(t) = \varphi(t) = 1 & \text{sur } [-T, 0] \end{cases}$$

19 décembre 2023.

<u>Question</u> : comment étudier la stabilité des équilibres des équations différentielles à retard ?

1. Equation linéaire simple

1. Equation linéaire simple

On considère l'équation suivante :

$$(1) \quad x'(t) = a\,x(t-1) \qquad \text{on prend le retard } T=1 \text{ et } a \in \mathbb{R}, \ t \geq 0$$

cas 1 : si $a = 0$

$x'(t) = 0$ donc $x(t) = k$ constante

cas 2 : si $a \neq 0$

étape 1 : trouver les équilibres x^*

Les équilibres sont des solutions stationnaires (autrement dit indépendante du temps) donc $x^{*\prime} = 0$

Ils vérifient donc $a x^* = 0$ comme $a \neq 0$

ceci équivaut à $\boxed{x^* = 0}$

étape 2 : on perturbe l'équilibre. On pose $x_p : t \mapsto x_p(t)$ une "petite" perturbation de $x^* = 0$ et on étudie $\lim_{t \to +\infty} x_p(t)$

(si $x_p(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors x^* est asymptotiquement stable)

sinon x^* est instable

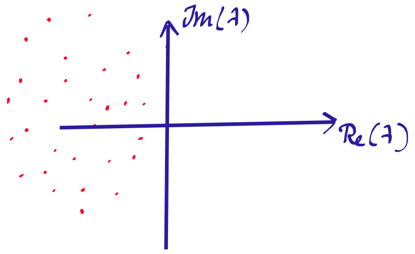
On pose $x(t) = x^* + x_p(t)$ et on remplace dans (1) pour obtenir

$$(x^* + x_p(t))' = a\,(x^* + x_p(t-1))$$

$$\boxed{x_p'(t) = a\,x_p(t-1)}$$

On cherche les solutions de la forme $x(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Remarque : nous verrons qu'il existe une infinité de λ (parce que nous travaillons en dimension ∞ (on rappelle que la condition initiale est $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-1, 0]$))



$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{\lambda_k t}$$

$$= \ldots + \underbrace{c_n e^{Re(\lambda_n) t}}_{\text{dépend de ce}} \overbrace{\left(\cos(Im(\lambda_n) t) + \sin(Im(\lambda_n) t)\right)}^{\text{bornée}}$$

leim dépend de ce si $t \to +\infty$

étape 3 : on remplace $x_p(t)$ par $e^{\lambda t}$ dans $x'_p(t) = a\, x_p(t-1)$

on obtient : $\lambda e^{\lambda t} = a\, e^{\lambda(t-1)} = a\, e^{\lambda t} e^{-\lambda}$ pour tout $t \geq 0$

on obtient : $\lambda e^{\lambda t} = a e^{\lambda(t-1)} = a e^{\lambda t} e^{-\lambda}$ pour tout $t \geq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{\lambda t}}_{} (\lambda - a e^{-\lambda}) = 0$ pour tout $t \geq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda - a e^{-\lambda} = 0}$ equation caractéristique

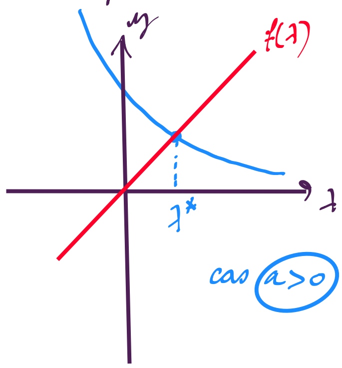
Elle n'a pas de solution explicite, on l'appelle equation transcendantale

Comment determiner les solutions $\lambda \in \mathbb{C}$??

<u>etape 4</u> <u>cas</u> ⓐ si <u>$\lambda \in \mathbb{R}$</u>

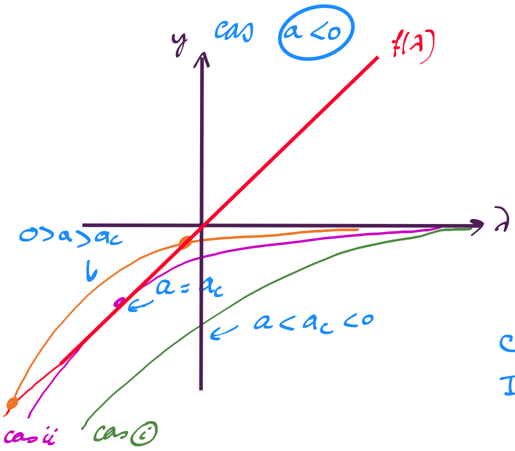
On considère l'equation $\lambda = a e^{-\lambda}$

en posant $f(\lambda) = \lambda$ et $g(\lambda) = a e^{-\lambda}$ on cherche l'egalité $f(\lambda) = g(\lambda)$



si $a > 0$ on a une seule solution réelle de $f(\lambda) = g(\lambda)$ et elle est > 0

<u>donc</u> : si $a > 0$, l'equilibre $x^* = 0$ ne peut pas être asymptotiquement stable !!



$g(\lambda) = a e^{-\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$

$\xrightarrow[\lambda \to -\infty]{} -\infty \quad (a<0)$

Peut-on calculer a_c ?
Et le λ_c correspondant ?

Calculons a_c et λ_c.

Ils vérifient : $f(\lambda_c) = g(\lambda_c)$

et $f'(\lambda_c) = g'(\lambda_c)$.

C'est-à-dire : $\begin{cases} \lambda_c = a_c e^{-\lambda_c} \\ 1 = -a_c e^{-\lambda_c} \end{cases}$

Ce qui donne $\lambda_c = -1$.

Et donc : $1 = -a_c e$

et donc $a_c = -\frac{1}{e} < 0$.

cas 6 : si $\lambda \in \mathbb{C}$ mais $\lambda \notin \mathbb{R}$

On pose $\lambda = \alpha + i\beta$ où $\alpha = Re(\lambda)$ et $\beta = Im(\lambda)$ On suppose $\beta \neq 0$

On remplace alors donc $f(\lambda) = g(\lambda)$.

càd : $\lambda = ae^{-\lambda}$

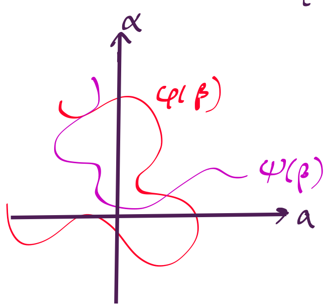
$\iff \alpha + i\beta = ae^{-(\alpha+i\beta)}$

$\iff \alpha + i\beta = ae^{-\alpha} e^{-i\beta}$

$= ae^{-\alpha}\left(\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)\right)$

$= ae^{-\alpha}\left(\cos(\beta) - i\sin(\beta)\right)$

$$\iff \begin{cases} \alpha = ae^{-\alpha}\cos\beta & (1) \\ \beta = -ae^{-\alpha}\sin\beta & (2) \end{cases} \qquad \alpha, \beta, a$$



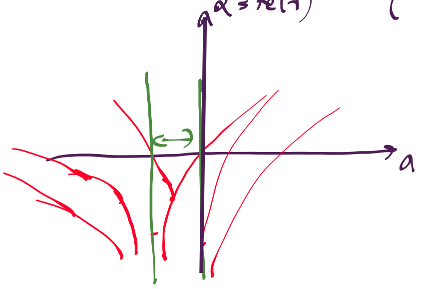
essayons d'exprimer α et a en fonction de β

$\frac{(1)}{(2)} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = -\cotan(\beta)$

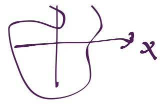
$$(2) \begin{cases} \alpha = -\beta\cotan(\beta) = \varphi(\beta) \\ a = -\frac{\beta}{\sin\beta} e^{\alpha} = -\frac{\beta}{\sin\beta} e^{-\beta\cotan\beta} = \psi(\beta) \end{cases}$$

, $y = \varphi(t)$

, $y = \varphi(t)$



$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \psi(t) \end{cases}$$



On cherche la valeur de β pour laquelle $\alpha = 0$

$$\alpha = -\beta \cot\beta = -\beta \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$\cos\beta = 0 \iff \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}$$

cherchons alors la valeur de $a<0$ la plus grande (la plus proche de 0) avec $\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

or $\beta = -a e^{-\alpha} \sin\beta$ si $\alpha = 0$ on a $\beta = -a \sin\beta$

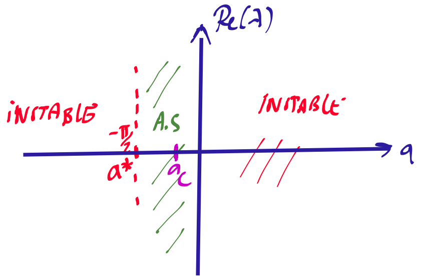
$$\pm\frac{\pi}{2} + k\pi = \pm a$$

donc la valeur de $a<0$ la + proche de 0 qui satisfait $\alpha = 0$ sera $\boxed{a^* = -\frac{\pi}{2}}$

<u>Étape 5</u> : Conclusion : si $a > 0$: $x^* = 0$ est INSTABLE

si $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ $x^* = 0$ est Asymptotiquement stable

si $a \leq -\frac{\pi}{2}$ $x^* = 0$ est INSTABLE



Exercice : on considère l'équation : $x'(t) = a\,x(t-1)\left(1 - x(t-1)\right)$

Il y a 2 équilibres : $x^* = 0$ et $x^* = 1$

Étudier la stabilité de $\boxed{x^* = 1}$

$$x'(t) = a\,x(t-1)\left(1 - x(t-1)\right)$$

en x^* $= a \cdot f(x(t-1))$

$$(x_p(t) + x^*)' = a\, f(x^* + x_p(t-1))$$

$\Rightarrow$ $x_p(t)' = a\, f(x^*$

on linéarise , $x_p'(t)$ $a\, f'($

<u>Rappel</u> :

$$x'(t) = a\,x(t)\left(1 - x(t)\right)$$

pour x^* : $(x^* + x_p)' = a \cdot f(x^* + x_p)$

$$x_p' = a\, f(x^* + x_p)$$

$\Rightarrow \quad x_p(t)' = a\, f(x^* + x_p(t-1))$ on linéarise $\rightarrow \quad x_p'(t) = a\, f'(x^*)\, x_p(t)$

on linéarise :

$$x_p'(t) = a\, f'(x^*)\, x_p(t-1)$$

$$x_p'(t) = -a\, x_p(t-1)$$

$f(x) = x(1-x) = x - x^2$

$f'(x) = 1 - 2x$

$f'(x^*) = 1 - 2 = -1$ ici $\boxed{x^* = 1}$

on précédemment on a étudié : $x_p' = a x_p$ (Modèle linéaire)

on a $x^* = 0$ si $a \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

ici on a $x_p' = -a x_p$ donc $x^* = 1$ est L.A.S si $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$